

MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO DE ALTA ORDEN APLICADO À PROBLEMAS DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIOS POROSOS COM HETEROGENEIDADES NAS ROCHAS E PRESSÃO CAPILAR

Alexandre Ern^a, Igor Mozolevski^b e Luciane I. A. Schuh^c

^a*Université Paris-Est, CERMICS, Ecole des Ponts 6 & 8 Av. B. Pascal, 77455 Marne-la-Vallée cedex 2, France, ern@cermics.enpc.fr*

^b*Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, 88040-900, Florianópolis-SC, Brasil, igor.mozolevski@mtm.ufsc.br*

^c*Instituto de Matemática e Estatística-IME, Universidade de São Paulo, Rua do Matão, 1010, Cidade Universitária, 05508-090, São Paulo-SP, Brasil, lucianes@ime.usp.br; bolsista de doutorado do CNPq*

Palavras Chave: escoamento bifásico, meios porosos heterogêneos, pressão capilar descontínua, Galerkin descontínuo, condição de interface, reconstrução da velocidade, média ponderada, recuperação secundária de óleo

Resumo. Neste artigo apresentamos uma implementação do método de Galerkin descontínuo (DG) sequencial proposto em (A Ern et.al., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:1491-1501, (2010)) para escoamento bifásico em meios porosos heterogêneos bidimensionais com diferentes pressões capilares. Resultados numéricos em malhas não-estruturadas são apresentadas para diferentes ordens de aproximação polinomial. Vários experimentos numéricos são desenvolvidos para ilustrar as considerações teóricas relativas ao desenvolvimento do método DG e para apresentar o comportamento do algoritmo numérico em simulações de problemas heterogêneos com interface em geometria bidimensional.

1 INTRODUÇÃO

Escoamento bifásico, imiscível e incompressível em meios porosos tem grande importância em diversas aplicações, como por exemplo na recuperação secundária de óleo na engenharia de petróleo. Bruscas mudanças nas propriedades das rochas em um reservatório de petróleo geram descontinuidades na pressão capilar, o que reduz consideravelmente a taxa de recuperação e até mesmo pode causar acúmulo de óleo. Para tais aplicações, o desenvolvimento de métodos numéricos que possam lidar de maneira satisfatória com escoamentos em meios porosos heterogêneos com pressão capilar descontínua é um problema relevante e desafiador.

Recentemente [Ern et al. \(2010\)](#) desenvolveram um método de Galerkin descontínuo (DG) sequencial para problemas de escoamento bifásico, imiscível e incompressível em meios porosos heterogêneos com pressão capilar descontínua. Usando o sistema de equações na formulação pressão global-fluxo fracionário, foram impostas as condições de interface não-lineares de maneira fraca através de uma adequada técnica de penalização no salto entre elementos da pressão e saturação. Este método estável e preciso foi desenvolvido usando algumas técnicas específicas do método DG tal como a média ponderada para o termo difusivo para lidar com equação degenerada para saturação e para tratar de maneira adequada as heterogeneidades do meio poroso. Também foi usada uma acurada reconstrução da velocidade total no espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas(-Nédélec).

Neste trabalho apresentamos resultados numéricos obtidos com o método de Galerkin descontínuo sequencial proposto em [Ern et al. \(2010\)](#). Abordamos a resolução de problemas de escoamento em meios porosos homogêneos e heterogêneos com pressão capilar descontínua, ambas aplicações em domínio bidimensional. Obtivemos resultados estáveis e precisos em malhas não-estruturas e usando diferentes graus de aproximação polinomial, evidenciando assim o potencial do método numérico na resolução deste tipo de problemas.

O artigo está organizado da seguinte maneira. Inicialmente na seção 2 apresentamos as equações que modelam o escoamento bifásico em meios porosos heterogêneos na formulação pressão global- fluxo fracionário e apresentamos as condições de interface induzidas pelas descontinuidades da pressão capilar. Na seção 3 descrevemos a discretização de Galerkin descontínuo sequencial utilizada nos resultados numéricos aqui apresentados. Explanamos também a técnica de média ponderada, a estratégia de penalização utilizada para incorporar as condições de interface não-lineares e a reconstrução de fluxos no espaço de Raviart-Thomas(-Nédélec). Finalmente, na seção 4 apresentamos resultados numéricos obtidos com o método de Galerkin descontínuo sequencial.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM MEIOS POROSOS HETEROGÊNEOS

Seja Ω um domínio em \mathbb{R}^d , limitado e aberto, com fronteira $\partial\Omega$ e normal exterior $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$. Consideramos que o domínio Ω dividido em subdomínios Ω_β tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_l} \bar{\Omega}_i$, $N_l \geq 2$, e $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $i \neq j$. Considere $\Gamma_{ij} := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ a interface formada entre dois subdomínios vizinhos Ω_i e Ω_j . Cada subdomínio Ω_β , $\beta \in \{1, 2, \dots, N_l\}$, representa um meio poroso com porosidade ϕ_β e permeabilidade (absoluta) intrínseca K_β . Assumimos que ambas quantidades são constantes em cada subdomínio. Denotamos a mobilidade da fase molhante ($\alpha = \omega$) e da fase não-molhante ($\alpha = n$) no subdomínio Ω_β por $\lambda_{\alpha\beta}$, a soma $\lambda_\beta := \lambda_{\omega\beta} + \lambda_{n\beta}$ como a mobilidade total e $f_\beta := \frac{\lambda_{n\beta}}{\lambda_\beta}$ o fluxo fracionário. Seja π_β a pressão capilar no subdomínio Ω_β . De maneira geral, o índice β é usado para indicar a restrição de uma função definida em Ω ao subdomínio Ω_β . A saturação da fase não-molhante assume valores no intervalo $[S_{nr}, 1 - S_{wr}]$, sendo que S_{wr} e S_{nr} são a saturação residual da fase molhante e não-molhante,

respectivamente. Em cada subdomínio Ω_β , $\beta \in \{1, 2, \dots, N_l\}$, a pressão capilar e as mobilidades são dadas como funções suaves da saturação da fase não-molhante e a pressão capilar $\pi_\beta : [S_{nr}, 1 - S_{wr}] \rightarrow [0, +\infty)$ é uma função crescente e continuamente diferenciável, sendo $\pi_\beta(S_{nr})$ a pressão de entrada, pressão mínima necessária para o óleo entrar em um meio saturado por água, logo existe a saturação de entrada S^* , dada por $\pi_i(S^*) = \pi_{i+1}(S_{nr})$. Apresento modelos para as mobilidades e para pressão capilar na figura 1.

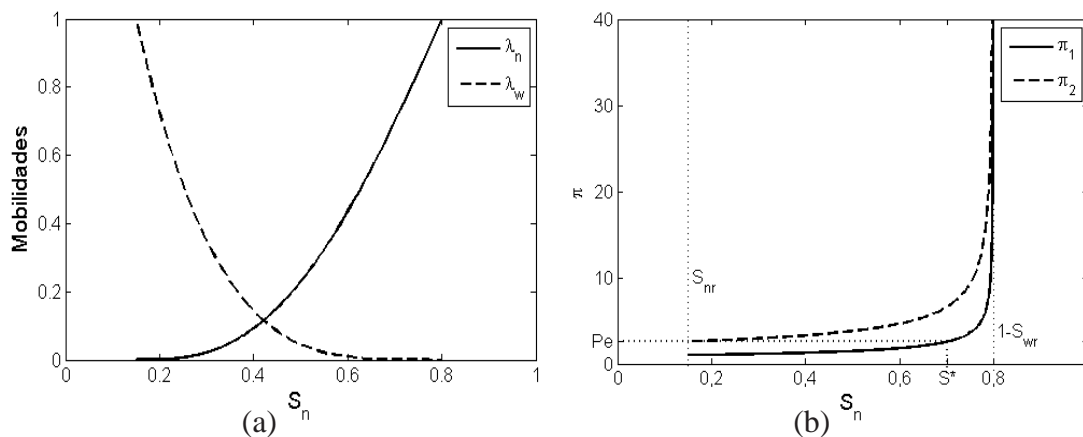


Figura 1: (a) Mobilidades λ_n e λ_w usando o modelo de Brooks-Corey (23) para as permeabilidades relativas, (b) Pressão capilar π , sendo π_1 a pressão capilar associada ao domínio com permeabilidade alta e π_2 referente domínio com permeabilidade mais baixa.

2.1 Sistema de equações

As equações que regem o escoamento bifásico, incompressível e imiscível em um meio poroso heterogêneo Ω na formulação pressão-saturação, desconsiderando os efeitos gravitacionais são dadas por: Dado tempo T , encontrar (P, S) que satisfazem em $\Omega_\beta \times [0, T]$ para cada $\beta \in \{1, 2, \dots, N_l\}$,

$$-\nabla \cdot (\lambda_\beta(S_\beta) K_\beta \nabla P_\beta) = q_{\omega\beta} + q_{n\beta}, \tag{1}$$

$$u_\beta = -\lambda_\beta(S_\beta) K_\beta \nabla P_\beta, \tag{2}$$

$$\phi_\beta \partial_t S_\beta + \nabla \cdot (u_\beta f_\beta(S_\beta)) - \nabla \cdot (\epsilon_\beta(S_\beta) \nabla \pi_\beta(S_\beta)) = q_{n\beta}, \tag{3}$$

onde P , u e S são pressão global, velocidade total e saturação da fase não-molhante, respectivamente. Além disso temos o coeficiente difusivo $\epsilon_\beta = \lambda_{\omega\beta} f_\beta K_\beta$ e os termos de fonte correspondentes a cada fase $q_{\alpha\beta}$, $\alpha \in \{\omega, n\}$. Para completar o sistema consideramos condições de fronteira e iniciais e condições de interface conforme descrito abaixo.

A condição inicial prescreve a saturação sobre os subdomínios Ω_β em um instante inicial $S|_{t=0} = S_0$. As condições de fronteira para pressão e saturação podem ser de Dirichlet ou Neumann. A condição de fronteira de Dirichlet é imposta sobre os conjuntos $\partial\Omega_p^D$ e $\partial\Omega_s^D$ para pressão e saturação, respectivamente. Além disso, $\partial\Omega_s^D$ coincide com $\partial\Omega_s^- \cup \partial\Omega_s^+$, onde $\partial\Omega_s^-$ é a região de entrada de fluxo definida tal que $u \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} < 0$ e $\partial\Omega_s^+$ é a região de saída de fluxo definida por $u \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \geq 0$. Já a condição de fronteira de Neumann impõe a componente normal da velocidade total, isto é $\lambda(S) K \nabla P \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega}$, ou a componente normal do fluxo difusivo para a saturação, $\epsilon(S) \nabla \pi(S) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega}$, sobre os conjuntos $\partial\Omega_p^N$ e $\partial\Omega_s^N$. Para mais detalhes sobre condições

de fronteira para a formulação pressão-saturação, referenciamos para [Chavent e Jaffré \(1978\)](#); [Chen et al. \(1994\)](#).

2.2 Condições de interface

As Eqs. (1)-(3) são válidas somente em Ω_β , $\beta \in \{1, 2, \dots, N_l\}$ e na interface Γ_{ij} , deixam de ser válidas. Logo precisamos de condições para serem impostas em $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, $j \neq i$, que são as condições de interface. Como o escoamento dos fluídos é descrito por uma equação diferencial de segunda ordem no espaço, vamos precisar de duas condições de interface.

A pressão capilar em $S = S_{nr}$ é chamada de pressão de entrada da fase não-molhante (em inglês *threshold pressure or nonwetting phase entry value*), que representa a pressão mínima necessária para o fluído da fase não-molhante entrar em um meio poroso saturado por um fluído molhante. Se a pressão de entrada é positiva podemos ver pelo gráfico 1b que existe uma saturação de entrada S^* , tal que a continuidade da pressão capilar somente é obtida se a saturação da fase não-molhante S no domínio Ω_1 (domínio correspondendo a curva inferior) é maior ou igual a S^* ([Duijn et al. \(1995\)](#); [Duijn e Neef \(1994a,b\)](#)). Aqui consideramos modelos de pressão capilar com pressão de entrada positiva, logo existe a saturação de entrada S^* , dada por $\pi_i(S^*) = \pi_j(S_{nr})$. Ilustramos através da figura 1b a pressão capilar do modelo de Brooks-Corey dada na equação (23) em dois subdomínios, um com permeabilidade baixa (π_2) e outro com permeabilidade mais alta (π_1), onde destacamos a pressão de entrada P_e que o óleo deve atingir em Ω_1 para conseguir entrar em Ω_2 .

Consideremos a interface $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, $j \neq i$. Suponha que o escoamento está ocorrendo na direção Ω_i para Ω_j . Em um reservatório podemos ter dois tipos de escoamento: escoamento de um meio poroso com permeabilidade mais alta para um meio poroso com permeabilidade mais baixa (meio mais fino) e vice-versa. De acordo com comentários feitos acima, para o primeiro caso, o óleo precisa atingir a saturação de entrada S^* em Ω_i para conseguir penetrar em Ω_j e temos a pressão capilar satisfazendo $\pi_i(S) \leq \pi_j(S)$ (ver figura 1). Já no segundo caso o óleo não terá dificuldade de escoar de um meio para outro, pois a pressão de entrada em Ω_j é menor do que a pressão de entrada em Ω_i e temos $\pi_i(S) \geq \pi_j(S)$. Para mais detalhes sobre as condições de interface descritas abaixo ver [Chavent e Jaffré \(1978\)](#); [Duijn et al. \(1995\)](#); [Enchéry et al. \(2006\)](#); [Duijn e Neef \(1994a,b\)](#).

2.2.1 Caso 1:

Condições sobre a interface Γ_{ij} , quando $\pi_i(S) \leq \pi_j(S)$,
Para pressão:

$$-\lambda_i(S_i)K_i\nabla P_i \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}} = -\lambda_j(S_j)K_j\nabla P_j \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}}, \quad (4)$$

$$P_i - P_j = J_{P1}(S_i, S_j), \quad (5)$$

onde, $P_i = \lim_{x \rightarrow \Gamma_{ij}} P(x)$, com $x \in \Omega_i$, $P_j = \lim_{x \rightarrow \Gamma_{ij}} P(x)$, com $x \in \Omega_j$, $S_i = \lim_{x \rightarrow \Gamma_{ij}} S(x)$, com $x \in \Omega_i$, $S_j = \lim_{x \rightarrow \Gamma_{ij}} S(x)$, com $x \in \Omega_j$, S^* é solução da equação $\pi_i(S) = \pi_j(S_{nr})$ e

$$J_{P1}(S_i, S_j) = \begin{cases} \int_{S_{nr}}^{S_i} f_i(\xi)\pi'_i(\xi)d\xi + \pi_i(S_{nr}) - \pi_j(S_{nr}), & \text{se } S_i \in [S_{nr}, S^*], \\ \int_{S_{nr}}^{S_i} (f_i(\xi) - 1)\pi'_i(\xi)d\xi - \int_{S_{nr}}^{S_j} (f_j(\xi) - 1)\pi'_j(\xi)d\xi, & \text{se } S_i \in [S^*, 1 - S_{\omega r}]. \end{cases}$$

Para a saturação:

$$(u_i f_i(S_i) - \epsilon_i(S_i) \nabla \pi_i(S_i)) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}} = (u_j f_j(S_j) - \epsilon_j(S_j) \nabla \pi_j(S_j)) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}}, \quad (6)$$

$$S_i - S_j = J_{S1}(S_i), \quad (7)$$

onde,

$$J_{S1}(S) = \begin{cases} S - S_{nr}, & \text{se } S_{nr} \leq S \leq S^*, \\ S - \pi_j^{-1}(\pi_i(S)), & \text{se } S^* \leq S \leq 1 - S_{\omega r}. \end{cases}$$

2.2.2 Caso 2:

Condições sobre a interface Γ_{ij} , quando $\pi_i(S) \geq \pi_j(S)$

Para a pressão:

$$-\lambda_i(S_i) K_i \nabla P_i \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}} = -\lambda_j(S_j) K_j \nabla P_j \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}}, \quad (8)$$

$$P_i - P_j = J_{P2}(S_i, S_j), \quad (9)$$

onde,

$$J_{P2}(S_i, S_j) = \begin{cases} \int_{S_{nr}}^{S_j} f_j(\xi) \pi_j'(\xi) d\xi + \pi_i(S_{nr}) - \pi_j(S_{nr}), & \text{se } S_j \in [S_{nr}, S^*], \\ \int_{S_{nr}}^{S_i} (f_i(\xi) - 1) \pi_i'(\xi) d\xi - \int_{S_{nr}}^{S_j} (f_j(\xi) - 1) \pi_j'(\xi) d\xi, & \text{se } S_j \in [S^*, 1 - S_{\omega r}]. \end{cases}$$

Para saturação:

$$(u_i f_i(S_i) - \epsilon_i(S_i) \nabla \pi_i(S_i)) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}} = (u_j f_j(S_j) - \epsilon_j(S_j) \nabla \pi_j(S_j)) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{ij}}, \quad (10)$$

$$S_i - S_j = J_{S2}(S_j), \quad (11)$$

onde,

$$J_{S2}(S) = \begin{cases} S_{nr} - S, & \text{se } S_{nr} \leq S \leq S^*, \\ -S + \pi_i^{-1}(\pi_j(S)), & \text{se } S^* \leq S \leq 1 - S_{\omega r}. \end{cases}$$

3 FORMULAÇÃO DE GALERKIN DESCONTÍNUO SEQUENCIAL

Seja $\{t^m\}_{0 \leq m \leq N}$ uma sequência de tempos com $t^0 = 0$ ant $t^N = T$ e passo no tempo $\Delta t := t^{m+1} - t^m$. Para discretização espacial consideramos uma partição do domínio Ω com M elementos $\mathcal{T}_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq M}$. Seja T um elemento genérico de \mathcal{T}_h , com diâmetro h_T , definimos o diâmetro da malha como sendo $h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$. Denotamos por \mathcal{F}_h^i como sendo o conjunto formado pelas faces interiores e \mathcal{F}_h^∂ o conjunto com as faces da fronteira, $\mathcal{F}_h := \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^\partial$ o conjunto de todas as faces e para $F \in \mathcal{F}_h$, h_F representa o diâmetro de F . Assumimos que as interfaces Γ são exatamente cobertas por um conjunto de faces dadas por \mathcal{F}_h^Γ . Definimos $\mathcal{F}_h^{i*} := \mathcal{F}_h^i \setminus \mathcal{F}_h^\Gamma$. Também supomos que os conjuntos $\partial\Omega_p^D$ e $\partial\Omega_s^D$ onde a condição de Dirichlet é satisfeita são exatamente cobertos pelas faces da fronteira. Desta forma \mathcal{F}_{hp}^D e \mathcal{F}_{hs}^D correspondem ao conjunto das faces onde a condição de Dirichlet é satisfeita para pressão e saturação, respectivamente e \mathcal{F}_{hp}^N e \mathcal{F}_{hs}^N , onde a condição de Neumann deve ser imposta.

Para uma função v suficientemente suave, definimos o salto e a média em $F \in \mathcal{F}_h^i$ respectivamente como:

$$[v] := v|_{T^-} - v|_{T^+}, \quad \{v\} := \frac{1}{2}(v|_{T^-} + v|_{T^+}), \quad (12)$$

onde $F = \partial T^- \cap \partial T^+$. Extendemos essas definições para as faces da fronteira $F \in \mathcal{F}_h^\partial$ como $[v] = \{v\} := v|_T$. Para a face F também definimos a normal \mathbf{n}_F como sendo exterior ao elemento T^- .

A solução para a saturação S pode ser descontínua ou apresentar fortes gradientes na interface Γ , onde temos discontinuidades nas propriedades do meio poroso, ou em regiões onde o coeficiente do termo difusivo zera (equação parabólica degenerada). Em geral os métodos de Galerkin descontínuo tem a característica de impor fracamente a continuidade da solução discreta nas interfaces da malha, desta forma precisamos de um tratamento diferenciado para problemas com coeficientes descontínuos ou que tenham difusividade nula. Para este fim usaremos a definição de média ponderada proposta por Di Pietro et al. (2008); Ern et al. (2008) para simetriação e penalização o termo difusivo em problemas heterogêneos. Para isto, considere uma função escalar a , representando a difusividade definida em uma face $F \in \mathcal{F}_h^i$, com valores $a_{T^-,F}$ e $a_{T^+,F}$ associados à T^- e T^+ , respectivamente. Então na face $F \in \mathcal{F}_h^i$ definimos a média ponderada para uma função v e a média harmônica de a por,

$$\{v\}_\omega := \omega_{T^-,F} v^- + \omega_{T^+,F} v^+, \quad \text{onde } \omega_{T^-,F} := \frac{2a_{T^+,F}}{a_{T^-,F} + a_{T^+,F}}, \quad \omega_{T^+,F} := \frac{2a_{T^-,F}}{a_{T^-,F} + a_{T^+,F}} \quad (13)$$

$$\langle a \rangle_F := \frac{a_{T^-,F} a_{T^+,F}}{a_{T^-,F} + a_{T^+,F}} \quad (14)$$

onde os pesos $\omega_{T^-,F}$ e $\omega_{T^+,F}$, são definidos tal que $\omega_{T^-,F} + \omega_{T^+,F} = 1$. Para faces na fronteira extendemos as definições acima por $\{v\}_\omega := v$ e $\langle a \rangle_F := a$. As definições (13) e (14) ainda podem ser usadas se somente um dos valores $a_{T^\pm,F}$ zerar, mas se ambos zeram os pesos são considerados iguais a $\frac{1}{2}$ e a média harmônica é dada por $\langle a \rangle_{F \subset \Omega_\beta} = a_\beta^*$, onde $a_\beta^* = \max_{x \in \Omega_\beta} a_\beta(x)$. Para $F \in \mathcal{F}_h^\Gamma$ consideramos $\omega_{T^-,F} = \omega_{T^+,F} = \frac{1}{2}$ e $\langle a \rangle_F = \frac{a_i^* a_j^*}{a_i^* + a_j^*}$, sendo $F \subset \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$.

Seja $k \geq 1$ um inteiro. Procuramos aproximações no instante de tempo t^m para a pressão P_h^m e para a saturação S_h^m no espaço de elementos finitos descontínuo

$$V_h^k := \{v_h \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in \mathbb{P}_k(T)\}, \quad (15)$$

onde $\mathbb{P}_k(T)$ é o espaço de aproximação polinomial de grau $\leq k$ sobre T . Observamos que procuramos aproximações para pressão e saturação de mesma ordem polinomial. A escolha de diferentes ordens de aproximações polinomiais também é possível, mas esta escolha parece mais natural. Descrevemos abaixo o método de Galerkin descontínuo sequencial usado para resolver o sistema acoplado pressão-saturação (1)-(3).

3.1 Pressão Global P

Dado $S_h^m \in V_h^k$, para $m = 0, 1, \dots, N-1$ do passo no tempo anterior ($m \geq 1$), resolvemos a equação para pressão (1) usando o método DG com penalização interior, ou seja, procuramos

$P_h^{m+1} \in V_h^k$ tal que $\forall z \in V_h^k$,

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1} \cdot \nabla z \\ & - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hp}^D} \int_F (\mathbf{n}_F \cdot \{\lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1}\}_\omega [z] + \theta \mathbf{n}_F \cdot \{\lambda(S_h^m) K \nabla z\}_\omega [P_h^{m+1}]) \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hp}^D} \int_F \gamma_F \frac{\sigma_F}{h} [P_h^{m+1}] [z] = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (q_w + q_n) z - \sum_{F \in \mathcal{F}_{hp}^N} \int_F P_N z \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hp}^D} \int_F \left(-\theta \mathbf{n}_F \cdot \lambda(S_h^m) K \nabla z + \gamma_F \frac{\sigma_F}{h} z \right) P_D \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \left(-\theta \mathbf{n}_F \cdot \{\lambda(S_h^m) K \nabla z\}_\omega + \gamma_F \frac{\sigma_F}{h} [z] \right) G(S_h^m). \end{aligned} \tag{16}$$

onde P_D e P_N representam a condição de Dirichlet e Neumann para a pressão, respectivamente, e $\theta \in \{-1, 0, 1\}$ permite migrar entre as formulações não-simétrica, incompleta ou simétrica do método DG, o parâmetro $\sigma_F > 0$, $\gamma_F = \langle a \rangle_F$ com a como sendo o coeficiente difusivo e o operador $G(S_h^m)$ sobre Γ_{ij} , é definido como,

$$G(S) = \begin{cases} J_{P1}(S_i, S_j), & \text{se } \pi_i(S) \leq \pi_j(S), \\ J_{P2}(S_i, S_j), & \text{se } \pi_i(S) \geq \pi_j(S). \end{cases} \tag{17}$$

Note que em (16) estamos linearizando a equação para pressão ao usar a saturação S_h^n do instante t^n para calcular a pressão P_h^{n+1} . Essa linearização facilita a solução do sistema de equações pressão-saturação, pois nos permite calcular a pressão e a saturação separadamente. Lembramos que a equação para a pressão não degenera, mas usamos a técnica da média ponderada para lidar adequadamente com as heterogeneidades do meio poroso.

3.2 Velocidade total u

Após obter a aproximação para a pressão global P_h^{m+1} no instante t^{m+1} , calculamos a velocidade total u_h^{m+1} no instante t^{m+1} através da reconstrução de fluxos no espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas-Nédélec (RT) de grau l , $l \in \{k-1, k\}$, onde

$$\mathbf{RT}_l(\mathcal{T}_h) = \{u_h \in \mathbf{H}(\text{div}); \forall T \in \mathcal{T}_h, u_h|_T \in [\mathbb{P}_l(T)]^d + x\mathbb{P}_l(T)\}, \tag{18}$$

A reconstrução prescreve localmente em cada elemento da malha $T \in \mathcal{T}_h$ os graus de liberdade locais de u_h^{m+1} como segue: Para todo $F \in \mathcal{F}_h$ e $\forall q \in \mathbb{P}_l(F)$,

$$\int_F (u_h^{m+1} \cdot \mathbf{n}_F) q = \int_F \left(-\mathbf{n}_F \cdot \{\lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1}\}_\omega + \gamma_F \frac{\sigma_F}{h} [P_h^{m+1}] \right) q, \tag{19}$$

e para todo $T \in \mathcal{T}_h$, $\forall w \in [\mathbb{P}_{l-1}(T)]^d$

$$\int_T u_h^{m+1} \cdot w = - \int_T \lambda(S_h^m) K \nabla P_h^{m+1} \cdot w + \theta \sum_{F \in \partial T} \int_F \omega_{T,F} \mathbf{n}_F \cdot (\lambda(S_h^m) K w) [P_h^{m+1}]. \tag{20}$$

Estas condições prescrevem todos os graus de liberdade do campo vetorial u_h^{m+1} (Brezzi e Fortin (1991)). Para mais detalhes referente a reconstrução de fluxos descrita acima, ver Ern et al. (2007, 2009a, 2010).

3.3 Saturação S

Para calcular S_h^{m+1} , usamos o método de Euler implícito no tempo, juntamente com uma discretização espacial do termo difusivo pelo método DG com penalização interior e fluxo de Godunov para o termo advectivo não-linear. Consequentemente, procuramos $S_h^{m+1} \in V_h^k$ tal que para todo $v \in V_h^k$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Delta t^{-1} \phi S_h^{m+1} v - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T u_h^{m+1} f(S_h^{m+1}) \cdot \nabla v \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^+} \int_F (\mathbf{n}_F \cdot \{u_h^{m+1} f(S_h^{m+1})\} + [0.5 |u_h^{m+1} \cdot \mathbf{n}_F| f(S_h^{m+1})]) [v] \\
& + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla S_h^{m+1} \cdot \nabla v - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \int_F \mathbf{n}_F \cdot \{\epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla S_h^{m+1}\} \omega [v] \\
& - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \int_F \theta \mathbf{n}_F \cdot \{\epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla v\} \omega [S_h^{m+1}] + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_{hs}^D} \int_F \delta_F \frac{\sigma_F}{h} [S_h^{m+1}] [v_h] = \quad (21) \\
& + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q_n v + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Delta t^{-1} \phi S_h^m v - \sum_{F \in \mathcal{F}_{hs}^-} \int_F (\mathbf{n}_F \cdot u_h^{m+1}) f(S_D) v_h \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hs}^N} \int_F S_N v + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hs}^D} \int_F \left(-\theta \mathbf{n}_F \cdot \epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla v + \delta_F \frac{\sigma_F}{h} v \right) S_D \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \left(-\theta \mathbf{n}_F \cdot \{\epsilon(S_h^m) \pi'(S_h^m) \nabla v\} \omega + \delta_F \frac{\sigma_F}{h} [v_h] \right) J(S_h^m).
\end{aligned}$$

onde S_D e S_N representam a condição de Dirichlet e a condição de Neumann, respectivamente, para a saturação e $\delta_F = \langle a \rangle_F$, com a como sendo o coeficiente difusivo e o operador $J(S_h^m)$ sobre Γ_{ij} , é definido como,

$$J(S) = \begin{cases} J_{S1}(S_i), & \text{se } \pi_i(S) \leq \pi_j(S), \\ J_{S2}(S_i), & \text{se } \pi_i(S) \geq \pi_j(S). \end{cases} \quad (22)$$

Observe que no método DG para a saturação (21) linearizamos o coeficiente do termo difusivo calculando-o em S_h^m , da mesma forma como efetuamos na equação da pressão (16), mas o método continua não-linear devido ao fluxo fracionário que depende de S_h^{m+1} . Para resolver (21) usamos o método de Newton.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção apresentamos resultados numéricos obtidos com o método DG sequencial apresentado na seção anterior para vários problemas bidimensionais. Resultados que comprovam o potencial do método para problemas unidimensionais podem ser encontrados em [Mozolevski et al. \(2008\)](#); [Ern et al. \(2009a,b,c, 2010\)](#). Neste trabalho apresentamos aproximações para problemas de escoamento em meios porosos homogêneos e heterogêneos com o objetivo de confirmar o potencial do método para resolver problemas de escoamento em 2D.

4.1 Escoamento horizontal homogêneo

Inicialmente validamos o método numérico (16)-(21) para o problema acoplado pressão-saturação com reconstrução de fluxos no espaço de \mathbf{RT}_0 em um problema cujo escoamento é horizontal. Para isto consideramos domínio $\Omega = (0, 100)^2$, com água sendo injetada na fronteira da esquerda $\Omega^- = \{0\} \times (0, 100)$ e óleo saindo do reservatório por $\Omega^+ = \{100\} \times (0, 100)$ e no restante da fronteira é assumida a condição de fluxo nulo, para as mobilidades e pressão capilar usamos o modelo de Brooks-Corey:

$$\lambda_n(S) = \frac{K_{rn}(S)}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_n} S_e^2 (1 - (1 - S_e)^{\frac{2+\theta}{\theta}}), \quad \lambda_w(S) = \frac{K_{rw}(S)}{\mu_w} = \frac{1}{\mu_w} (1 - S_e)^{\frac{2+3\theta}{\theta}}, \quad (23)$$

$$\pi(S) = P_n - P_w = P_e (1 - S_e)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \text{onde } S_e = \frac{S - S_{rn}}{1 - S_{rw} - S_{rn}}$$

com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} \mu_n &= 10^{-2} \text{ Kg/ms}, \quad \mu_w = 10^{-3} \text{ Kg/ms}, \quad S_{rw} = 0.2 \quad S_{rn} = 0.15, \quad \theta = 2, \\ \phi &= 0.2, \quad K = 1e - 11, \quad P_e = 10^4 \text{ Pa}, \quad \text{Condição inicial: } S_{n0} = 0.7, \\ \text{Condições de Fronteira: } &\begin{cases} P_{wD}^- = 2.4e + 5 \Rightarrow P^- = 2.4e + 5, \quad S_D^- = 0.25, & \text{em } \Omega^- \\ P_{wD}^+ = 1e + 5 \Rightarrow P^+ = 1.2006e + 5, \quad S_D^+ = 0.7, & \text{em } \Omega^+ \\ P_N = 0, \quad S_N = 0, & \text{em } \Omega^N \end{cases} \quad (24) \end{aligned}$$

Neste problema o escoamento é horizontal, o que nos permite comparar os resultados com aqueles obtidos em domínio unidimensional e assim validar o método numérico em 2D. Nos resultados numéricos consideramos malhas uniformes \mathcal{T}_h formadas por elementos triangulares. Nas Figs. 2, 3, 4 e 5 apresentamos gráficos em 3D nos instantes de tempo $T = 30$ e 50 dias das aproximações obtidas com malha de 512 e 2048 elementos para a saturação. Podemos notar que a aproximação é constante na direção x , o que já era esperado, pois o escoamento é horizontal. Notamos também que a magnitude da oscilação presente na frente do fluido na malha de 512 elementos reduz com o uso da malha 2048 para ambas ordens de aproximação polinomial $k = 1$ e $k = 2$. Na Fig. 6 apresento aproximações para pressão e velocidade total obtidas na malha de 2048 elementos. Nas Figs. 7 e 8 analisamos a convergência do método para ordens de aproximação polinomial 1 e 2, respectivamente, comparando as soluções obtidas no domínio bidimensional, fixando a direção $y = 40$, com soluções obtidas no domínio unidimensional com velocidade total constante $u = 9e - 7$. Observamos que o método converge a medida que refinamos a malha espacial e aumentamos a ordem de aproximação polinomial. Temos uma diferença na frente do fluido, sendo que a frente do fluido obtida na formulação pressão-saturação 2D está um pouco adiantada em relação a outra, mas isso ocorre pois nesse caso a velocidade total varia na direção x conforme pode ser observado na Fig. 9.

4.2 Five-Spot homogêneo

O problema Five-Spot é um problema onde simulamos o escoamento de óleo provocado pela injeção de água em um poço de injeção. Temos um problema original com 4 poços de produção localizados em cada vértice do domínio pelos quais o óleo é ejetado do reservatório e um poço de injeção de água que está localizado no centro do reservatório. Para melhor analisar este exemplo e devido a simetria do problema, resolvemos esse problema em um quarto do domínio cujo problema é conhecido como five-spot.

Para validar o método numérico no problema five-spot, usamos os mesmos dados utilizados em Rivière (2004) e comparamos os resultados obtidos com os apresentados neste artigo. Na

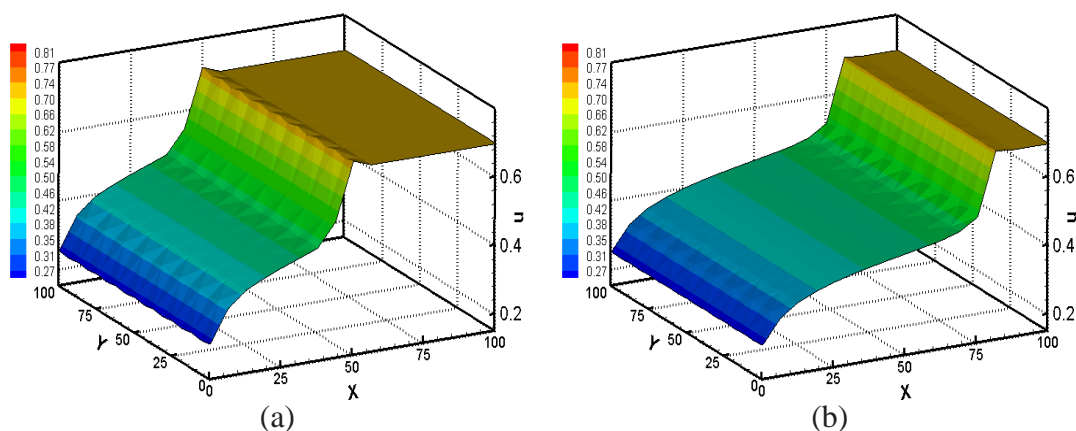


Figura 2: Escoamento Horizontal: Aproximações para saturação da fase não-molhante obtidas com o método DG (16)-(21) usando $k = 1$, 512 elementos, $\Delta t = 1$ dia nos instantes de tempos (a) 30 dias (b) 50 dias.

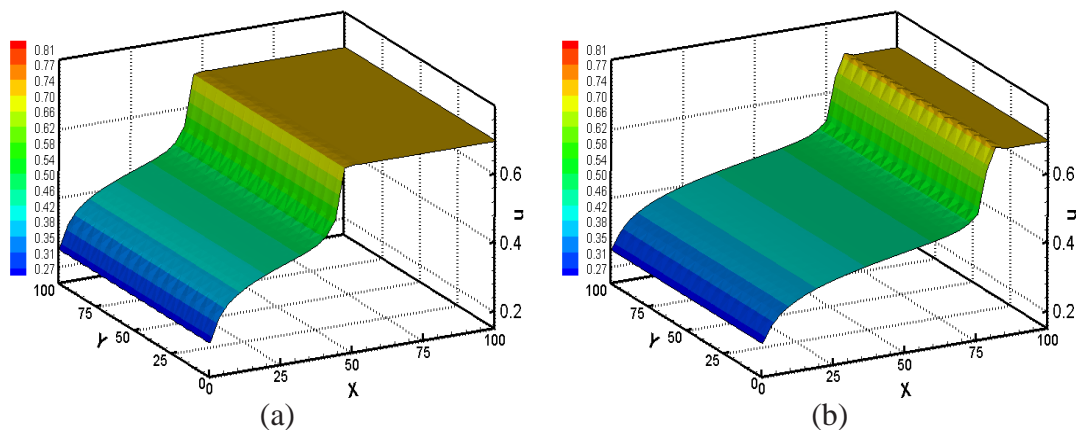


Figura 3: Escoamento Horizontal: Aproximações para saturação da fase não-molhante obtidas com o método DG (16)-(21) usando $k = 1$, 2048 elementos, $\Delta t = 12$ horas nos instantes de tempos (a) 30 dias (b) 50 dias.

resolução numérica desse problema consideramos o modelo de Brooks-Corey para as mobilidades e pressão capilar dado em (23) com os seguintes parâmetros:

Domínio: de acordo com Fig. 10

$$\mu_n = 5e - 4 \text{ Kg/ms} \quad \mu_w = 2e - 3 \text{ Kg/ms}, \quad S_{rw} = 0 \quad S_{rn} = 0, \quad \theta = 3, \\ \phi = 0.2, \quad K = 1e-11, \quad P_e = 5e + 3Pa, \quad \text{Condição inicial: } S_{n0} = 0.8,$$

$$\text{Condições de Fronteira: } \begin{cases} P_{wD}^- = 3.45e + 6 \Rightarrow P^- = 3.4504e + 6, \quad S_D^- = 0.6, & \text{em } \Omega^- \\ P_{wD}^+ = 241e + 6 \Rightarrow P^+ = 2.4119e + 6, \quad \mathbf{n} \cdot \epsilon(S) \nabla \pi(S) = 0, & \text{em } \Omega^+ \\ P_N = 0, \quad S_N = 0, & \text{em } \Omega^N \end{cases} \quad (25)$$

Apresento aproximações para pressão global P e campo de velocidade u na Fig. 11. Para saturação apresentamos linhas de contorno nas Figs. 12 e 13 obtidas com ordens de aproximação polinomial $k = 1$ e $k = 2$. Comparando os nossos resultados em $T = 100$ dias, obtidos

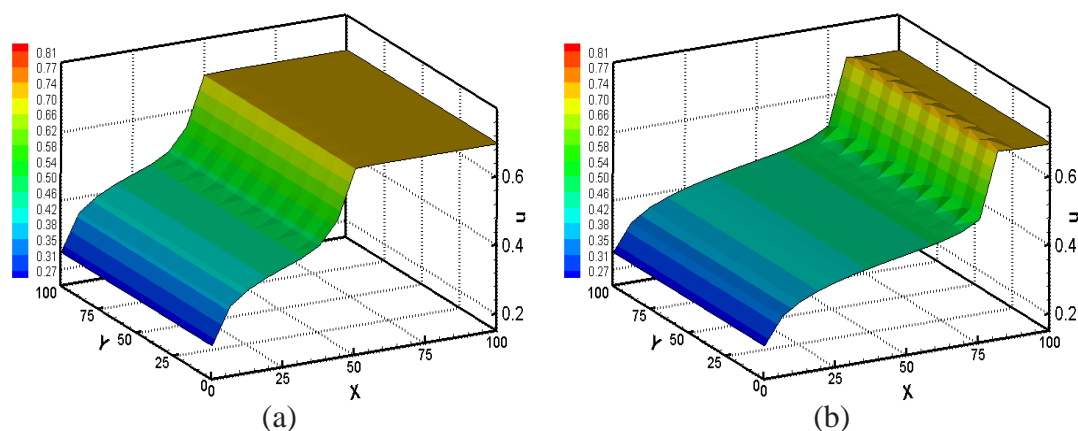


Figura 4: Escoamento Horizontal: Aproximações para saturação da fase não-molhante obtidas com o método DG (16)-(21) usando $k = 2$, 512 elementos, $\Delta t = 12$ horas nos instantes de tempos (a) 30 dias (b) 50 dias.

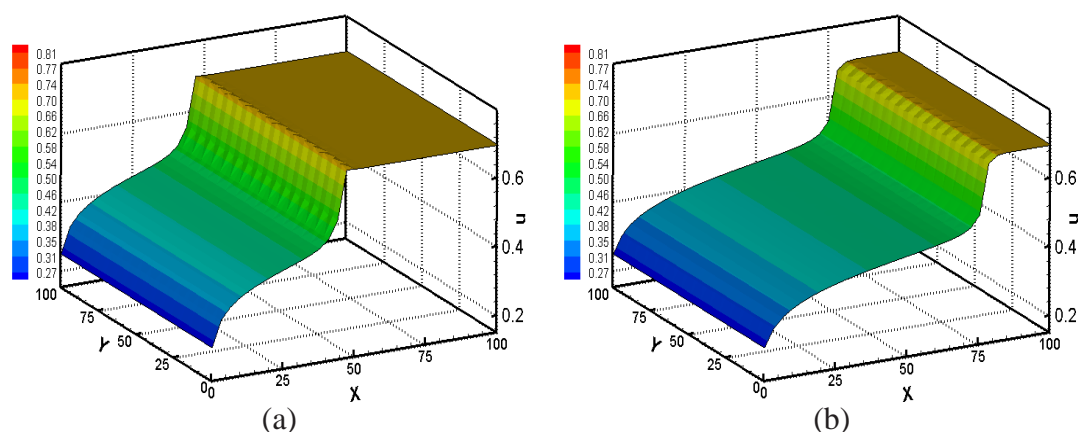


Figura 5: Escoamento Horizontal: Aproximações para saturação da fase não-molhante obtidas com o método DG (16)-(21) usando $k = 2$, 2048 elementos, $\Delta t = 6$ horas nos instantes de tempos (a) 30 dias (b) 50 dias.

com malha de 260 elementos (Fig. canto superior de 12) com resultados do artigo Rivière (2004), obtidos com malha de 264 elementos (Fig. 6 do artigo), percebemos que resultados são bem semelhantes. Para avaliar a convergência do método numérico apresentamos na Fig. 14 os perfis para saturação ao longo da diagonal $x = y$. Podemos notar que as oscilações presentes na frente do fluido são eliminadas à medida que refinamos a malha espacial.

4.3 Escoamento horizontal heterogêneo

De acordo com observações feitas anteriormente, as propriedades do meio poroso tais como porosidade e permeabilidade, tem influência direta no perfil da pressão capilar. Agora vamos abordar o problema bidimensional com uma interface, onde consideramos permeabilidade K e pressão capilar π descontínuas na interface formada entre sedimentos com diferentes propriedades físicas. Para este exemplo consideramos o modelo de Brooks-Corey para mobilidades

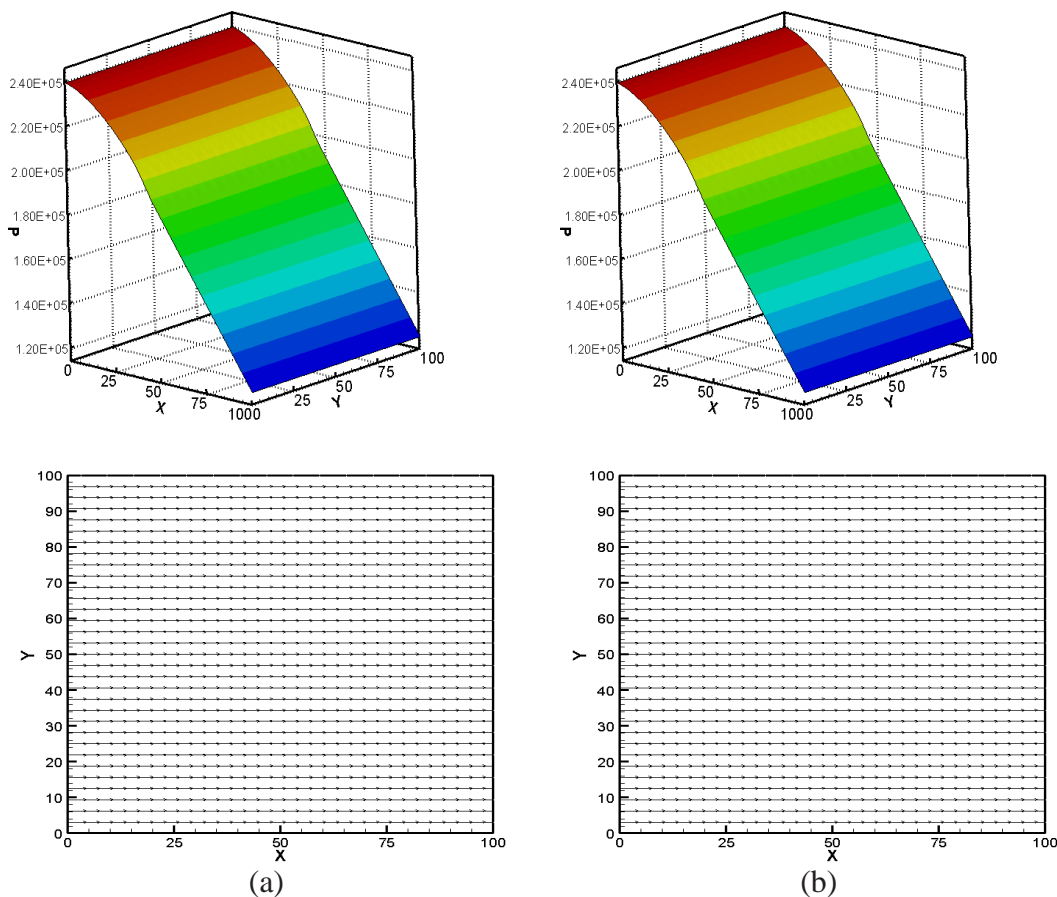


Figura 6: Escoamento Horizontal: Aproximações para pressão global e velocidade total obtidas com o método DG (16)-(21) usando $p = k$, 2048 elementos, $\Delta t = 12$ horas nos instantes de tempos (a) 30 dias (b) 50 dias.

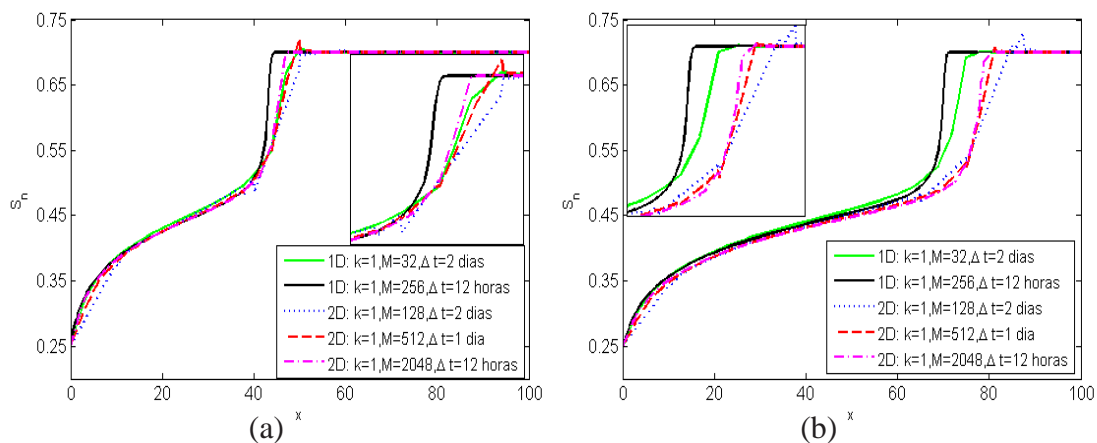


Figura 7: Comparando soluções DG obtidas em 2D fixando $y = 40$, $k = 1$, com soluções obtidas para o problema em 1D, usando velocidade total constante $u = 9e - 7$ sendo, (a) $T = 30$ dias (b) $T = 50$ dias.

e pressão capilar dado em 23 com os seguintes dados:

$$\begin{aligned}
 &\Omega = (0, 100)^2, \Gamma = \{(x, y) \in \Omega \text{ tal que } x = 50\}; \\
 &\mu_n = 10^{-2} \text{ Kg/ms}, \mu_w = 10^{-3} \text{ Kg/ms}, S_{rw} = 0, S_{rn} = 0, \theta = 2, \\
 &\phi = 0.4, K = [1e - 8 \ 1e - 9], P_e = [540 \ 1000] \text{ Pa} \Rightarrow S^* = 0.7084, \\
 &\text{Condições de Fronteira: } \begin{cases} P^- = 2140, n \cdot u_w = -5e - 6, & \text{em } \Omega^- \\ S^+ = 0.3141, n \cdot u_w = 5e - 6, & \text{em } \Omega^+ \\ P_N = 0, S_N = 0, & \text{em } \Omega^N \end{cases} \quad (26)
 \end{aligned}$$

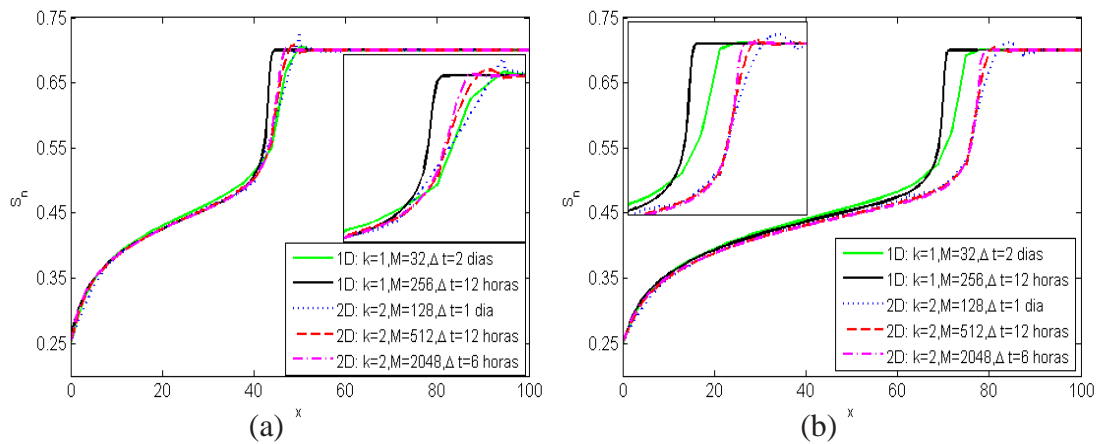


Figura 8: Comparando soluções DG obtidas em 2D fixando $y = 40$, $k = 2$, com soluções obtidas para o problema em 1D, usando velocidade total constante $u = 9e - 7$ sendo, (a) $T = 30$ dias (b) $T = 50$ dias.

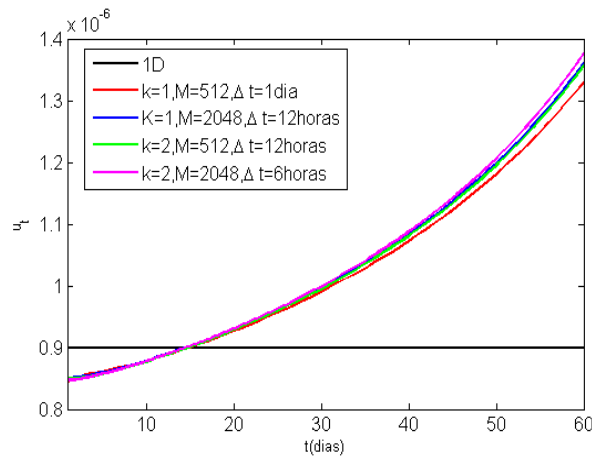


Figura 9: Variação da velocidade total com o avanço no tempo na direção x .

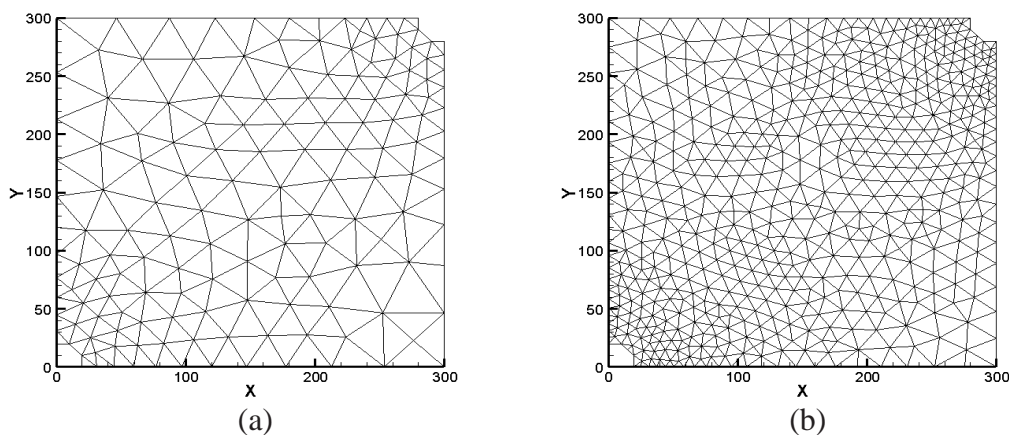


Figura 10: Malha: (a) 260 elementos (b) 1052 elementos .

Condição inicial:

$$S_{n0}(x, y) = \begin{cases} 0.8, & \text{para } x \in (0, 50] \\ 0.3141, & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (27)$$

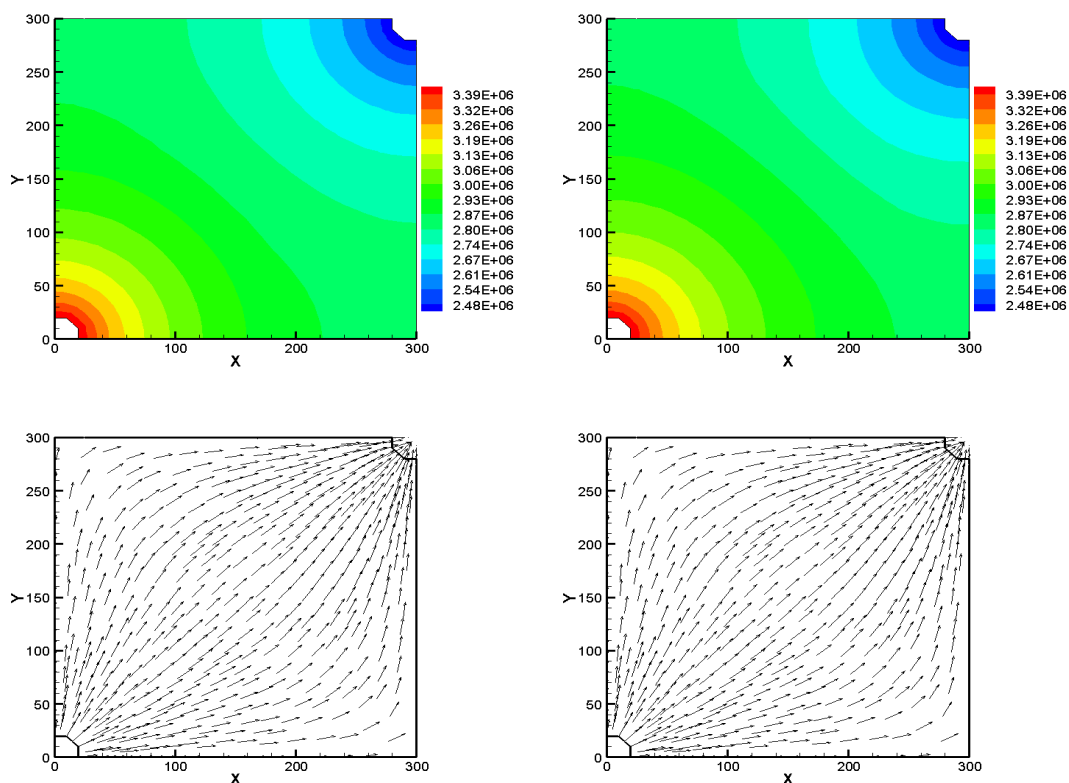


Figura 11: Aproximações para Pressão e velocidade total obtidas com o método DG (16),(21) nos instantes de tempo $T = 50$ dias à esquerda e $T = 100$ dias à direita. Em ambos os resultados usamos $k = 1$ e $M = 1052$, $\Delta t = 1$ dia.

onde $\Omega^- = \{0\} \times (0, 100)$ é a região em que a água é injetada e $\Omega^+ = \{100\} \times (0, 100)$ região pela qual temos saída de óleo do reservatório.

Apresentaremos abaixo resultados para este problema obtidos com diferentes malhas, que apresentamos na fig. (15). Na Fig. 16 apresentamos aproximações para saturação obtidas com ordens de aproximação polinomial 1 e 2 nas malhas de 1000 e 3956 elementos. Podemos notar que o método numérico consegue impor as condições de interface com precisão, permitindo que o óleo cruze a interface somente se $S > S^*$ à esquerda da interface. Devido a isso podemos notar a formação daquela elevação da saturação da fase não-molhante à esquerda da interface, garantindo assim que o óleo mantenha pressão suficiente para o óleo conseguir cruzar a interface e fluir através da região de baixa permeabilidade. Na Fig. 17 apresentamos as linhas de contorno para S , e podemos notar que a aproximação para a solução mantém comportamento horizontal à medida que avançamos no tempo. Aproximações para pressão e velocidade total são apresentadas na Fig. 18.

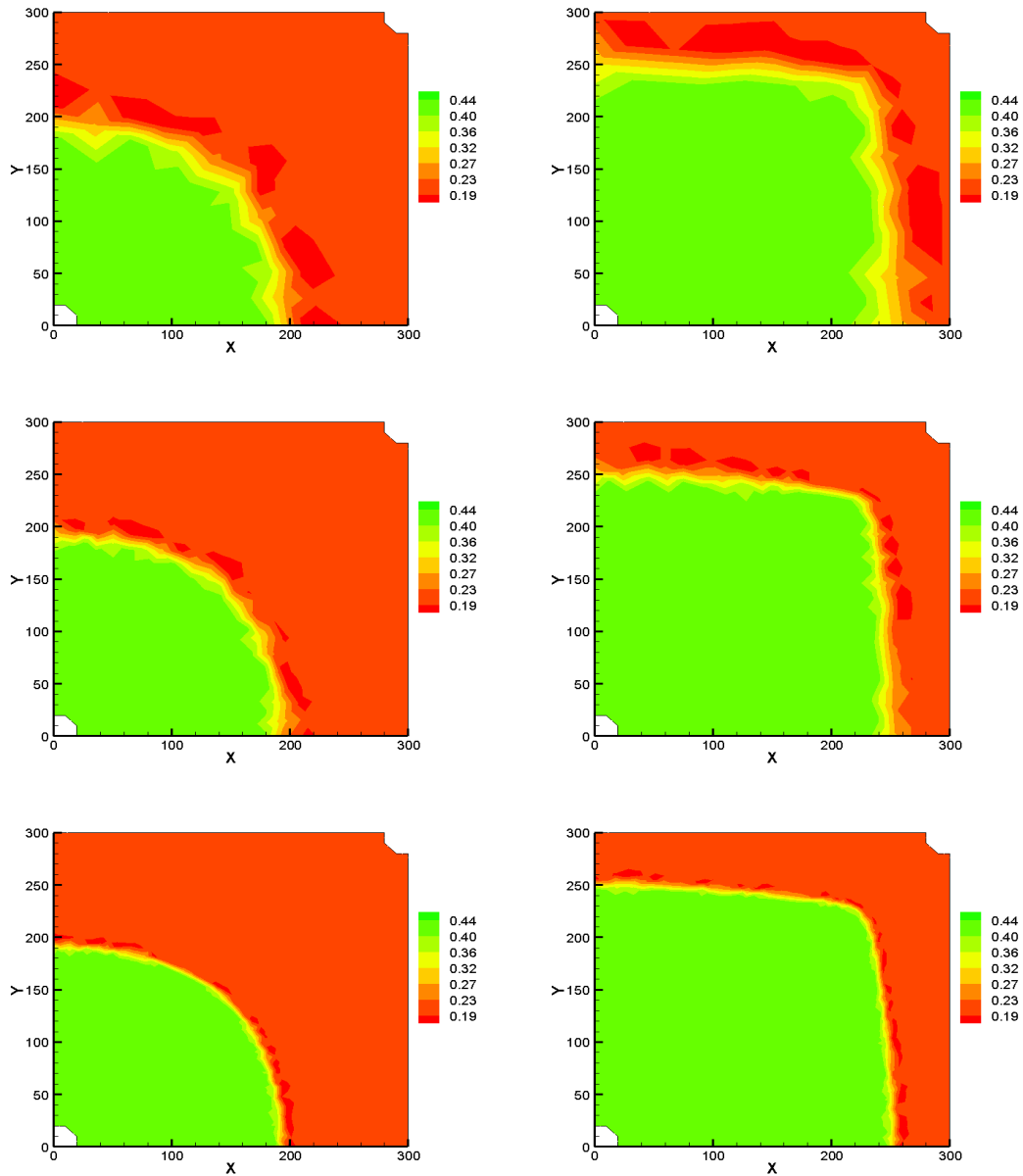


Figura 12: Comparando aproximaciones para saturación da fase molhante S_w obtidas com o método DG (16),(21) no instante de tempo $T = 50$ dias na coluna da esquerda e $T = 100$ dias na coluna da direita, usando $p = 1$ e: Na primeira linha: $M = 260$, $\Delta t = 2$ dias; Na segunda linha: $M = 1052$, $\Delta t = 1$ dia; Na terceira linha: $M = 4086$, $\Delta t = 12$ horas.

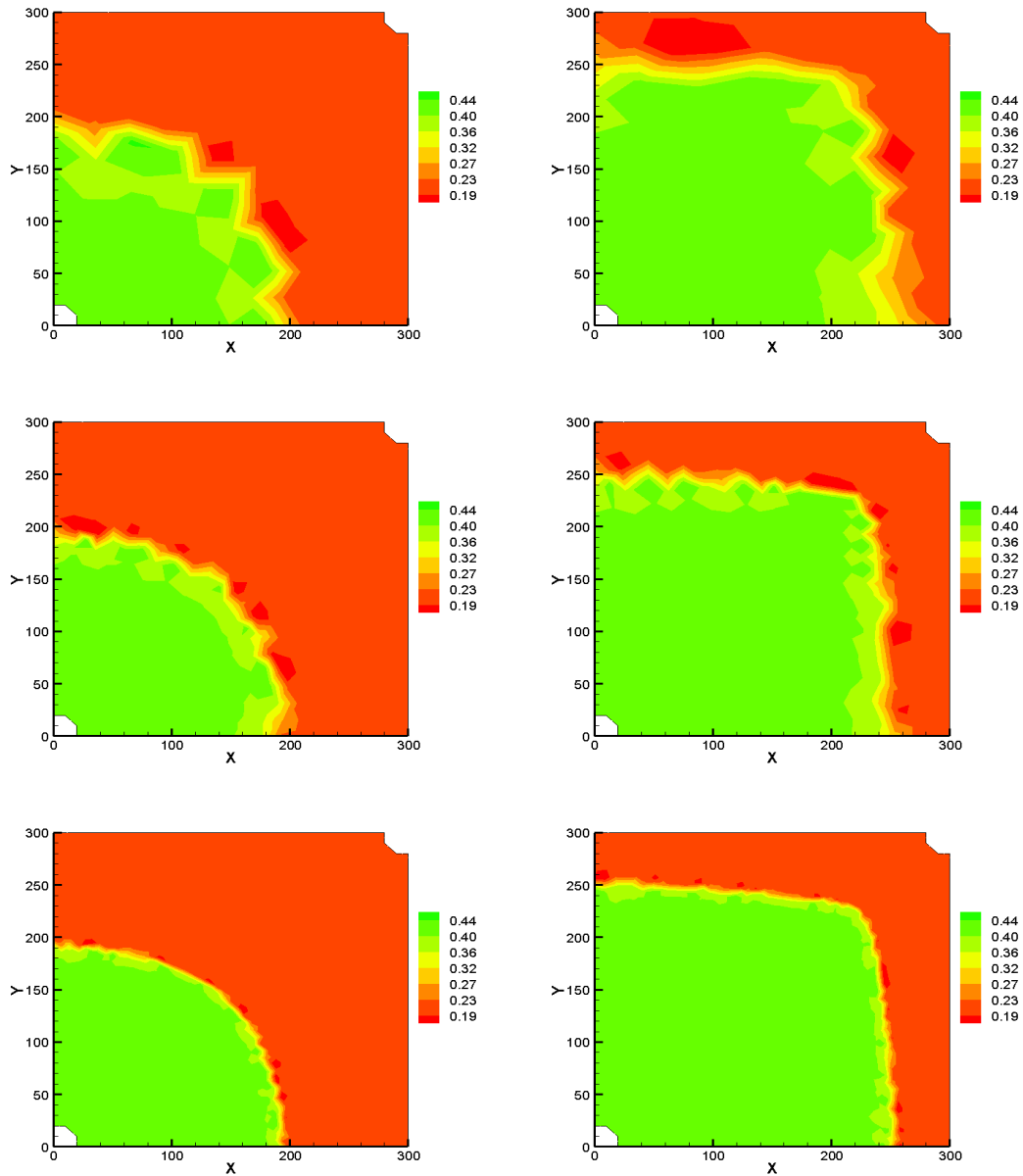


Figura 13: Comparando aproximações para saturação da fase molhante S_w obtidas com o método DG (16),(21) no instante de tempo $T = 50$ dias na coluna da esquerda e $T = 100$ dias na coluna da direita, usando $p = 2$ e: Na primeira linha: $M = 260$, $\Delta t = 1$ dia; Na segunda linha: $M = 1052$, $\Delta t = 12$ horas; Na terceira linha: $M = 4086$, $\Delta t = 12$ horas.

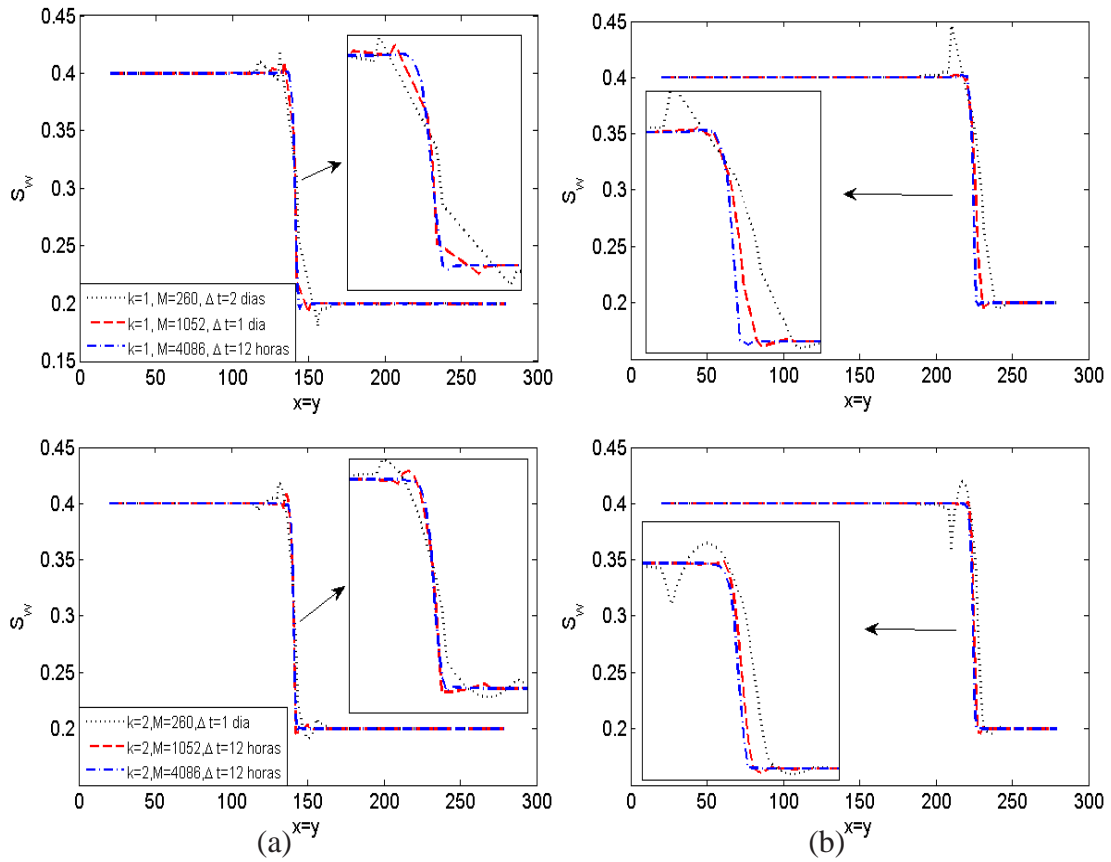


Figura 14: Comparando aproximaciones para saturación de la fase molhante S_w del problema five-spot en el instante de tiempo $T = 48$ días a la izquierda y $T = 100$ días a la derecha, fijando la dirección $x = y$, usando $k = 1, 2$ e $M = 260, 1052, 4086$.

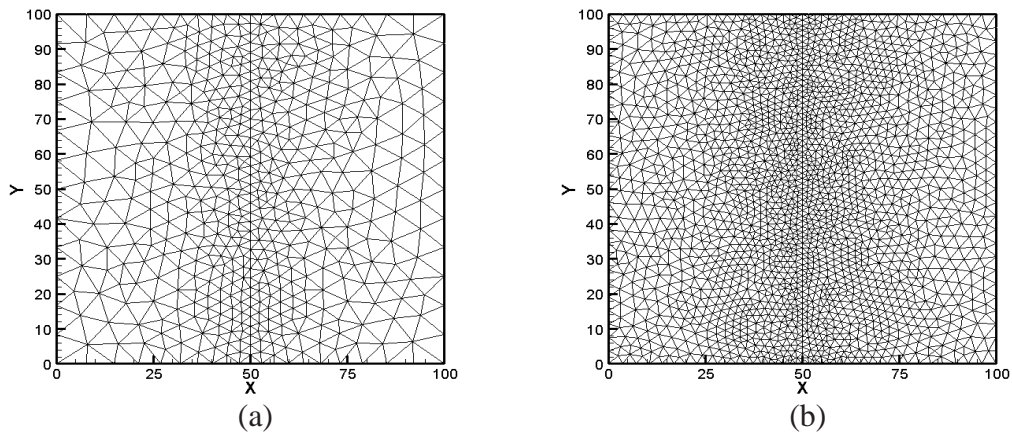


Figura 15: Malha: (a) 1000 elementos (b) 3956 elementos .

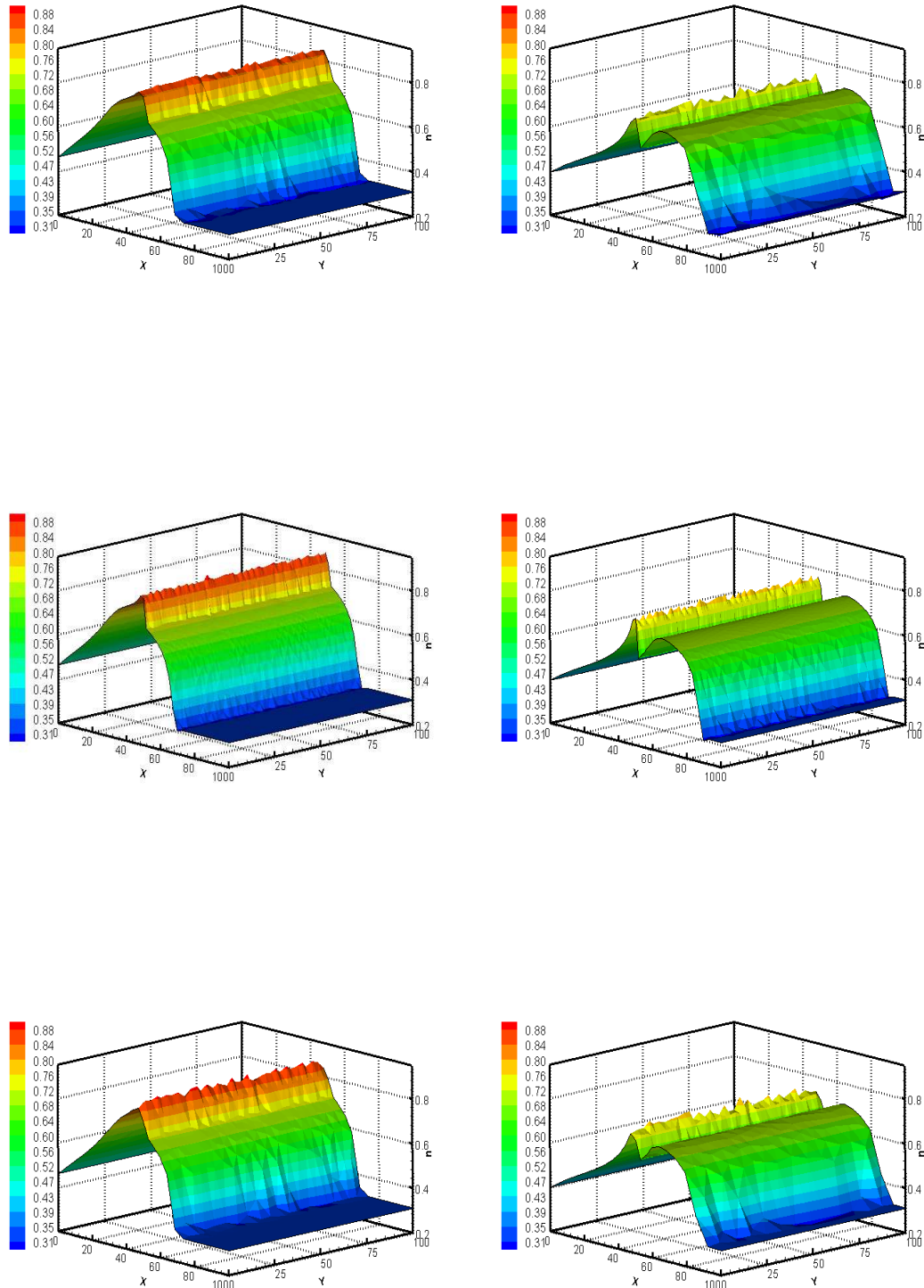


Figura 16: Comparando aproximações para saturação da fase não-molhante S_n obtidas com o método DG (16),(21) no instante de tempo $T = 6.10$ dias na coluna da esquerda e $T = 14.2$ dias na coluna da direita, sendo que: Na primeira linha usamos $k = 1$, $M = 1000$; Na segunda linha: $k = 1$, $M = 3956$; e Na terceira linha: $k = 2$, $M = 1000$.

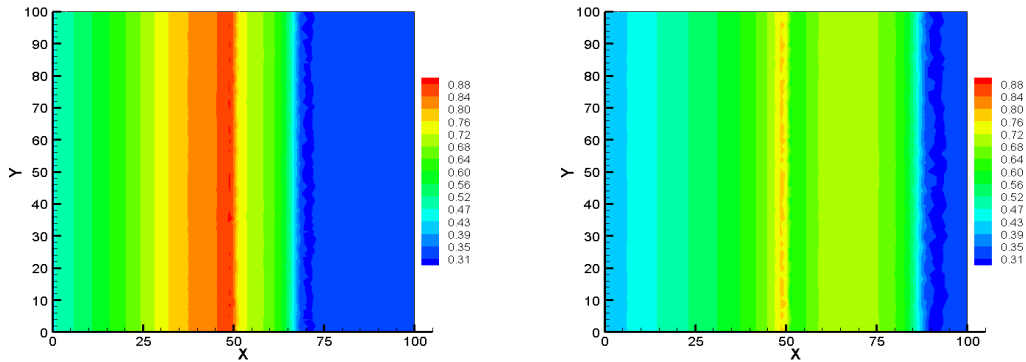


Figura 17: Linhas de contorno para saturação da fase não-molhante S_n obtidas com o método DG (16),(21) usando $k = 1$, $M = 3956$, no instante de tempo $T = 6.10$ dias na coluna da esquerda e $T = 14.2$ dias na coluna da direita.

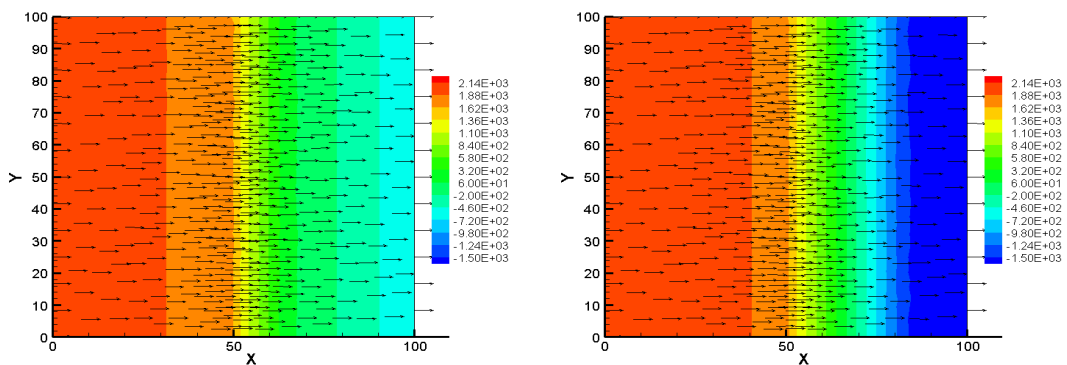


Figura 18: Aproximações para Pressão e velocidade total obtidas com o método DG (16),(21) nos instantes de tempo $T = 6.10$ dias à esquerda e $T = 14.2$ dias à direita. Em ambos os resultados usamos $k = 1$ e $M = 1000$.

REFERÊNCIAS

- Brezzi F. e Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, volume 15 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, 1991.
- Chavent G. e Jaffré J. *Mathematical models and Finite Elements for reservoir simulation*. Elsevier, North-Holland, 1978.
- Chen Z., Ewing R., e Espedal M. Multiphase flow simulation with various boundary conditions. In *Proceedings of the International Conference on Computational Methods in Water Resources X*, páginas 925–932. 1994.
- Di Pietro D., Ern A., e Guermond J. Discontinuous Galerkin methods for anisotropic semidefinite diffusion with advection. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(2):805–831, 2008.
- Duijn C.J.v., Molenaar J., e Neef M. The effect of capillary forces on immiscible two-phase flow in heterogeneous porous media. *Transport in Porous Media*, 21:71–93, 1995.
- Duijn C.J.v. e Neef M. The effect of capillary forces on immiscible two-phase flow in strongly heterogeneous porous media. Relatório Técnico 94-95, Faculty of technical mathematics and informatics, 1994a.
- Duijn C.J.v. e Neef M. Self-similar profiles for capillary diffusion driven flow in heterogeneous porous media. Relatório Técnico, Delft University of Technology, 1994b.
- Enchéry G., Eymard R., e Michel A. Numerical approximation of a two-phase flow problem in a porous medium with discontinuous capillary forces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(6):2402–2422, 2006.
- Ern A., Mozolevski I., e Schuh L. Accurate velocity reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of two-phase porous media flows. *Comptes Rendus Mathématique*, 347:551–554, 2009a.
- Ern A., Mozolevski I., e Schuh L. Discontinuous Galerkin method for two-phase flows in heterogeneous porous media with capillary pressure discontinuities. In *XXX Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. 2009b.
- Ern A., Mozolevski I., e Schuh L. Método de Galerkin descontínuo aplicado a problemas de escoamento em meios porosos com pressão capilar descontínua. In *XXX Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. 2009c.
- Ern A., Mozolevski I., e Schuh L. Discontinuous Galerkin approximation of two-phase flows in heterogeneous porous media with discontinuous capillary pressures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:1491–1501, 2010.
- Ern A., Nicaise S., e Vochralík M. An accurate $H(\text{div})$ flux reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems. *C.R.Acad.Sci.Paris, Ser. I* 345:709–712, 2007.
- Ern A., Stephansen A.F., e Zunino P. A discontinuous Galerkin method with weighted averages for advection-diffusion equations with locally vanishing and anisotropic diffusivity. *published online on IMA J. Numer. Anal.*, doi: 10.1093/imanum/dri017, 2008.
- Mozolevski I., Schuh L., e Barros S. Método de galerkin descontínuo aplicado à equação de buckley-leverett. In *XXIX Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, volume PAP1059. 2008.
- Rivière B. Numerical study of a discontinuous Galerkin method for incompressible two-phase flow. In *Proceedings of ECCOMAS*, volume 2. 2004.