

## **ADAPTAÇÃO VIA MOVIMENTO DE MALHAS EM ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS**

**Gustavo Bono, Armando M. Awruch**

Centro de Mecânica Aplicada e Computacional (CEMACOM)  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS  
Osvaldo Aranha 99 – 3º andar, 90035-190 Porto Alegre, Brasil  
e-mail: gbono@genesis.cpegc.ufrgs.br, web page: <http://www.mecanica.ufrgs.br>

**Palavras chave:** Método Adaptativo de Malha, escoamentos compressíveis, Método dos Elementos Finitos.

**Resumo.** *Neste trabalho, apresenta-se uma metodologia de adaptação de malhas de elementos finitos para simular escoamentos compressíveis com onda de choque. A malha inicial é continuamente adaptada durante o processo de solução e os nós são movimentados mantendo o máximo possível, a suavidade da malha e a ortogonalidade local. O método emprega uma estimativa de erro, na qual a magnitude e direção são controladas pelo tensor Hessiano, que contém derivadas segunda da solução. Esta métrica é projetada nas arestas dos elementos, determinando o movimento dos nós. As equações diferenciais governantes do fluido são discretizadas no tempo e no espaço por um esquema explícito de Taylor-Galerkin, usando elemento isoparamétrico hexaédrico de oito nós. Um algoritmo de movimento de malha é incluído no contexto da descrição Arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE). Finalmente, alguns exemplos de validação em duas dimensões para escoamentos transônicos e supersônicos são apresentados.*

## 1 INTRODUÇÃO

O emprego de métodos de adaptação de malhas para o aumento na precisão da aproximação numérica é atualmente uma técnica popular na resolução de equações diferenciais. Principalmente as que apresentam singularidades que se desenvolvem, propagam, diminuem e/ou desaparecem a medida que a solução evolui. Podendo-se citar como exemplos: ondas de choque em escoamentos compressíveis, camada limite em escoamentos viscosos, onda de detonação em processos reativos, etc.. A solução numérica destes problemas é usualmente difícil devido a que a natureza, localização e duração da singularidade é desconhecida inicialmente.

O objetivo final dos métodos adaptativos é atingir a máxima precisão numérica na simulação para um determinado problema com o menor custo computacional. Basicamente, estes consistem de um estimador de erro, uma estratégia de adaptação e um critério de malha ótimo. A idéia fundamental dos métodos adaptativos é estimar a qualidade inicial da solução numérica via uma estimativa do erro  $e$ , então, modificar sistematicamente a malha original, usando alguma estratégia adaptativa tal como: o método  $h$ ,  $p$  e  $r$ , respetivamente. No método  $h$ , aumenta-se ou diminui o tamanho dos elementos, enquanto que a estratégia do método  $p$  é realizada trocando a ordem do polinômio de aproximação empregado em cada elemento. No método  $r$ , ou método de realocação de nós, a conectividade da malha é mantida, mas os nós são movimentados nas regiões onde necessita-se uma melhor aproximação da solução global.

A eficiência e confiabilidade dos métodos  $h$  e  $p$  já foram demonstradas na solução de diferentes equações diferenciais que governam vários problemas físicos<sup>1,2,3</sup>, particularmente em problemas estacionários. O método  $r$ , tem sido o menos popular, principalmente devido ao fato de não existir um método de movimentação geral e robusto da malha em duas e três dimensões. Não obstante, o método  $r$ , tem as vantagens: não precisa-se trocar a estrutura de dados, facilidade de incorporação em algum código já existente e a malha pode mudar continuamente.

Os métodos de realocação de nós tem-se mostrados exitosos para uma ampla variedade de problemas unidimensionais<sup>4</sup> e para problemas multidimensionais<sup>5</sup>.

O propósito deste trabalho é apresentar um método adaptativo de redistribuição de nós através do método dos elementos finitos, baseado numa estimativa de erro medida nas arestas dos elementos. Tradicionalmente, o critério de malha ótima é definido de maneira que a malha ótima seja a que distribui uniformemente o erro sobre os elementos. Neste trabalho, o erro é equidistribuído sobre as arestas, a fim de captar as características direcionais do escoamento. Porém, isto conduz a uma anisotropia da malha que é evitada empregando uma formulação baseada em princípios variacionais.

## 2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações fundamentais que governam o escoamento de um fluido viscoso, transiente são dadas pelas equações da continuidade, da quantidade de movimento e da energia. Estas equações são apresentadas em forma conservativa e podem-se escrever como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

com:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho e \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_1 v_i + p \delta_{i1} \\ \rho v_2 v_i + p \delta_{i2} \\ \rho v_3 v_i + p \delta_{i3} \\ v_i (\rho e + p) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{G}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{i1} \\ -\tau_{i2} \\ -\tau_{i3} \\ -\tau_{ij} v_j - K \frac{\partial u}{\partial x_i} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

onde,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{U}$  é o vetor de variáveis de campo,  $\mathbf{F}_i$  é o vetor de variáveis de fluxo e  $\mathbf{G}_i$  é o vetor de termos viscosos e de condutibilidade térmica. Nestas expressões,  $v_i$  são as componentes do vetor velocidade;  $\rho$  é a massa específica do fluido;  $p$  é a pressão termodinâmica;  $\tau_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões viscosas;  $e$  e  $u$  são a energia total específica e a energia interna específica, respectivamente;  $K$  é a condutibilidade térmica;  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker;  $\Omega$  é o domínio a ser estudado; e finalmente,  $x_i$  e  $t$  são as coordenadas espaciais e temporal, respectivamente. Para fluidos Newtonianos, as componentes do tensor de tensões são dadas pela seguinte expressão:

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad \text{com } i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade absoluta e  $\lambda$  é o coeficiente de viscosidade volumétrica ( $\lambda = -2\mu/3$  para a hipótese de Stokes).

A equação de estado pode-se escrever como:

$$p = (\gamma - 1) \rho u \quad (4)$$

onde,  $\gamma$  é a relação entre os coeficientes de calor específico a pressão e a volume constante, respectivamente. Convém também expressar a seguinte relação:

$$u = c_v T \quad (5)$$

onde,  $T$  é a temperatura.

Para definir totalmente o problema, deve-se adicionar ao sistema de equações, dado pelas Eq. (1), as condições iniciais e de contorno para as variáveis.

### 3 MÉTODO ADAPTATIVO

A precisão de um esquema numérico pode aumentar notavelmente quando um número fixo de nós da malha é dinamicamente redistribuído apenas para melhorar a região onde acontecem grandes variações na solução. Também, outra vantagem que pode ocorrer é o

aumento da eficiência computacional quando se compara a solução da malha adaptada com uma malha refinada.

A estabilidade na maioria dos esquemas numéricos depende da qualidade da malha, em particular da sua suavidade, portanto, o processo de adaptação da malha não teria que resultar numa excessiva e descontrolada distorção da malha inicial. Com o termo suavidade se pretende indicar que a regularidade da malha, ou seja, o tamanho de um elemento com relação a seus vizinhos não tem que variar bruscamente.

O presente método foi desenvolvido a partir do método variacional apresentado por Brackbill<sup>6</sup>, e o que abrange a parte de otimização está baseado nos trabalhos de Carcaillet<sup>7</sup> e Kennon<sup>8</sup>. A análise de erro esta baseada no trabalho de Ait-Ali-Yahia<sup>9</sup>.

A formulação do método será mostrada para um escoamento bidimensional devido ao fato de poder enxergar mais facilmente o problema, mas o algoritmo foi desenvolvido para problemas tridimensionais.

### 3.1 Considerações teóricas

No método variacional de geração da malha empregado por Brackbill<sup>6</sup>, conseguiu-se o controle da qualidade e adaptação da malha fazendo um mapeamento entre o espaço físico ( $x, y$ ) e o espaço computacional uniformemente discretizado ( $\xi, \eta$ ). As medidas das propriedades do mapeamento sobre a malha computacional propostas no trabalho foram escritas como integrais, sendo as mesmas: a suavidade global do mapeamento, a medida da ortogonalidade do mapeamento e o controle do volume, respetivamente.

A fim de melhorar a eficiência computacional e a confiabilidade, Carcaillet<sup>7</sup> e Kennon<sup>8</sup> adotaram uma formulação mais heurística para o problema de adaptação local.

Considera-se o problema local para a otimização de uma malha computacional a qual está descrita por quatro elementos vizinhos no caso bidimensional (ou oito elementos no caso tridimensional). Utiliza-se uma célula tipo que é definida por todos os elementos que concorrem ao nó  $P_{ij} = P(x_{ij}, y_{ij})$  que é o centro da célula, conforme Fig. 1.

Considera-se que os pontos da malha unem-se por segmentos de linha reta, os quais ficam definidos por vetores posição,  $r$ , que unem o ponto  $P_{ij}$  com os vizinhos imediatos.

A célula tipo é ortogonal se as linhas de coordenadas curvilíneas  $\xi = i = \text{constante}$  e  $\eta = j = \text{constante}$  interceptam  $P_{ij}$  num ângulo reto, conforme Fig. 1. Portanto, a quantidade que resulta em uma medida da ortogonalidade local da célula tipo é determinada pelo produto escalar dos vetores posição que estão associados ao nó central:

$$ORT_{i,j} = (r_{i+1,j} \cdot r_{i,j+1})^2 + (r_{i,j-1} \cdot r_{i+1,j})^2 + (r_{i-1,j} \cdot r_{i,j-1})^2 + (r_{i,j+1} \cdot r_{i-1,j})^2 \quad (6)$$

A célula tipo é suave se existem mudanças mínimas de área (ou volume no caso tridimensional) de uma célula elementar à outra vizinha. A medida que quantifica a suavidade local da malha,  $SM_{i,j}$ , é formada pela soma dos quadrados das diferenças de áreas de um elemento para o próximo:

$$SM_{i,j} = (A_1 - A_2)^2 + (A_2 - A_3)^2 + (A_3 - A_4)^2 + (A_4 - A_1)^2 \quad (7)$$

onde,  $A_k$  é uma medida da área dos  $k$  elementos.

O funcional de controle do volume para a célula tipo é escrito pela fórmula geral:

$$VOC_{i,j} = A_{ij} \cdot W_{i,j} \quad (8)$$

Nesta equação  $A_{ij}$  é a área da célula tipo (ou volume para o caso tridimensional) e  $W_{i,j}$  é uma função de peso (ou função de monitoração) apropriadamente escolhida, que adquire somente valores positivos, e avaliada em  $P_{ij}$ . Facilmente pode-se observar na Eq. (8) que minimizar a soma de todas as células tipo do funcional do volume de controle farão com que a célula tipo diminua sua área (ou volume no caso tridimensional) quando  $W_{i,j}$  é grande e aumente quando  $W_{i,j}$  é pequeno.

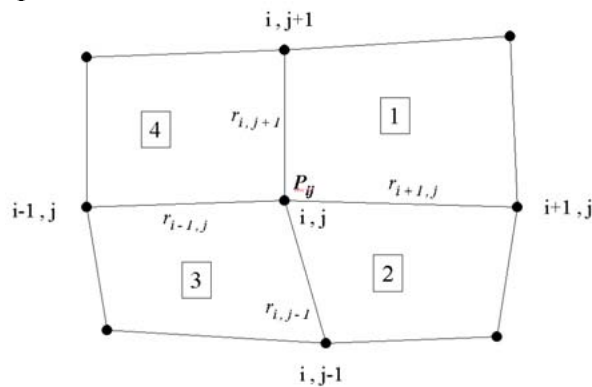


Figura 1: Célula tipo definida para o caso bidimensional

A função objetivo global,  $F$ , obtém-se por uma combinação linear ponderada das medidas da qualidade local da malha e do funcional de controle de volume local para cada célula tipo, de maneira que sobre todas as células tipo ficará:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[ \alpha \cdot \frac{ORT_{i,j}}{ORT_{max}} + (1-\alpha) \frac{SM_{i,j}}{SM_{max}} + \beta \cdot VOC_{i,j} \right], \quad \text{com } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ e } 0 \leq \beta \leq 1 \quad (9)$$

onde,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros de ponderação que permitem controlar a suavidade da malha e ortogonalidade local no caso de otimização estática ( $\beta = 0$ ) ou de adaptação ( $\beta \neq 0$ ). Sendo,  $ORT_{max}$  e  $SM_{max}$  os valores máximos para assegurar que cada medida seja da mesma ordem de magnitude na expressão de  $F$  em Eq. (9).

A função objetivo global pode-se rescrever como função do vetor  $\mathbf{T}$ , contendo as coordenadas físicas de todos os nós da malha e ordenados naturalmente:

$$\mathbf{T} = \left\{ (x_{ij}, y_{ij}) : 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \right\} \quad (10)$$

onde,  $m$  e  $n$  são a quantidade de nós na direção  $i$  e  $j$ , respectivamente. Desta forma, pode-se escrever pela expressão (9),  $F = F(\mathbf{T})$ . A minimização sem restrições da função  $F(\mathbf{T})$ , de  $2 \times m \times n$  variáveis, realiza-se usando o método de gradiente conjugado de Fletcher-Reeves<sup>10</sup>.

Empregou-se para caso tridimensional a medida de suavidade e ortogonalidade proposta por Kennon<sup>8</sup>. A medida de suavidade local está dada pela distância relativa entre o nó da

malha e seus vizinhos, e é apresentada pela seguinte expressão:

$$SM_{i,j,k} = (r_{i+1,j,k} \cdot r_{i+1,j,k}) + (r_{i,j-1,k} \cdot r_{i,j-1,k}) + (r_{i-1,j,k} \cdot r_{i-1,j,k}) + (r_{i,j+1,k} \cdot r_{i,j+1,k}) + (r_{i,j,k+1} \cdot r_{i,j,k+1}) + (r_{i,j,k-1} \cdot r_{i,j,k-1}) \quad (11)$$

enquanto que a medida de ortogonalidade local fica:

$$ORT_{i,j,k} = (r_{i+1,j,k} \cdot r_{i,j+1,k})^2 + (r_{i,j-1,k} \cdot r_{i+1,j,k})^2 + (r_{i-1,j,k} \cdot r_{i,j-1,k})^2 + (r_{i,j+1,k} \cdot r_{i-1,j,k})^2 + (r_{i+1,j,k} \cdot r_{i,j,k-1})^2 + (r_{i,j-1,k} \cdot r_{i,j,k-1})^2 + (r_{i-1,j,k} \cdot r_{i,j,k-1})^2 + (r_{i,j+1,k} \cdot r_{i,j,k-1})^2 + (r_{i+1,j,k} \cdot r_{i,j,k+1})^2 + (r_{i,j-1,k} \cdot r_{i,j,k+1})^2 + (r_{i-1,j,k} \cdot r_{i,j,k+1})^2 + (r_{i,j+1,k} \cdot r_{i,j,k+1})^2 \quad (12)$$

### 3.2 Função de peso

A escolha da função de peso  $W_{ij}$  do funcional de controle de volume é muito importante já que este tem que indicar as regiões onde deve-se fazer a adaptação da malha. Ou seja, desta escolha dependerá a maior ou menor eficiência do método.

Existem alguns fatores que fazem com que atingir a malha ótima seja extremadamente difícil. Alguns destes fatores são:

- O conceito de ótimo está intimamente ligado com a precisão, não tendo uma única definição. Por isso, para definir o ótimo de uma malha necessita-se estabelecer uma norma ou uma medida de erro;
- Finalmente, as estimativas de erro produzidas são baseadas na solução computacional e, portanto, dependerão da mesma.

Em vista destas observações e limitações, desenvolveu-se uma estratégia heurística de adaptação, empregando o critério de erro. Estima-se o erro direcional para o esquema de movimento de malha baseado nos trabalhos de Ait-Ali-Yahia<sup>9,11</sup>.

Devido a que a estimativa de erro somente serve como um indicativo do erro relativo entre malhas sucessivas, aceita-se uma estimativa computacionalmente simples a fim de melhorar a adaptação.

Considera-se um problema unidimensional no qual a solução da variável  $\rho$  é aproximada por  $\rho_h$ , usando uma função de interpolação linear. O erro total sobre o elemento no intervalo  $[0, h_e]$ , determina-se através da raiz média quadrática (*rms*), sendo definido por Peraire<sup>12</sup> como:

$$E_e^{rms} = \frac{1}{\sqrt{120}} h_e^2 \left| \frac{d^2 \rho_h}{dx^2} \right|_e \quad (13)$$

Portanto, o erro de interpolação deste problema unidimensional é proporcional ao produto da derivada segunda e ao quadrado do comprimento característico do elemento  $h_e$ .

Portanto, a malha ótima é definida como a malha na qual a *rms* é equidistribuída sobre todo o elemento, isto é,

$$h_e^2 \left| \frac{d^2 \rho_h}{dx^2} \right|_e = C \quad (14)$$

onde,  $C$  denota uma tolerância especificada pelo usuário (constante e positiva).

A metodologia mostrada acima é estendida para o caso de elementos multidimensionais, devido a que o contorno de cada elemento bidimensional (ou tridimensional) pode ser considerado como um elemento unidimensional. A segunda derivada de  $\rho_h$  é agora considerada com relação a uma direção definida pelo vetor unitário  $V$ , como segue:

$$\frac{\partial^2 \rho_h}{\partial V^2} = V^T H V \quad (15)$$

onde,  $H$  representa a matriz Hessiana de  $\rho_h$ .

Devido a que  $\rho_h$  é linear, a derivada segunda não pode representar-se. Portanto, para restaurar uma estimativa contínua da derivada segunda emprega-se uma formulação fraca<sup>9</sup>, porém combinada com uma massa discreta ou diagonalizada, obtendo-se os valores nodais, seguintes:

$$\frac{\partial^2 \rho_h}{\partial x_j^2} \Big|_I = \frac{\left[ -\int_{\Omega_I} \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} \phi \right) d\Omega \right] \left( \frac{\partial \rho_h}{\partial x_i} \right) + \left[ \int_{\Gamma_I} \phi^T \phi n_j d\Gamma \right] \left( \frac{\partial \rho_h}{\partial x_i} \right)}{\left[ \int_{\Omega_I} \phi^T \phi d\Omega \right]} \quad (16)$$

com  $I$  variando de 1 até  $N_{nos}$  (número total de nós da malha) e  $\phi$  é um vetor contendo as funções de forma,  $\Omega_I$  é a área (ou volume no caso tridimensional) dos elementos que compartilham o nó  $I$ , sendo  $\Gamma_I$  os contornos desses elementos. As derivadas  $\partial \rho_h / \partial x_i$  são os valores nodais da derivada primeira nos elementos considerados, e obtidos através de um processo de suavização baseado no método dos mínimos quadrados.

A matriz  $H$  pode-se diagonalizar da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 \rho_h}{\partial V^2} = V^T H V \quad (17)$$

onde,  $A$  é a matriz diagonal dos valores próprios de  $H$ , e  $R$  é a matriz dos vetores próprios. A transformação  $|A|$  é o valor absoluto das derivadas segundas nas direções dos eixos obtidos por uma rotação de um ângulo  $\alpha$  com respeito aos eixos originais  $x_1$  e  $x_2$ , fazendo corresponder o menor autovalor  $\lambda_1$  com o eixo  $x_I$ . Esta rotação se operacionaliza através da matriz de rotação  $R(\alpha)$  e elimina as derivadas segundas cruzadas.

Devido a que o erro deve ser positivo, a segunda derivada de  $\rho_h$  em qualquer direção é limitada por:

$$\left| \frac{\partial^2 \rho_h}{\partial x^2} \right| = |V^T H V| \leq V^T \bar{H} V \quad (18)$$

onde, a matriz Hessiana modificada  $\bar{H}$  é uma matriz simétrica e positivo definida, que foi obtida considerando os valores absolutos dos autovalores da matriz Hessiana  $H$ , ou seja, que  $\bar{H}$  vem dada por:

$$\bar{H} = R(\alpha) |A| R^T(\alpha) \quad (19)$$

O critério de adaptação unidimensional dado na Eq. (14) pode ser rescrito para um problema bidimensional ou tridimensional como:

$$h_e^2 V^T \bar{H} V = C \quad (20)$$

No método desenvolvido, o erro é equidistribuído sobre o contorno do elemento, onde  $h_e = \|x_j - x_i\|$  representa a medida Eucladiana do comprimento de um elemento de extremidades  $[x_i, x_j]$  e  $V = (x_j - x_i)/h_e$  é o vetor de base unitário. O termo  $V^T \bar{H} V$  na Eq. (20) é definido como a métrica de Riemann.

Portanto, uma malha ótima é definida como aquela na qual o comprimento de todos os contornos na métrica definida é igual a  $\sqrt{C}$ . O princípio de equidistribuição é aplicado para um comprimento  $d$  na métrica de Riemann, lembrando que  $\bar{H}$  é função das coordenadas espaciais, sendo necessário integrar ao longo do comprimento do lado. A estimativa baseada no erro é computada avaliando numericamente a seguinte fórmula para cada contorno da malha:

$$h_e^2 V^T \bar{H} V = C \quad (21)$$

sendo,  $\bar{H}_m$  o valor médio, obtido através dos valores de  $\bar{H}$  nos extremos do contorno considerado. Tem que se notar que o escalar  $d(x_i, x_j)$  representa o erro na direção do contorno do elemento em que é determinado, para mais detalhes ver Bono<sup>13</sup>.

Finalmente, neste trabalho, o funcional  $VOC$  a ser minimizado na função  $F$ , Eq. (9), é definido como  $d^2$  por unidade de volume em lugar da Eq. (8).

#### 4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

A massa específica é a variável empregada para a estimativa do erro em todos os casos analisados. A adaptação sempre inicia-se quando o resíduo tem pouca variação, e uma vez concluído o processo de adaptação, continua-se aplicando o MEF até atingir a convergência final.

As novas coordenadas da malha obtêm-se depois de aplicar um coeficiente de relaxação ( $\theta_x, \theta_y$  e  $\theta_z$ ) nos incrementos  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , para cada uma das direções. Os coeficientes de relaxação variam em um intervalo de 0 a 1 de maneira de evitar excessivos deslocamento dos nós. Os incrementos são determinados pela diferença das coordenadas novas e antigas nas três direções.



Convém mencionar que cada vez que a malha é adaptada, é introduzida na Eq. (1) uma formulação Arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE), calculando-se a componente da velocidade com que os nós da malha se movem, ou seja,  $w_1 = \Delta x / \Delta t$ ,  $w_2 = \Delta y / \Delta t$  e  $w_3 = \Delta z / \Delta t$ .

Em todos os exemplos considerados foram tomados para os parâmetros de ponderação da Eq. (9),  $\alpha = 0,5$  e  $\beta = 1,0$ , respectivamente.

#### 4.1 Escoamento sobre uma rampa

Analisa-se o escoamento supersônico ( $M_\infty = 3$ ), estacionário e não difusivo, através de uma rampa de  $16^\circ$  cuja geometria é mostrada esquematicamente na Fig. 2.

Por se tratar de um problema bidimensional, a malha é formada por apenas um elemento na direção  $z$  e esta formada por 2322 nós e 1092 elementos. O processo de adaptação foi constituído de 8 adaptações, as quais se fazem a cada 900 iterações. Define-se a malha inicial como malha (A) e a malha final como malha (I), sendo cada adaptação intermediária definida pela seqüência das letras. Este procedimento será utilizado em todos os exemplos. Para os coeficientes de relaxação empregou-se  $\theta_x = 0.12$ ,  $\theta_y = 1.0$  e  $\theta_z = 0.0$ . Na Fig. 3, são apresentados os campos de distribuição do número de Mach para a malha inicial (Malha A) e para a malha final (Malha I). Comparando-se ambas as figuras, comprova-se a importância que tem a adaptação da malha no processo de capturar a onda de choque de compressão como também o ângulo correto.

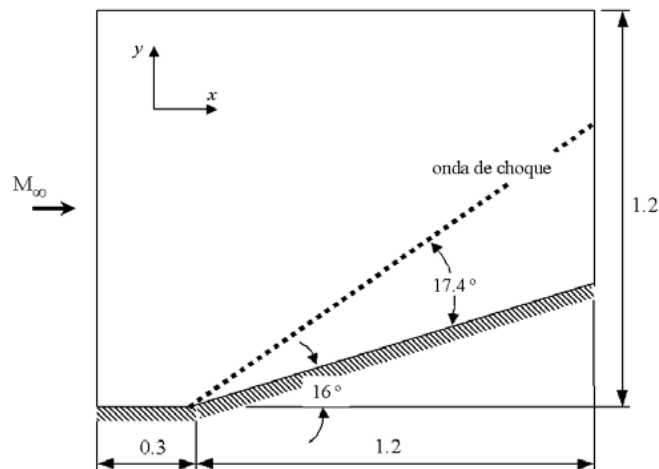


Figura 2: Esquema do escoamento supersônico sobre uma rampa

O gráfico de distribuição da massa específica ao longo da linha  $y = 0.60$  e  $0.0 \leq x \leq 1.20$  é apresentado na Fig. 4. A origem do sistema de eixos coordenados localiza-se no início da rampa.

Finalmente, mostra-se a variação de resíduo, na Fig. 5. O processo de adaptação iniciou-se quando o resíduo começa a ter pouca variação, ou seja, para o passo de tempo igual a 8000. Os picos no resíduo são devido à nova malha obtida depois de cada adaptação. Uma vez concluída a última adaptação, adaptação (I), deixa-se finalmente convergir.

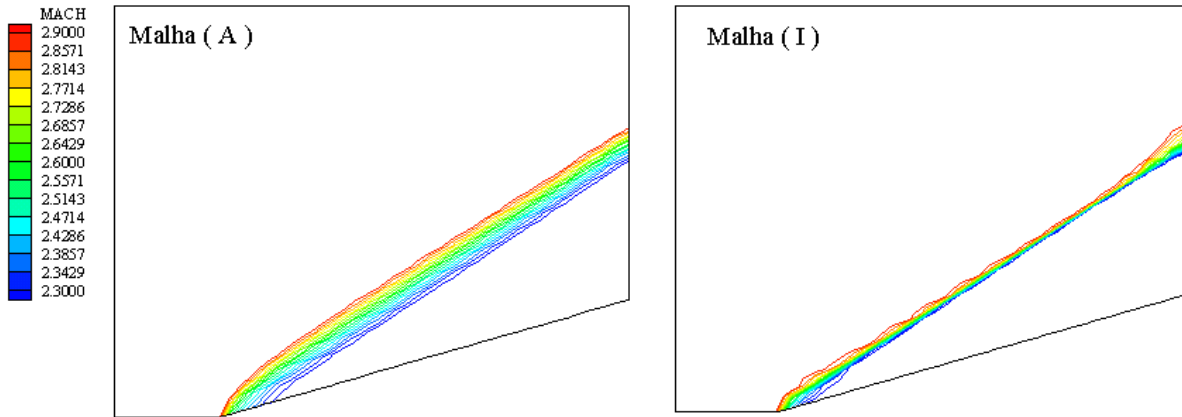


Figura 3: Distribuição do número de Mach para a malha inicial (Malha A) e a malha final (Malha I)

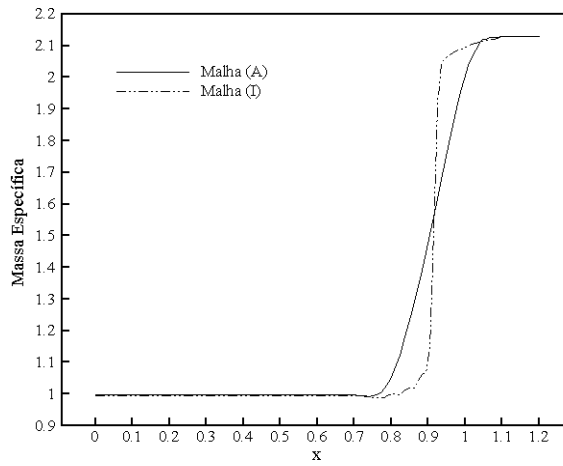


Figura 4: Distribuição da massa específica ao longo de uma linha para a malha inicial e a malha final

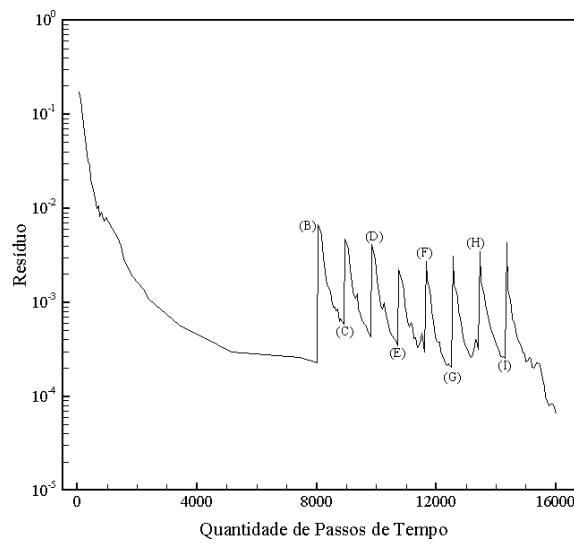


Figura 5: Resíduo para o problema da rampa

## 4.2 Escoamento sobre um degrau

Este exemplo consiste na passagem de um escoamento supersônico ( $M_\infty = 3$ ), não difusivo, por um canal que tem sua seção transversal abruptamente reduzida por um degrau, como mostra-se esquematicamente na Fig. 6.

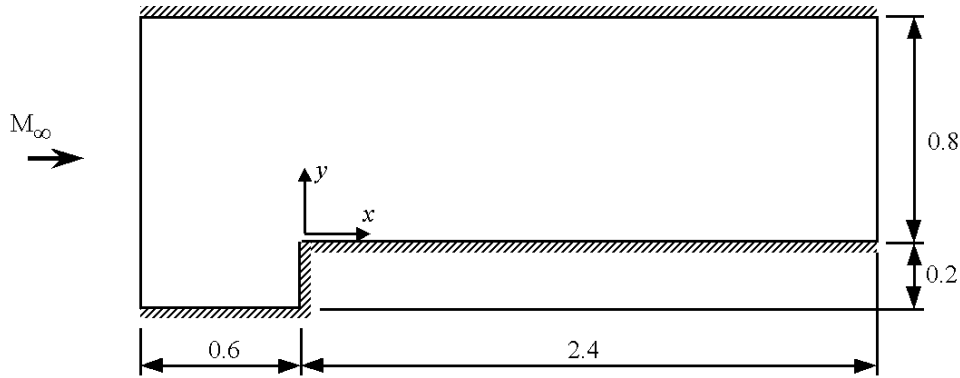


Figura 6: Esquema do escoamento supersônico sobre um degrau

Por ser um problema bidimensional, apenas um elemento na direção  $z$  é empregado, com uma dimensão igual a 0,50. A malha utiliza 8386 nós e 4032 elementos uniformemente distribuídos.

O processo de adaptação foi constituído de 10 adaptações, as quais se fazem a cada 10 iterações, empregando-se  $\theta_x = 0.80$ ,  $\theta_y = 0.80$  e  $\theta_z = 0.0$  como coeficientes de relaxação. Utilizaram-se poucas iterações entre cada adaptação devido ao fato que o problema é transiente, adotando-se um tempo final adimensional igual a  $t = 4.0$ . O processo de adaptação iniciou-se em  $t = 3.94$ .

Na Fig. 7, mostra-se uma comparação da distribuição da massa específica ao longo da linha  $y = 0.40$  e  $-0.40 \leq x \leq 0.40$  para a malha inicial (Malha A) e a malha final (Malha L). Novamente, comprova-se que, com a técnica de adaptação de malha, os resultados melhoram consideravelmente.

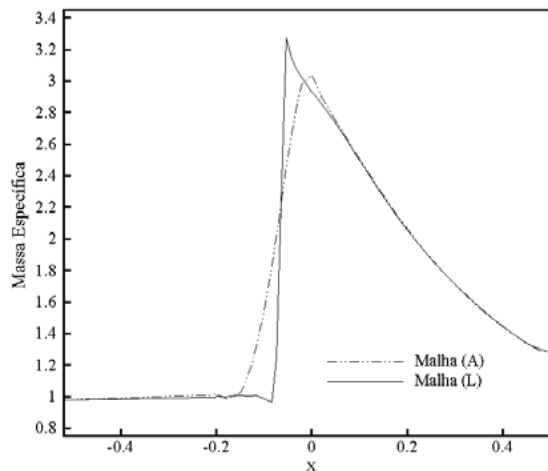


Figura 7: Distribuição da massa específica para a malha inicial (Malha A) e para a malha final (Malha L)

Finalmente, na Fig. 8, apresentam-se duas ampliações na malha final, a fim de verificar a boa qualidade da malha obtida.

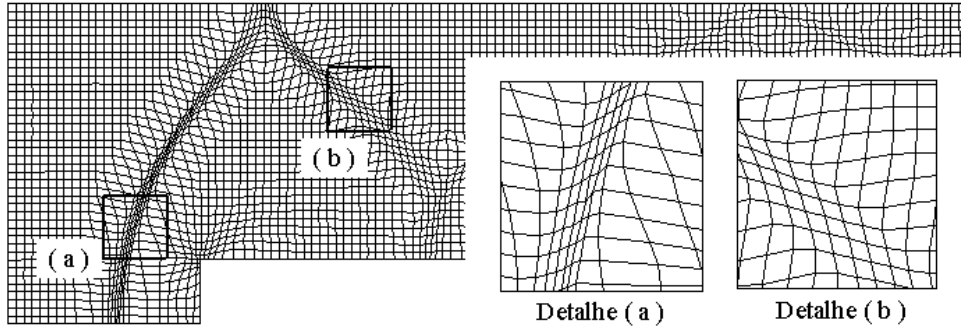


Figura 8: Ampliações de zonas na malha final (Malha L)

### 4.3 Escoamento sobre um aerofólio

Este exemplo consiste na passagem de um escoamento transônico ( $M_\infty = 0.8$ ) compressível, não difusivo, sobre um aerofólio NACA 0012 com o ângulo de ataque da corrente-livre igual a  $\alpha = 1,25^\circ$ . A malha é de tipo C e formada por apenas um elemento na direção  $z$ , por se tratar de um problema bidimensional. A mesma possui 9940 nós e 4800 elementos.

O processo de adaptação foi constituído de 4 adaptações, as quais se fazem a cada 300 iterações, empregando-se  $\theta_x = 0.20$ ,  $\theta_y = 0.01$  e  $\theta_z = 0.0$  para os coeficientes de relaxação.

Na Fig. 9, mostra-se a malha obtida depois de 4 adaptações, Malha (E). A distribuição do número de Mach para a malha inicial (Malha A) e malha final (Malha E) é apresentada na Fig. 10. Convém mencionar que no processo de adaptação, os nós sobre o contorno do aerofólio foram deixados livres.

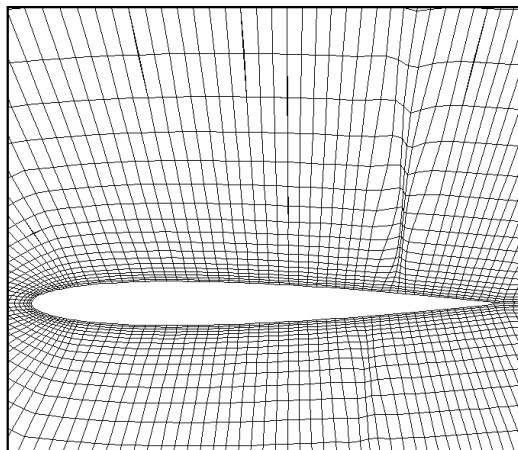


Figura 9: Detalhe da malha final (Malha E)

A distribuição do número de Mach obtida por Baumann<sup>14</sup> é mostrada na Fig. 11. Deve salientar que neste trabalho se fez um refinamento na região onde está localizada a onda de

choque.

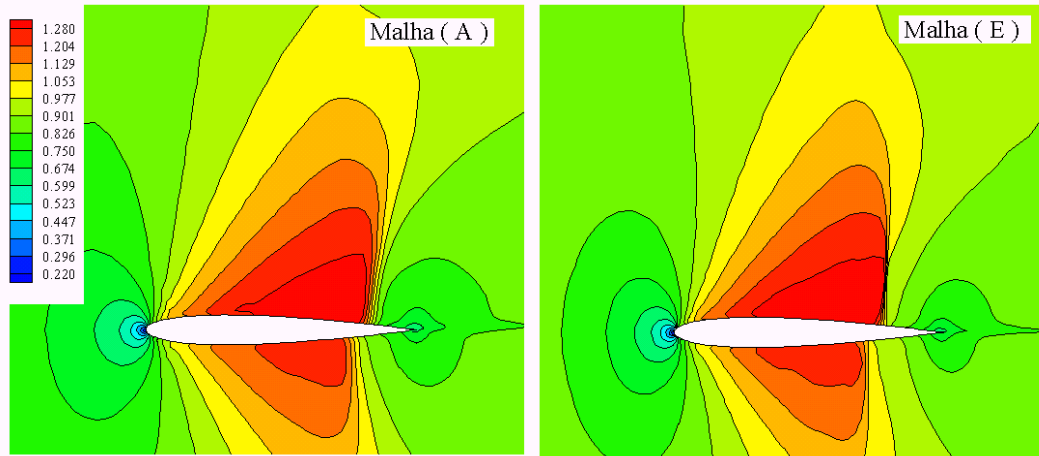


Figura 10: Distribuição de número de Mach na malha inicial, Malha (A), e na malha final, Malha (E)

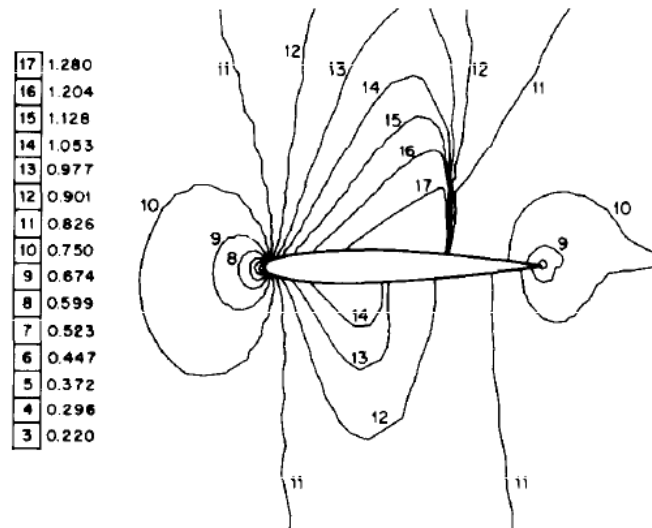


Figura 11: Distribuição do número de Mach, segundo Baumann et al. (1992)

## 5 CONCLUSÕES

Apresenta-se neste trabalho, uma metodologia de adaptação de malhas de elementos finitos para simular escoamentos compressíveis com onda de choque. O método é caracterizado por uma estimativa do erro medida nas arestas dos elementos, e a métrica de Riemann é definida usando o tensor Hessiano. O movimento da malha foi feito mantendo no máximo possível a suavidade e ortogonalidade local.

Os resultados dos exemplos apresentados, tanto em escoamentos com regime transônico como supersônico, são muito bons quando são comparados aos da malha original da qual iniciou-se o processo, portanto mostra-se uma ferramenta muito útil para a análise de

escoamentos com onda de choque.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. Löhner e J. Baum, “Adaptive h-refinement on 3D unstructured grids for transient problems”, *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, **14**, 1407-1419 (1992).
- [2] J. T. Oden; T. Strouboulis e Ph. Devloo, “Adaptative finite element method for high-speed compressible flows”, *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, **7**, 1211-1228 (1987).
- [3] Y. Kallinderis, “Adaptive prismatic/tetrahedral grids”, *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, **20**, 1023-1037 (1995).
- [4] D. F. Hawken, J. J. Gottlieb e J.S. Hansen, “Review of some adaptive node-movement techniques in finite element and finite difference solutions of PDEs”, *J. of Comput. Phys.*, **95**, 254-302 (1994).
- [5] W. Cao, W. Huang e R. D. Russell, “An r-adaptive finite element method based upon moving mesh PDEs”, *J. of Comput. Phys.*, **149**, 221-244 (1999).
- [6] J. U. Brackbill e J. S. Saltzman, “Adaptive zoning for singular problems in two dimensions”, *J. of Comput. Phys.*, **46**, 342-368 (1982).
- [7] R. Carcaillet, G. S. Dulikravich e S. R. Kennon, “Generation of solution-adaptive computational grids using optimization”, *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, **57**, 279-295 (1986).
- [8] S. R. Kennon e G. S. Dulikravich, “Generation of computational grids using optimization”, *AIAA J.*, **24**, 1069-1073 (1986).
- [9] D. Ait-Ali-Yahia; W. G. Habashi e A. Tam, “A directionally adaptive methodology using na edge-based error estimate on quadrilateral grids ”, *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, **23**, 673-690 (1996).
- [10] W. H. Press; S. A. Teukolsky; W. T. Vetterling e B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77 – The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press, New York, USA (1992).
- [11] D. Ait-Ali-Yahia e W. G. Habashi, “Finite element adaptive method for hypersonic thermochemical nonequilibrium flows”, *AIAA J.*, **35**, 1294-1302 (1997).
- [12] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan e O. C. Zienkiewicz, “Adaptive remeshing for compressible flow computations”, *J. of Comput. Phys.*, **72**, 449-466 (1987).
- [13] G. Bono, *Adaptação Via Movimento de Malhas em Escoamentos Compressíveis*, Dissertação de Mestrado, PROMEC, UFRGS, Brasil (2004).
- [14] C. E. Baumann; M. A. Storti e C. Idelsohn, “A Petrov-Galerkin technique for the solution of transonic and supersonic flows”, *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, **95**, 49-70 (1992).