

OPTIMIZACIÓN DE SECCIONES TRANSVERSALES DE PÓRTICOS DE HORMIGÓN ARMADO MEDIANTE USO DE LA TÉCNICA DE PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA SECUENCIAL SQP

José L. Borda Flores, Gabriel Rodríguez

Carrera de Ingeniería Civil, Facultad de Ciencias y Tecnología FCyT, Universidad Mayor de San Simón UMSS, Calle Sucre y Parque La Torre zona Las Cuadras, GEOHIDRA Ingenieros Consultores S.R.L., Av Heroínas O-165, Edif. Alba II, dpto. 2A, Cochabamba, Bolivia, jlb85@gmail.com, gabrrodriguez@gmail.com, <http://www.fcyt.umss.edu.bo>, www.civilumss.edu.bo

Palabras clave: Optimización estructural, pórticos de hormigón armado, minimización, Diseño de Costo Óptimo (DCO), algoritmo SQP.

Resumen. Hasta hace pocos años, el proceso de diseño requería fundamentalmente una gran experiencia por parte del diseñador, quien debía utilizarla en casi todas las etapas del proceso de diseño. Por otro lado, en los últimos años ha cobrado gran impulso una rama de la ingeniería conocida como “optimización estructural”, donde los problemas de diseño se reformulan en base a una o más funciones objetivo. En este trabajo se presenta una metodología para el Diseño de Costo Óptimo (DCO) de pórticos de hormigón armado de edificaciones sometidos a cargas estáticas, basada en los requerimientos de la norma ACI 318 – 08, mediante minimización matemática del costo de la estructura, tomado como la sumatoria de los costos actualizados del hormigón, acero de refuerzo y encofrados, que incluyen porcentajes por impuestos y mano de obra. Para lograr este objetivo se emplea la técnica de Programación Cuadrática Secuencial SQP, para posteriormente hacer la comparación con los resultados obtenidos por un diseño tradicional. El problema de optimización es resuelto con la librería “Optimization Toolbox” del programa computacional MATLAB R2009a, donde se puede acceder a varias técnicas de programación no lineal. Finalmente, se presenta un ejemplo aplicando la técnica SQP, obteniendo soluciones más económicas frente a diseños tradicionales en un 11.73% para vigas simplemente armadas y 31% para columnas cortas, llegando a considerar al Diseño de Costo Óptimo como una alternativa técnica y económicamente viable para proyectos de edificación.

1 INTRODUCCIÓN

Hasta hace unos pocos años, el proceso de diseño requería fundamentalmente una gran experiencia por parte del diseñador, el cual debía utilizarla en casi todas las etapas del proceso de diseño. Según Torrano (2003) el método que se empleaba era el siguiente: el ingeniero definía un diseño inicial cuyo comportamiento era analizado numéricamente; de los resultados de dicho análisis se podían deducir (por experiencia o intuición) los cambios a realizar para mejorar dicho diseño. Se finalizaba el proceso cuando se consideraba que el diseño era lo suficientemente bueno.

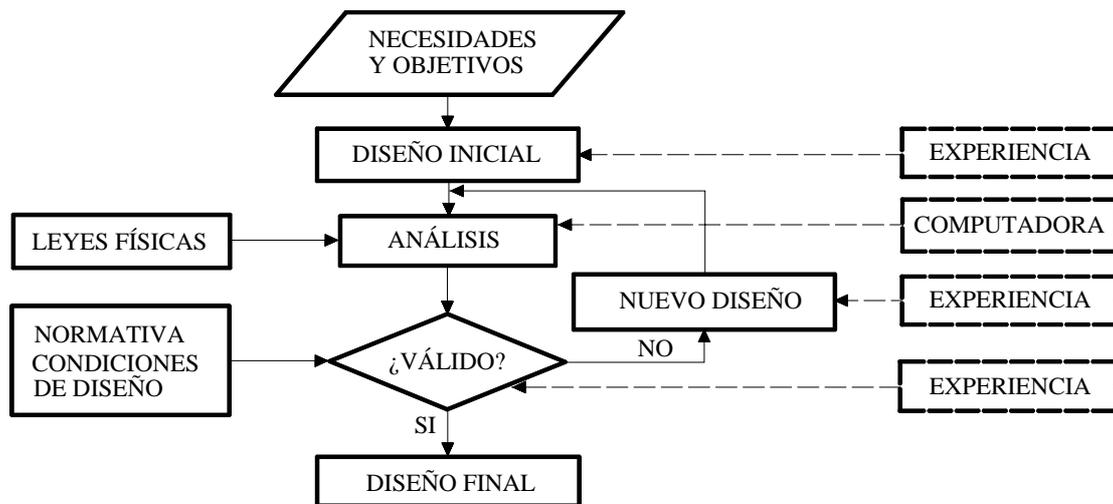


Figura 1: Proceso tradicional de diseño por "Prueba y Error" (Torrano, 2003).

Tal método, denominado de "Prueba y Error" (Figura 1) presentaba el inconveniente de que las modificaciones dependían totalmente de la experiencia del diseñador, lográndose soluciones buenas, pero no las mejores y además, con un alto costo en tiempo por parte del proyectista.

Por otro lado, en los últimos años ha cobrado gran impulso una rama de la ingeniería conocida como "Optimización Estructural", en la cual los problemas de diseño se reformulan en base a una o más funciones objetivo, la cual se quiere minimizar o maximizar, mientras se le sujeta a una serie de restricciones (Figura 2). Técnicas de programación matemática suelen ser la herramienta básica de los ingenieros que trabajan en esta área y un gran número de métodos numéricos y heurísticas se han desarrollado para enfrentar la alta no-linealidad y no-convexidad de los problemas de diseño, que se caracterizan por tener un gran número de mínimos locales.

Tradicionalmente, cae en la experiencia e intuición del proyectista, escoger el proyecto que mejor se adapte a las condiciones exigidas. A pesar de que este proceso se muestra eficaz por la existencia de innumerables estructuras bien planificadas, estas no garantizan una buena alternativa para el proyecto. Muchas veces este trabajo se torna exhaustivo y una limitación de costos principalmente de tiempo, hace que la alternativa escogida no siempre sea la más económica para aquella situación.

La utilización de computadoras hace que la tarea de búsqueda del proyecto óptimo se torne bastante atrayente, de forma que los proyectistas puedan pasar más tiempo dedicándose a la parte de concepción del proyecto, que en si, como depende de mucha creatividad, no podrá ser sustituida por cálculos matemáticos.

El diseño de pórticos de hormigón armado para edificaciones juega un papel primordial en la ingeniería civil boliviana, por su uso tan extendido en nuestro país. Tradicionalmente este proceso se efectúa de forma iterativa tal como ilustra la Figura 1, asumiendo el peso propio de los elementos a los que se les desea diseñar sus secciones. Posteriormente se determinan los esfuerzos resistentes para verificar si corresponden a las solicitaciones aplicadas. Este proceso se repite una y otra vez, gastándose una cantidad considerable de tiempo, hasta que se encuentran las secciones apropiadas.

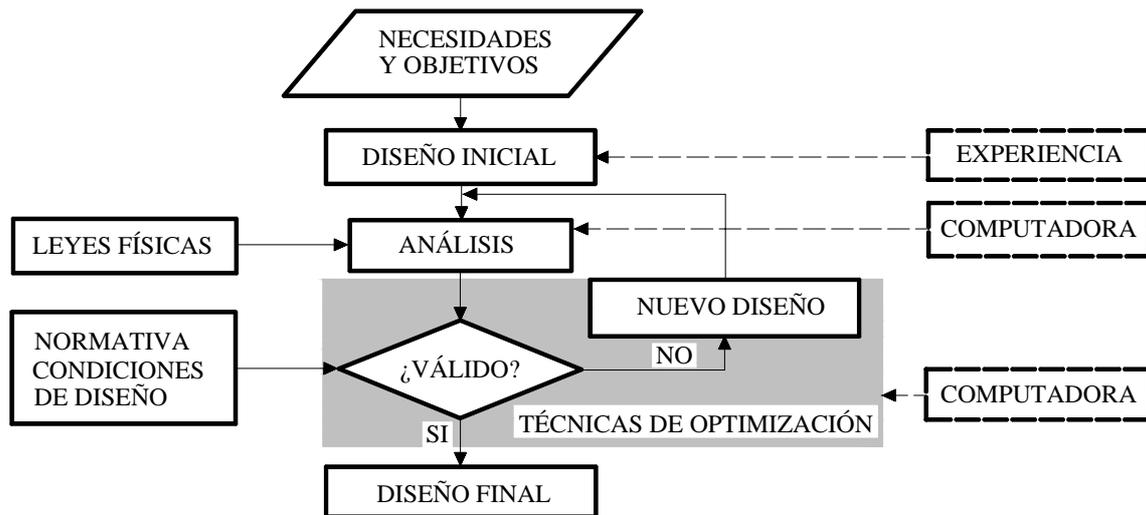


Figura 2: Proceso de diseño óptimo (Torrano, 2003).

En dicho proceso suele ser difícil, por ejemplo, hacer que el momento resistente de la sección de una viga corresponda con el momento total aplicado, incluyendo el producido por el peso propio de la viga, el cual puede ser substancial en muchos casos. De tal forma, el diseño de pórticos no solo es lento, sino que además tiene una carencia total de economía, puesto que lo único que interesa es encontrar cualquier sección que se acomode a las condiciones establecidas, sin siquiera considerar la posibilidad de hacerla lo más barata posible. En el presente trabajo se hará la aplicación del esquema de la Figura 2 al diseño óptimo de secciones y elementos estructurales de pórticos de hormigón armado.

2 LA OPTIMIZACIÓN EN PÓRTICOS DE HORMIGÓN ARMADO

Actualmente de acuerdo con Coelho (2003) el objetivo de un proyecto estructural es encontrar un punto de equilibrio entre la maximización de seguridad y la minimización de costos. Como estos dos conceptos mencionados son contradictorios entre sí, en la práctica se busca una minimización de costos para una estructura que satisfaga los principios básicos de seguridad, así como el respeto de los estados límites de rotura, de servicio y las imposiciones de las normas técnicas. Fácilmente, se puede describir la optimización de un proyecto estructural como la definición de una serie de variables de proyecto que juntas van a extremar una función objetivo dada.

Según Hernández (1990), los esfuerzos realizados en cada uno de los aspectos concernientes a la optimización estructural no han sido idénticos, la mayor parte de los trabajos han ido encaminados a obtener mejores métodos de cálculo y como consecuencia de ello el Ingeniero dispone en la actualidad de métodos muy potentes y sofisticados. Sin embargo el proceso de diseño ha ido avanzando en la misma medida y en buena parte se sigue

realizando del modo tradicional, mediante la aplicación de reglas basadas en la experiencia, que contienen aspectos subjetivos (Figura 1).

Respecto a las edificaciones, la gran mayoría de los artículos publicados tratan sobre vigas. Pocos trabajos representan la optimización de columnas o de pórticos completos, como mencionan Coelho (2003), Torrano (2003) y Coimbra (2006). Cuando la optimización es hecha para pórticos, en casi su totalidad, son para pórticos planos. De acuerdo a los anteriores autores que hicieron una revisión exhaustiva en las últimas cuatro décadas, se publicaron apenas dos artículos que trataban con estructuras en pórtico espacial de hormigón armado.

Al-Salloum y Siddiqi (1994) usaron los multiplicadores de Lagrange para el diseño de costo óptimo de vigas rectangulares de hormigón simplemente armadas. Coello et al. (1995) aplicaron algoritmos genéticos (GA) a la optimización de vigas rectangulares de hormigón armado. Zielinski et al. (1995) desarrollaron un procedimiento para el diseño óptimo de columnas cortas de hormigón armado basado en una función de penalización interna. Torrano y Martí (1997) utilizaron la programación cuadrática para la optimización de secciones de forma arbitraria de hormigón armado mediante el software Disseny. Pirzada et al. (2000) con ayuda de los multiplicadores de Lagrange minimizaron los costos de vigas de hormigón armado sujetas a una sola restricción de resistencia. Martí et al. (2001) recomendaron implementar las técnicas de optimización en la enseñanza de hormigón estructural en los últimos cursos de pregrado, a partir de dos ejemplos de diseño óptimo de secciones y laminas de hormigón armado. Camp et al. (2003) implementaron un procedimiento RC-GA con algoritmos genéticos para la optimización discreta de pórticos de hormigón armado. Elachachi y Djellouli (2004) aplicaron la programación cuadrática secuencial SQP a la optimización paramétrica de estructuras de hormigón armado con ayuda del "Optimization Toolbox" de MATLAB. Andreczewski et al. (2005) propusieron la minimización de costos de secciones transversales de vigas de hormigón armado aplicando el diseño experimental. Rodrigues et al. (2005) utilizaron optimización Multi-nivel para el diseño óptimo de columnas de hormigón armado en edificios altos. Liang (2006) desarrollo un procedimiento para la optimización topológica de uniones viga-columna en pórticos de hormigón armado basado en desempeño de modelos Puntal-tensor. Saini et al. (2006) aplicaron redes neuronales artificiales (ANN) para el diseño óptimo de vigas de hormigón simple y doblemente armadas sometidas a cargas estáticas. Quiroz et al. (2007) usaron redes neuronales para el diseño óptimo de pórticos de hormigón armado sismorresistentes. Fragiadakis y Papadrakakis (2008) formularon una metodología automática basada en análisis por desempeño para el diseño sísmico óptimo de pórticos de hormigón armado. Paya et al. (2008) utilizaron la cristalización simulada (SA) para la minimización del costo de estructuras aperturadas de hormigón armado. Tomás y Martí (2009) optimizaron la cantidad de refuerzo de acero en elementos finitos de placas y cáscaras de hormigón con ayuda del módulo de optimización del software ANSYS. Borda y Rodríguez (2010) aplicaron los algoritmos SQP y de Punto Interior del "Optimization Toolbox" de MATLAB al diseño de costo óptimo de vigas de hormigón simplemente armadas.

3 OBJETIVOS

El objetivo de este trabajo es presentar una metodología para el Diseño de Costo Óptimo (DCO) de pórticos de hormigón armado de edificación sometidos a cargas estáticas, basado en los requerimientos de la norma ACI 318 – 08, mediante minimización matemática del costo estructural de secciones transversales de vigas y columnas, tomados como la sumatoria de los costos actualizados del hormigón, acero de refuerzo y encofrados, que incluyen porcentajes por impuestos y mano de obra.

4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN EN VIGAS

El método de diseño por resistencia basado en el Reglamento ACI 318 – 08 es usado para formular el modelo matemático. El método de diseño por resistencia usa factores de mayoración de cargas que incrementan las cargas de servicio, basados en una evaluación probabilística de la variabilidad de cargas (Pirzada et al., 2000). La estructura es entonces diseñada para proveer la resistencia necesaria para soportar las cargas factoradas. El cálculo de la resistencia toma en cuenta un comportamiento esfuerzo-deformación no lineal del hormigón. La combinación de carga empleada a lo largo de este estudio es (ACI 318 – 08):

$$U = 1.2D + 1.6L. \quad (1)$$

Donde: D y L son los momentos y fuerzas internas correspondientes a cargas muertas y vivas respectivamente (ACI 318 – 08 art. 2.1).

Para este caso, la función objetivo a minimizar es el costo de la viga, que incluye precios unitarios actualizados del hormigón, acero de refuerzo y encofrados. Las restricciones de comportamiento provienen de la resistencia y ductilidad que provee la norma ACI, mientras que las restricciones de borde emanan de los límites prácticos sobre dimensiones de vigas.

4.1 Función objetivo

La función objetivo es la minimización del costo de la viga de hormigón armado por metro lineal, expresada en función a tres variables de diseño: la base de la viga b , la altura total h y el área de refuerzo por flexión A_s , tal que $x_1 = b$, $x_2 = h$ y $x_3 = A_s$. Según Al-Salloum y Siddiqi (1994) y empleando las variables de diseño (Figura 3), la función objetivo es la siguiente:

$$\min F = C_c b h + C_s A_s + C_f (2h + b). \quad (2)$$

Donde:

C_c = costo del hormigón incluyendo mano de obra e impuestos en \$US/cm²/m.

C_s = costo del acero de refuerzo incluyendo mano de obra e impuestos en \$US/cm²/m.

C_f = costo del encofrado incluyendo mano de obra e impuestos en \$US/cm/m.

b , h están en cm. y A_s en cm².

4.2 Restricciones de comportamiento del reglamento ACI 318 – 08

Para cuantías pequeñas de acero en la sección, este alcanzara su esfuerzo de fluencia f_y , antes que el hormigón alcance su resistencia máxima. Bajo la hipótesis de un comportamiento elástico perfectamente plástico del acero de refuerzo, la fuerza de tracción en la fibra inferior se mantiene constante en el valor $A_s f_y$, para cualquier incremento de carga en el elemento (Figura 3). Por lo tanto, la resistencia a la flexión de una sección de viga simplemente armada de acuerdo a los requisitos de la norma ACI requiere que el momento resistente máximo movilizado sea mayor o igual al momento último correspondiente a las cargas muertas y vivas (Córdova, 2004 y Morales, 2006):

$$\begin{aligned} \phi M_n = \phi A_s f_y d \left(1 - 0.59 \frac{A_s f_y}{b d f'_c} \right) &\geq M_u, \\ M_u - \phi A_s f_y d \left(1 - 0.59 \frac{A_s f_y}{b d f'_c} \right) &\leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Donde M_u es el momento último en Kgf-cm. de la sección, d es el canto útil de la viga en

cm. y ϕ es el factor de reducción de resistencia del reglamento ACI.

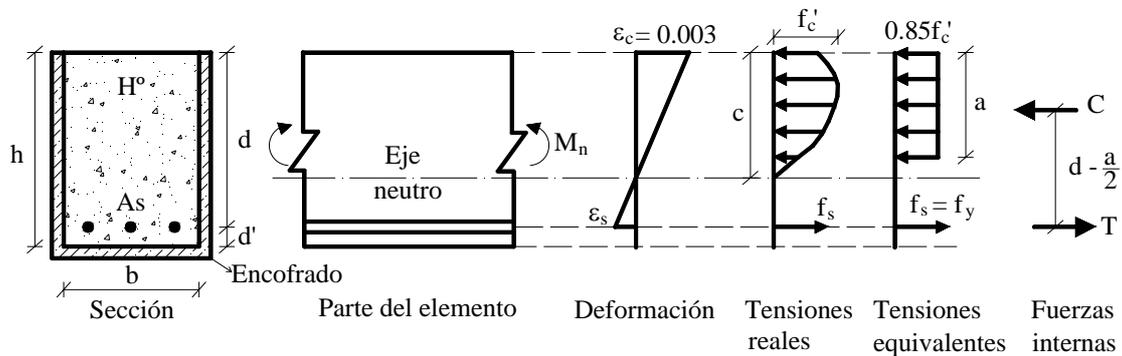


Figura 3: Análisis de una sección rectangular simplemente armada.

f'_c es la resistencia característica a los 28 días del hormigón en Kgf/cm^2 y f_y la tensión de fluencia del acero en Kgf/cm^2 . La expresión (3) después de reordenarla y simplificarla en función de las variables de diseño, produce la restricción de resistencia a flexión:

$$g_1 = 0.59\phi \frac{f_y^2}{bf'_c} - \phi Asf_y (h - d') + M_u \leq 0. \quad (4)$$

Donde d' es la altura de cobertura al centro de gravedad de la armadura en tracción, se puede tomar como valores estimados (Córdova, 2004): 6.5 cm. para vigas con una fila de aceros y 9 cm. para vigas con dos filas de aceros.

Los requerimientos de ductilidad del reglamento ACI limitan la cuantía de acero $\rho = As/bd$ a valores superiores e inferiores de ρ_{\max} y ρ_{\min} , respectivamente. El art. 10.5.1 del ACI 318 – 2008 limita la cuantía mínima de acero para elementos sometidos a flexión a:

$$\rho_{\min} = \frac{0.8\sqrt{f'_c}}{f_y} \geq \frac{14}{f_y}. \quad (5)$$

La restricción de límite inferior de refuerzo puede ser escrita en función de las variables de diseño (Figura 3) como:

$$g_2 = \rho_{\min} b(h - d') - As \leq 0. \quad (6)$$

De acuerdo al art. 10.3.5 del ACI 318 – 08, para elementos no preesforzados en flexión y elementos no preesforzados con carga axial mayorada de compresión menor a $0.10f'_c bh$, la deformación unitaria neta en tracción ϵ_t en estado de resistencia nominal no debe ser menor a 0.004. A partir de esta condición se obtiene la cuantía máxima:

$$\rho_{\max} = \frac{3}{7} 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}. \quad (7)$$

Donde ρ_{\max} es la cuantía de acero máxima según ACI 318 – 08, β_1 es el coeficiente que relaciona la profundidad del bloque de esfuerzos equivalente rectangular con la profundidad del eje neutro. Según ACI 318 – 08 art. 10.2.7.3, β_1 es igual a 0.85 si $f'_c \leq 280 \text{ Kgf/cm}^2$ y disminuye en 0.05 por cada 70 Kgf/cm^2 de aumento de f'_c , pero en general $0.65 \leq \beta_1 \leq 0.85$.

La restricción de límite superior de área de acero se puede escribir en función de las variables de diseño (Figura 3) como:

$$g_3 = A_s - 0.3643 \beta_1 \frac{f_c'}{f_y} b (h - d') \leq 0. \quad (8)$$

Según el ACI 318 – 08 art. 21.5.1.3 el ancho del elemento b , no debe ser menor que el más pequeño de $0.3h$ y 25 cm. Se toma el primero para generar la restricción de la relación de ancho y alto:

$$b > 0.3h. \quad (9)$$

Reordenando (9) se tiene:

$$g_4 = 0.3 - \frac{b}{h} \leq 0. \quad (10)$$

Las restricciones anteriores son de tipo explícito. Se plantea una última de tipo implícito para verificar el factor de resistencia ϕ . Las ediciones anteriores del reglamento ACI establecían un valor de $\phi = 0.9$ para secciones controladas por tracción. Desde la edición del 2005 se debe hacer la verificación respectiva si se asume este valor.

De acuerdo a la fig. R9.3.2 y el art. 10.3.4 del ACI, las secciones son controladas por tracción si la deformación unitaria neta de tracción en el refuerzo de acero extremo en tracción ε_t , es igual o mayor a 0.005 justo cuando el hormigón en compresión alcanza su límite de deformación unitaria asumido de 0.003. Todo esto se puede escribir como:

$$g_5 = \varepsilon_t = 0.003 \left(\frac{d - c}{c} \right) \geq 0.005, \quad (11)$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c' b},$$

$$c = \frac{a}{\beta_1}.$$

Donde: a es la profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos en cm. y c es la distancia de la línea neutra a la última fibra en compresión en cm. Los valores ϕ y ε_t están en función de h y A_s , por lo que la restricción g_5 no es usada para encontrar las dimensiones óptimas. Con los valores del Diseño de Costo Óptimo (DCO) se hace la verificación si $\varepsilon_t \geq 0.005$, para comprobar que el valor asumido de $\phi = 0.9$ sea el correcto.

4.3 Restricciones de borde

Este tipo de restricciones establece límites inferiores y superiores de las variables de diseño. En el caso de la variable A_s , los límites están dados por las restricciones g_2 y g_3 , por lo cual en la implementación final las condiciones de borde estarán dadas por $-\infty$ y $+\infty$.

Al contrario para las variables b y h , se deben establecer los límites o bordes. Una forma práctica para imponer estas condiciones es siguiendo los lineamientos de la norma ACI, que en su art. 9.5.2.1 establece las alturas mínimas h_{min} en la tabla 9.5 (a) para vigas con distintas condiciones de apoyo. Por otro lado, el art. 21.5.1.3 del ACI limita la dimensión b a un valor mínimo de 25 cm. Los valores superiores pueden ser provistos con criterio práctico, por ejemplo limitando la base b a un valor máximo igual a 60 cm. y la altura h a 120 cm. Entonces se tienen los siguientes bordes:

$$\begin{aligned} 25 \text{ cm.} \leq b \leq 60 \text{ cm.}, \\ L/p \leq h \leq 120 \text{ cm.} \end{aligned} \quad (12)$$

Donde: L es la luz de la viga en cm. y p es un coeficiente que depende de las condiciones de apoyo que se establece en la tabla 9.5 (a) del ACI.

5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN EN COLUMNAS

En general, una columna es un elemento vertical cuya función principal es la de transmitir todas las cargas (esfuerzos normales de compresión, momentos flectores, etc.) de la estructura hacia las fundaciones. La sección transversal de una columna puede ser cuadrada, rectangular, circular o de otra forma, siendo en general sus dimensiones mucho menores a su altura.

En columnas esbeltas, donde la capacidad resistente de la columna se ve significativamente disminuida por la presencia de momentos flectores, se debe considerar en el análisis y diseño de las mismas, los efectos de segundo orden (pandeo). En la mayoría de las estructuras, las columnas son lo suficientemente robustas o se encuentran arriostradas de tal manera que los efectos de segundo orden, también llamados efectos P- Δ , pueden ser despreciados.

El método de diseño por resistencia basado en el Reglamento ACI 318 – 08 es usado para formular el modelo matemático. El cálculo de la resistencia toma en cuenta también un comportamiento esfuerzo-deformación no lineal del hormigón. Las combinaciones de carga empleadas para este caso, además de (1) son (ACI 318 – 08 art. 9.2.1):

$$U = 1.2D + 1.0L + 1.6W, \quad (13)$$

$$U = 0.9D + 1.6W. \quad (14)$$

Donde: D , L y W son los momentos y fuerzas internas correspondientes a cargas muertas, vivas y por viento respectivamente (ACI 318 – 08 art. 2.1).

5.1 Función objetivo

La función objetivo es la minimización del costo de la columna de hormigón armado por metro lineal, expresada en función a cuatro variables de diseño: la base b , la altura total h , el área de refuerzo en tracción A_s y el área de refuerzo en compresión A_s' . De acuerdo con Zielinski et al. (1995) y empleando las variables de diseño (Figura 4), la función objetivo es la siguiente:

$$\min F = C_c b h + C_s (A_s + A_s') + 2C_f (h + b). \quad (15)$$

Donde:

C_c = costo del hormigón incluyendo mano de obra e impuestos en \$US/cm²/m.

C_s = costo del acero de refuerzo incluyendo mano de obra e impuestos en \$US/cm²/m.

C_f = costo del encofrado incluyendo mano de obra e impuestos en \$US/cm/m.

b , h están en cm., A_s y A_s' en cm².

Para simplificar el cálculo y por facilidades constructivas es recomendable disponer de armado simétrico en las caras de tracción y compresión (Zielinski et al., 1995; Cordova, 2004 y Morales, 2006) por lo cual $x_3 = A_s = A_s'$, siendo la nueva función objetivo:

$$\min F = C_c b h + 2C_s A_s + 2C_f (h + b). \quad (16)$$

5.2 Restricciones de comportamiento del reglamento ACI 318 – 08

La carga axial última P_u no debe tomarse mayor que la resistencia axial de diseño máxima ϕP_{nmax} . Para elementos no preesforzados con estribos es provista por el art. 10.3.6.2 del ACI 318 – 08 siendo:

$$\begin{aligned} \phi P_{nmax} &= 0.8\phi [0.85 f'_c (A_g - A_{s_t}) + A_{s_t} f_y] \geq P_u, \\ P_u - 0.8\phi [0.85 f'_c (A_g - A_{s_t}) + A_{s_t} f_y] &\leq 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Donde $A_g = bh$ es el área bruta de la sección en cm^2 ; $A_{s_t} = A_s + A_{s'}$ es el área total del refuerzo longitudinal no preesforzado en cm^2 , f'_c es la resistencia característica a los 28 días del hormigón en Kg/cm^2 y f_y la tensión de fluencia del acero en Kg/cm^2 . Para simplificar el cálculo y por motivos constructivos, se usa el mismo artificio anterior, disponiendo de armado simétrico ($A_s = A_{s'}$), obteniendo la restricción de resistencia axial (Borda, 2010):

$$g_1 = 1.36\phi f'_c A_s - 1.36\phi f_y A_s - 0.68\phi f'_c bh + P_u \leq 0 \tag{18}$$

La flexión se produce porque hay un momento flector actuante, o si la carga axial actuante es excéntrica. La excentricidad “e” es: $e = M/P$; donde P es la carga axial actuante en el centroide plástico de la sección y M el momento actuante total. En la Figura 4 se tiene un posible estado de esfuerzos del hormigón y fuerzas del acero en el estado de falla.

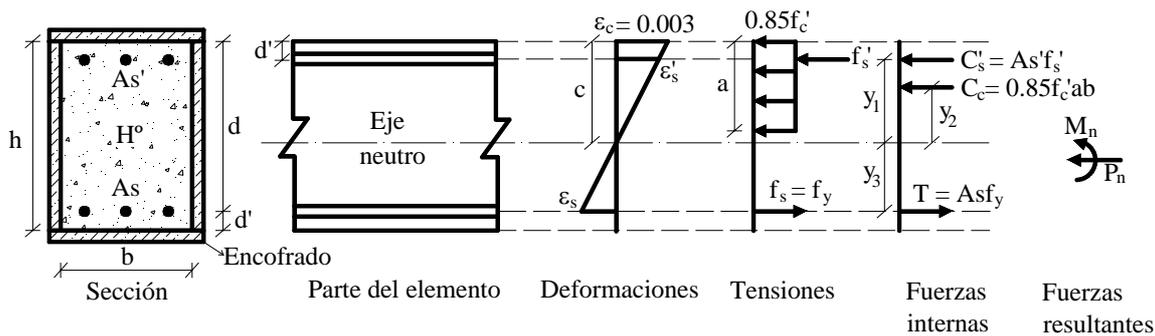


Figura 4: Análisis de una columna corta de sección rectangular.

Por lo tanto, la resistencia a la flexión de una sección de columna cargada uniaxialmente de acuerdo a los requisitos de la norma ACI es (Córdova, 2004 y Morales, 2006):

$$\begin{aligned} \phi M_n &= \phi \left[A_{s'} f'_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) + 0.85 f'_c \beta_1 c b \left(\frac{h}{2} - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + A_s f_y \left(\frac{h}{2} - d' \right) \right] \geq M_u, \\ M_u - \phi \left[A_{s'} f'_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) + 0.85 f'_c \beta_1 c b \left(\frac{h}{2} - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + A_s f_y \left(\frac{h}{2} - d' \right) \right] &\leq 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Para columnas cargadas uniaxialmente, las variables de diseño en la formulación general usando las dimensiones y fuerzas de la Figura 4 serían: la base de la columna b , la altura h , el área de acero de refuerzo en tracción A_s , el área de refuerzo en compresión $A_{s'}$; mientras que la distancia desde la fibra superior en compresión hasta la línea neutra c y el esfuerzo en el acero en compresión f'_s dependen de las cuatro anteriores tal que $x_1 = b$, $x_2 = h$, $x_3 = A_s$, $x_4 = A_{s'}$, $x_5 = c$ y $x_6 = f'_s$.

Usando el criterio anterior para simplificar el cálculo, los aceros en tracción y compresión entran en fluencia por lo que $f'_s = f_y$ y disponiendo también armado simétrico $A_s = A_{s'}$, se tiene el caso especial tomando equilibrio de fuerzas según las variables de diseño (Figura 4):

$$\begin{aligned} P_n &= 0.85 f_c' ab + Asf_y - Asf_y, \\ P_u &= 0.85 \phi f_c' ab. \end{aligned} \quad (20)$$

Donde a es la profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos en cm., despejando el valor de a se obtiene una solución inicial para c :

$$\begin{aligned} a &= \frac{P_u}{0.85 \phi f_c' b}, \\ \text{y además } c &= \frac{a}{\beta_1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Esta aproximación reduce el problema de optimización a uno de tres variables en lugar de seis, cuya función objetivo es igual a (16). Reordenando (19) en función de las variables b , h y As se obtiene la restricción de resistencia a flexión uniaxial (Borda, 2010):

$$g_2 = 0.425 \phi f_c' a^2 b - 0.425 \phi f_c' abh + 2 \phi d' f_y As - \phi f_y h As + M_u \leq 0 \quad (22)$$

Donde d' es la altura de cobertura al centro de gravedad de las armaduras longitudinales en cm., se puede tomar como valor estimado (Córdova, 2004) 6.5 cm. para una fila de aceros. Según ACI 318 – 08 art. 10.2.7.3, β_1 equivale a 0.85 si $f_c' \leq 280 \text{ Kg/cm}^2$ y disminuye en 0.05 por cada 70 Kg/cm^2 de aumento de f_c' , pero en general $0.65 \leq \beta_1 \leq 0.85$.

Los requerimientos de ductilidad del reglamento ACI limitan la cuantía de acero $\rho = As/bd$ a valores superiores e inferiores de ρ_{\max} y ρ_{\min} , respectivamente. El art. 10.9.1 del ACI 318 – 2008 limita la cuantía mínima de acero para elementos no compuestos a compresión a un valor de 0.01. La restricción de límite inferior de refuerzo puede ser escrita en función de las variables de diseño (Figura 4) tomando $As = As'$, como:

$$\begin{aligned} As_t &\geq As_{\min}, \\ g_3 &= 0.01bh - 2As \leq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Por otro lado el art. 10.9.1 del ACI 318 – 2008 también limita la cuantía máxima de acero para elementos no compuestos a compresión a un valor de 0.08, por lo cual la restricción de límite superior de refuerzo puede ser escrita en función de las variables de diseño (Figura 4) haciendo también $As = As'$, como:

$$\begin{aligned} As_t &\leq As_{\max}, \\ g_4 &= 2As - 0.08bh \leq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Según el art. 21.6.1.2 del ACI 318 – 08 la relación entre la dimensión menor de la sección transversal y la dimensión perpendicular no debe ser menor que 0.4, expresándose de la siguiente forma:

$$\frac{b}{h} \geq 0.4. \quad (25)$$

Reordenando (25) se genera la restricción de la relación de ancho y alto:

$$g_5 = 0.4 - \frac{b}{h} \leq 0. \quad (26)$$

Hasta aquí se han tomado todas las consideraciones necesarias para diseño de columnas cortas cargadas de forma uniaxial. Pero por otro lado se hace una última consideración para

limitar los efectos de pandeo que se puedan presentar sobre todo en columnas de plantas bajas en edificaciones de mediana altura. Para esto se limita la relación de esbeltez a (Córdova, 2004 y Borda, 2010):

$$\frac{kl_u}{r} \leq 28. \quad (27)$$

Donde k es el factor de longitud efectiva para elementos en compresión, l_u es la longitud sin soporte lateral en cm. y r el radio de giro de la sección en cm. El factor k en general esta en el rango $0.8 \leq k \leq 1$, pero se puede tomar un valor de 0.9 para estructuras arriostradas. Mientras el art. 10.10.1.2 del ACI 318 – 08 recomienda que r se pueda tomar igual a $0.3h$ para el caso de elementos rectangulares. Reemplazando estos valores en (27) se obtiene la restricción de esbeltez simplificada para columnas cortas:

$$\begin{aligned} \frac{l_u}{r} &\leq 9.33, \\ g_6 = \frac{l_u}{r} - 9.33 &\leq 0. \end{aligned} \quad (28)$$

De acuerdo a la sección 9.3.2.2 del ACI 318 – 08, el factor de resistencia ϕ no es constante y depende de la carga axial, este parámetro afecta tanto al momento nominal como a la carga axial de la columna. Por lo tanto si $P_u \geq 0.10f_c'A_g$ se tiene que $\phi = 0.65$ para columnas reforzadas con estribos. En caso de que $P_u < 0.10f_c'A_g$ se debe hacer una interpolación lineal entre 0.65 y 0.9 para obtener el valor de ϕ . Finalmente si $P_u = 0$ se tiene $\phi = 0.9$ que es el caso de flexión pura.

5.3 Restricciones de borde

Este tipo de restricciones establece límites inferiores y superiores de las variables de diseño. En el caso de las variables As y As' , los límites están dados por las restricciones g_3 y g_4 , por lo cual en la implementación final las condiciones de borde estarán dadas por $-\infty$ y $+\infty$.

Para las variables b y h , se deben establecer los límites inferiores y superiores. La norma ACI 318 – 08 en su art. 21.6.1.1 limita la dimensión b a un valor mínimo de 30 cm. en condiciones sísmicas para elementos sometidos a flexión y carga axial pertenecientes a pórticos resistentes a momento. Por otro lado en la práctica constructiva boliviana se usa una sección mínima de $25 \times 25 \text{ cm}^2$ para h y b , sobre todo para los últimos pisos en edificaciones de pequeña y mediana altura. Por otro lado, los valores superiores pueden ser provistos con criterio práctico, por ejemplo limitando la base b a un valor máximo igual a 150 cm. y la altura h a 300 cm. Entonces se tienen los siguientes bordes:

$$\begin{aligned} 30 \text{ cm.} &\leq b \leq 150 \text{ cm.}, \\ 30 \text{ cm.} &\leq h \leq 300 \text{ cm.} \end{aligned} \quad (29)$$

Finalmente para proporcionar una solución inicial, se puede hacer un predimensionado rápido usando la relación propuesta por Morales (2006):

$$bh = \frac{PN}{nf_c'} \quad (30)$$

Donde: P es la carga total de servicio que soporta la columna en Kgf.; n es un valor que depende si la columna es central, lateral o de esquina (Morales, 2006) y N es el número de

pisos sobre la columna considerada.

6 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

El diseño de estructuras es un proceso iterativo en el que se busca, ensayando distintas soluciones, la estructura de menor costo posible que cumple con unos requerimientos de seguridad. La experiencia y la intuición del ingeniero son fundamentales para la obtención de un buen diseño, difícilmente el mejor. Cuando el problema de diseño de estructuras se convierte en encontrar el mejor diseño técnico y económico se habla de diseño óptimo de estructuras (Torrano y Martí, 1997).

Las técnicas de optimización son usadas para encontrar los valores de las variables o de los parámetros de diseño, $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, que de algún modo pueda ser definido como óptimo. Un caso simple puede ser la maximización o minimización de algún sistema característico que depende de x . En una formulación más avanzada la función objetivo $f(x)$ a ser minimizada o maximizada, podría ser sujeta a restricciones en la forma de restricciones de igualdad $G_i(x) = 0$; restricciones de desigualdad $G_i(x) \leq 0$ y restricciones de borde, x_l y x_u . Por lo tanto, el problema general puede ser formulado como:

$$\min_x f(x), \quad (31)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} G_i(x) &= 0 \quad i = 1, \dots, m_e, \\ G_i(x) &\leq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (32)$$

Donde x es el vector de parámetros de diseño de tamaño n , $f(x)$ es la función objetivo cuyo resultado es un valor escalar y el vector $G(x)$ retorna un vector de longitud m que contiene los valores de las restricciones de igualdad y desigualdad evaluadas en x .

Una solución eficiente y precisa para este problema no solo depende del tamaño del problema en términos de variables de diseño y restricciones, sino también de las características de la función objetivo y de las restricciones. Cuando la función objetivo y las restricciones son funciones lineales de las variables de diseño, el problema es conocido como un problema de programación lineal (LP). Por otra parte, la Programación Cuadrática (QP) concierne a la minimización o maximización de una función objetivo cuadrática que es linealmente restringida. Para ambos problemas existen procedimientos disponibles de solución confiable. Lo más dificultoso de resolver es un problema de Programación No Lineal (NP) en el cual la función objetivo y las restricciones pueden ser funciones no lineales de las variables de diseño. Una solución para un problema NP requiere generalmente un proceso iterativo para establecer una dirección de búsqueda en cada iteración sucesiva. Esta solución es alcanzada usualmente por resolución de una programación lineal, una programación cuadrática o un subproblema no restringido.

6.1 Algoritmo de Programación Cuadrática Secuencial (SQP)

El método de Programación Cuadrática Secuencial SQP es denominado así, ya que resuelve un subproblema QP en cada iteración sucesiva. El método también es conocido como Programación Cuadrática Iterativa, Programación Cuadrática Recursiva o Métodos de la Métrica Variable Restringidos. De acuerdo a Elachachi y Djellouli (2004), Matworks Inc. (2009) y Borda (2010) el método SQP representa el estado del arte en métodos de programación no lineal. Basado en los trabajos de Biggs, Han y Powell (Ravindran et al., 2006), el método permite imitar estrechamente al método de Newton para optimización

restringida justo como se hace para optimización no restringida. En cada iteración sucesiva, se hace una aproximación de la matriz Hessiana de la función Lagrangiana usando un método de actualización quasi-Newton. Este es usado para generar un subproblema QP cuya solución es usada para formar una dirección de búsqueda por un procedimiento de búsqueda lineal.

Dado el problema descrito en (31) y (32) la idea principal es la formulación de un subproblema QP basado en una aproximación cuadrática de la función de Lagrange:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x). \quad (33)$$

Simplificando el problema general dado en (31) y (32) y asumiendo que ambas restricciones han sido expresadas como restricciones de desigualdad, se obtiene un subproblema QP linerizando las restricciones no lineales.

El subproblema de programación cuadrática QP puede ser planteado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min_{d \in \mathbb{R}^n} & \frac{1}{2} d^T H_k d + \nabla f(x_k)^T d, \\ & \nabla g_i(x_k)^T d + g_i(x_k) = 0, \quad i = 1, \dots, m_e, \\ & \nabla g_i(x_k)^T d + g_i(x_k) \leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (34)$$

Donde el operador ∇ indica el gradiente la función dada, y d es la diferencia entre dos puntos solución sucesivos.

Este subproblema puede ser resuelto usando cualquier algoritmo QP (Ravindran et al., 2006; Taha, 1998 y Armitano et al., 1985). La solución es usada para formar una nueva iteración:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (35)$$

El parámetro de tamaño de paso α_k es determinado por un procedimiento apropiado de búsqueda lineal de modo que un decremento suficiente es obtenido en una función de merito. La matriz H_k es una aproximación definida positiva de la matriz Hessiana de la función de Lagrange (33). H_k puede ser actualizada por cualquiera de los métodos quasi-Newton, aunque el método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno BFGS es el más usado (Ravindran et al., 2006).

Un problema restringido no linealmente puede ser a menudo resuelto en menos iteraciones que un problema no restringido usando el algoritmo SQP. Una de las razones para esto, es que debido a los límites del área factible, el optimizador puede tomar decisiones respecto a las direcciones de búsqueda y tamaño del paso.

La implementación SQP consiste de tres etapas principales: actualización de la matriz Hessiana, solución de la programación cuadrática, búsqueda lineal y evaluación de la función de merito.

* **Actualización de la Matriz Hessiana:** en cada iteración sucesiva se calcula una aproximación quasi-Newton del Hessiano de la función Lagrangiana H , usando el método BFGS, donde λ_i ($i = 1, \dots, m$) es un estimado de los multiplicadores de Lagrange.

$$H_{k+1} = H_k + \frac{q_k q_k^T}{q_k^T s_k} - \frac{H_k^T s_k s_k^T H_k}{s_k^T H_k s_k}, \quad (36)$$

Donde:

$$s_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$q_k = \left(\nabla f(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x_{k+1}) \right) - \left(\nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x_k) \right). \quad (37)$$

Es recomendable mantener el Hessiano definido positivo igual aunque puede ser indefinido positivo en el punto solución (Ravindran et al., 2006). El Hessiano definido positivo se mantiene procurando que $q_k^T s_k$ sea positivo en cada actualización y que H sea inicializado con una matriz definida positiva. Cuando $q_k^T s_k$ no es positivo, q_k es modificado elemento a elemento tal que $q_k^T s_k > 0$. El objetivo general de esta modificación es para deformar los elementos de q_k , lo cual contribuye a una actualización definida positiva, tan pequeña como sea posible. Por lo tanto, en la fase inicial de la modificación, el elemento más negativo de $q_k^* s_k$ es repetidamente reducido a la mitad. Este procedimiento se continúa hasta que $q_k^T s_k$ es mayor o igual a una tolerancia negativa pequeña. Si, después de este procedimiento, $q_k^T s_k$ es aun no negativo, se modifica q_k adicionando un vector v multiplicando por un escalar constante w , esto es:

$$q_k = q_k + wv, \quad (38)$$

Donde:

$$v_i = \nabla g_i(x_{k+1}) \cdot g_i(x_{k+1}) - \nabla g_i(x_k) \cdot g_i(x_k),$$

$$si (q_k)_i \cdot w < 0 \text{ y } (q_k)_i \cdot (s_k)_i < 0, i = 1, \dots, m \quad (39)$$

$$v_i = 0 \text{ en otro caso.}$$

Incrementando w sistemáticamente hasta que $q_k^T s_k$ llega a ser positivo.

* **Solución de la Programación Cuadrática:** en cada iteración sucesiva del método SQP, un problema QP de la siguiente forma es resuelto, donde A_i se refiere a la fila i de la matriz A de tamaño $m \times n$.

$$\min_{d \in R^n} q(d) = \frac{1}{2} d^T H d + c^T d,$$

$$A_i d = b_i, i = 1, \dots, m_e, \quad (40)$$

$$A_i d \leq b_i, i = m_e + 1, \dots, m.$$

El procedimiento de solución involucra dos fases. La primera fase envuelve el cálculo de un punto confiable (si existe). La segunda fase hace la generación de una secuencia iterativa de puntos confiables que convergen hasta la solución. En este método un conjunto activo (active set), \bar{A}_k , es mantenido ya que este es un estimado de las restricciones activas (aquellas que están sobre las restricciones de borde) en el punto solución. Virtualmente todos los algoritmos QP son métodos de conjunto activo. Este punto es enfatizado debido a que existen muchos métodos diferentes que son muy similares en estructura pero que son descritos en términos ampliamente diferentes.

* **Búsqueda lineal y función de merito:** la solución del subproblema QP produce un vector d_k , el cual es usado para formar la iteración:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k. \quad (41)$$

El parámetro de tamaño de paso α_k es determinado en orden de producir un decremento suficiente en una función merito. La siguiente función de merito es usada en esta

implementación (Matworks Inc., 2009):

$$\Psi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_e} r_i \cdot g_i(x) + \sum_{i=m_e+1}^m r_i \cdot \max[0, g_i(x)]. \quad (42)$$

Ravindran et al. (2006) recomiendan preparar el parámetro de penalización con:

$$r_i = (r_{k+1})_i = \max_i \left\{ \lambda_i, \frac{(r_k)_i + \lambda_i}{2} \right\}, i = 1, \dots, m. \quad (43)$$

Esto permite una contribución positiva de las restricciones que son inactivas en la solución QP pero son recientemente activas. En esta implementación, el parámetro de penalización r_i es inicialmente:

$$r_i = \frac{\|\nabla f(x)\|}{\|\nabla g_i(x)\|}. \quad (44)$$

Donde $\| \cdot \|$ representa la norma Euclidiana. Esto asegura grandes contribuciones para el parámetro de penalización de las restricciones con pequeños gradientes, el cual debe ser el caso para restricciones activas en el punto solución.

6.2 La herramienta de optimización de MATLAB

El problema de optimización es resuelto con la librería “Optimization Toolbox” del programa computacional MATLAB v.7.8.0.347 R2009a que contiene varias técnicas de programación no lineal. La herramienta de optimización “optimtool” es una Interfase de Usuario Gráfica (GUI) programada en lenguaje MATLAB. Tiene en su librería varias funciones de aplicación a distintos tipos de optimización como: Programación Lineal, optimización no lineal restringida, optimización multiobjetivo, programación cuadrática, mínimos cuadrados, etc.

La función empleada para optimización no lineal restringida (que es el caso de este artículo) es el “fmincon”. Consta de tres métodos de resolución: Algoritmo de Región Confiable Reflectiva, algoritmo de Conjunto Activo (Active Set) que no es más que el método SQP y algoritmo de Punto Interior. El primero solo es usado para problemas de minimización no restringida, mientras los otros dos se aplican a problemas de minimización no lineal restringida. La técnica SQP de la librería de MATLAB es una estrategia de conjunto activo (también conocido como método de proyección). Este ha sido modificado para ambos problemas LP y QP. La herramienta de optimización requiere que tanto la función objetivo y las restricciones sean escritas por separado, para luego ser llamadas por el programa. Lo más recomendable es proveer de restricciones de borde inferiores y superiores, así se obtienen soluciones reales y con menos esfuerzo computacional.

6.3 Procedimiento de optimización

El procedimiento de optimización ha sido adaptado de Elachachi y Djellouli (2004) y pasa por las siguientes etapas:

- 1.- Elegir un punto de solución inicial, que en este caso puede ser resultado de un predimensionado o de un diseño tradicional, de acuerdo a las recomendaciones que provee el reglamento ACI 318 – 08.
- 2.- Determinar las solicitaciones internas en cada elemento como ser: fuerzas axiales y momentos flectores; mediante métodos tradicionales, por elementos finitos (FEM), métodos

matriciales; que están disponibles en programas computacionales comerciales como SAP 2000, ETABS, RAM Advanse, CYPECAD, etc.

3.- Construcción de la función objetivo y restricciones de acuerdo al planteamiento hecho en las secciones 4 y 5 a partir de los datos del problema.

4.- Resolución del problema de optimización para encontrar una solución global o por lo menos un mínimo local, empleando la técnica de programación cuadrática secuencial (SQP).

5.- Ensayar sobre la solución obtenida (óptima) un criterio de detención del procedimiento hasta que se cumpla con un valor de tolerancia para la función objetivo y restricciones.

7 EJEMPLO DE APLICACIÓN

La aplicación numérica consiste en el diseño de costo óptimo (DCO) de la viga continua EFGH del primer piso y de la columna CGK del pórtico de dos plantas que se muestra en la Figura 5, cuya funcionalidad es de vivienda-comercio, muy común en Bolivia. La formulación propuesta en este trabajo, considera tres variables de diseño b , h y A_s para vigas como para columnas. Los datos de entrada generales son los siguientes: cargas muertas $D_1 = 900$ Kgf/m y $D_2 = 500$ Kgf/m, cargas vivas $L_1 = 800$ Kgf/m y $L_2 = 300$ Kgf/m, valor de la carga por viento $P = 1000$ Kgf. Hormigón con: $\gamma_{H^oA^o} = 2400$ Kg/m³ y $f'_c = 250$ Kgf/cm². Acero con $\gamma_s = 7850$ Kg/m³ y $f_y = 4200$ kgf/cm². $d_l = 6.5$ cm. y $\beta_l = 0.85$. Se hace un predimensionado rápido para vigas usando la tabla 9.5 (a) del ACI con la luz más grande que es de 7.50 m. para la viga GH con un extremo discontinuo $h_{min} = 750/18.5 = 40.5$ cm., la cual es usada como restricción de borde inferior. Los valores de los precios de los materiales actualizados a octubre de 2010 (Revista presupuesto y construcción N° 49, 2010) son presentados en la tabla 1.

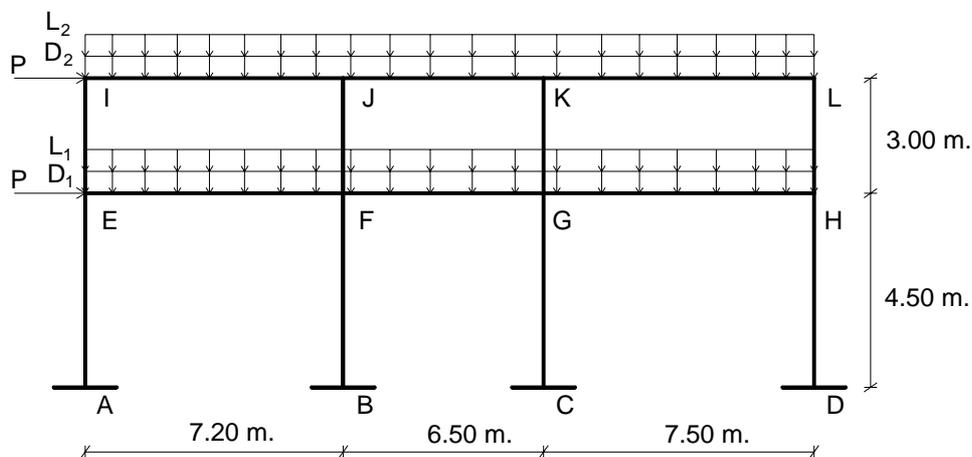


Figura 5: Pórtico considerado para análisis.

Parámetro	Vigas	Columnas
Hormigón (\$US/m ³)	225.70	213.11
C_c (\$US/cm ² /m)	0.02257	0.02131
Acero (\$US/Kg)	1.69	1.76
C_s (\$US/cm ² /m)	1.32665	1.3816
Encofrado (\$US/m ²)	7.80	7.25
C_f (\$US/cm/m)	0.078	0.0725

Tabla 1: Costos de materiales actualizados a octubre 2010.

Los valores de las solicitaciones internas son obtenidos con el programa computacional SAP 2000 v.14. Se toman la combinación de cargas (1) para el análisis de vigas y las combinaciones (13) y (14) para columnas.

Para las vigas de la primera planta se hizo un dimensionado de forma tradicional para el máximo momento que se presenta en el apoyo G obteniendo una sección de $30 \times 45 \text{ cm}^2$ y $A_s = 10.05 \text{ cm}^2$ ($5\phi 16$), datos utilizados como punto inicial en el "optimtool" de MATLAB. En este caso se utiliza el algoritmo SQP para resolver el problema de optimización por tramos y compararlo con los resultados obtenidos por el diseño tradicional. Para la columna CG se obtiene de un diseño preliminar una sección de $35 \times 50 \text{ cm}^2$ y $A_s = A_s' = 12.06 \text{ cm}^2$ ($6\phi 16$), mientras para la columna GK se tiene una sección de $35 \times 35 \text{ cm}^2$ y $A_s = A_s' = 8.04 \text{ cm}^2$ ($4\phi 16$), que son también los puntos iniciales para la resolución de este problema. Los resultados para el Diseño de Costo Óptimo (DCO) pueden apreciarse en las tablas 2, 3 y 4.

Parámetros	Diseño Tradicional	Tramo (técnica SQP)			
		E	EF	F	FG
M_u (Kgf-m)	-13209.92	-7561.74	7342.43	-12220.17	3789.1
b (cm.)	30	25	25	25	25
h (cm.)	45	40	40	40	40
A_s (cm^2)	10.05	6.465	6.261	11.108	3.3
ρ	0.00819	0.0064	0.0062	0.0111	0.0033
d_t (cm.)	40.9	35.9	35.9	35.9	35.9
a (cm.)	6.62	5.11	4.95	8.78	2.61
c (cm.)	7.789	6.01	5.82	10.33	3.07
ε_{st}	0.0127	0.0149	0.0155	0.0072	0.032
ϕM_n (Kgf-m)	14276	8146.74	7908.81	13224.57	4314.95
DCO (\$US/m)	53.162	39.054	39.066	45.496	35.586
Nº iteraciones	-	6	6	8	4

Tabla 2: Resultados del DCO y comparación con el diseño tradicional para la viga EFGH.

Parámetros	Diseño Tradicional	Tramo (técnica SQP)		
		G	GH	H
M_u (Kgf-m)	-13209.92	-13209.92	7967.74	-8249.58
b (cm.)	30	25	25	25
h (cm.)	45	40	40	40
A_s (cm^2)	10.05	12.186	6.846	7.112
ρ	0.00819	0.0122	0.0068	0.0071
d_t (cm.)	40.9	35.9	35.9	35.9
a (cm.)	6.62	9.63	5.41	5.62
c (cm.)	7.789	11.33	6.36	6.61
ε_{st}	0.0127	0.0065	0.0139	0.0132
ϕM_n (Kgf-m)	14276	14311.10	8587.75	8893.07
DCO (\$US/m)	53.162	46.926	39.842	40.195
Nº iteraciones	-	7	6	6

Tabla 3: Resultados del DCO y comparación con el diseño tradicional para la viga EFGH (continuación).

Como se puede ver en función a los resultados de las Tablas 2 y 3, el factor $\phi = 0.9$ asumido en la formulación general es correcto para todos los tramos debido a que ε_t es mayor a 0.005. El algoritmo SQP produce los resultados con un número de iteraciones no mayor a 8 para el máximo momento negativo que se presenta en todo el tramo de la viga continua. El costo por metro lineal de la viga obtenido por el método SQP es 11.73% más económico frente al diseño tradicional, siendo el Diseño de Costo Óptimo (DCO) una sección de 25x40 cm² y área de acero igual a 12.06 cm² (6 ϕ 16), aumentando solo una barra de acero frente al diseño tradicional (5 ϕ 16) lo cual hace más económico al diseño.

Parámetros	Columna (diseño tradicional)		Columna (técnica SQP)	
	CG	GK	CG	GK
P_u (Kgf)	-25627	-9071	-25627	-9071
M_u (Kgf-m)	1532	-475.37	1532	-475.37
b (cm.)	35	35	30	30
h (cm.)	50	35	42.872	30
$As = As'$ (cm ²)	12.06	8.04	6.976	4.5
ρ	0.0138	0.0131	0.0108	0.01
a (cm.)	4.576	1.47	5.74	1.78
c (cm.)	5.383	1.73	6.75	2.10
ϕ	0.753	0.826	0.70	0.80
ϕP_n (Kgf)	281955	214384	184208	145368
ϕM_n (Kgf-m)	19932.69	7607.58	10882.21	3851.30
DCO (\$US/m)	82.94	58.47	57.252	40.97
Nº iteraciones	-	-	7	18

Tabla 4: Resultados del DCO y comparación con el diseño tradicional para la columna CGK.

En el caso de la columna CG se obtiene un Diseño de Costo Óptimo (DCO) para la combinación de carga (13) en un 31% mas económico frente al diseño tradicional, obteniendo una sección final de 30x45 cm² y área de acero total igual a 13.58 cm² (12 ϕ 12) en 7 iteraciones, además se puede observar que para este caso la restricción activa es la relación de esbeltez g_6 debido al alto valor de la longitud sin soporte lateral. Finalmente la sección óptima para la columna GK es igual a la sección mínima de 30x30 cm² y refuerzo total igual a 9.05 cm² (8 ϕ 12), debido a los escasos valores de carga que soporta, efectuándose el cálculo en 18 iteraciones.

8 CONCLUSIONES

En la actualidad los procedimientos de diseño están incompletos (Elachachi y Djellouli, 2004; Hernández, 1990), ya que se preocupan más por el aspecto de resistencia, descuidando el aspecto económico, generando diseños costosos, a veces hasta prohibitivos en Bolivia.

En función a los ejemplos numéricos presentados, se puede apreciar que el método SQP es potente y robusto para este tipo de problemas, siendo el más adecuado para problemas de minimización no lineal restringida, aunque no sea un algoritmo de resolución a gran escala. La metodología propuesta no solo es aplicable a diseños existentes, sino que puede usarse para hacer predimensionamientos de proyectos en desarrollo y verificar que las secciones asumidas no estén sobredimensionadas.

Al obtener soluciones más económicas frente a diseños tradicionales en un 11.73% para vigas simplemente armadas y 31% para columnas cortas, se puede considerar al Diseño de

Costo Óptimo (DCO) como una alternativa técnica y económicamente viable para proyectos de edificación. Para el caso de columnas de planta baja es recomendable disponer de vigas de arriostre o por ultimo disponer de un sótano para que la restricción de esbeltez g_6 no domine el diseño, ya que produce secciones más grandes frente las restricciones de resistencia g_1 y g_2 .

REFERENCIAS

- Al-Salloum Y.A. and Siddiqi G.H., Cost-Optimum Design of reinforced concrete beams. *ACI Journal Structural*, 91(6): 647-655, 1994.
- Andreczewski C.I., El Debs H.C., Chaves N.A., Félix S.R. and Araki L.S., Optimization of cross section of reinforced concrete beam using experimental design. *6th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Rio de Janeiro – Brazil, 2005.
- Armitano O., Edelman J. y García P.U., *Programación No Lineal*. Editorial Limusa. 1º edición. México, 1985.
- Borda F.J. y Rodriguez R.G., Diseño óptimo de vigas de hormigón armado mediante el uso de técnicas de programación no lineal. *IV Congreso Internacional ICG de Ingeniería Estructural, Sísmica y Puentes*, Lima – Perú, 2010.
- Borda F.J., *Diseño Óptimo de Pórticos de Hormigón Armado sometidos a cargas estáticas mediante el uso de Algoritmos de Programación No Lineal*. Proyecto de Grado para optar al Diploma Académico de Licenciado en Ingeniería Civil. Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad Mayor de San Simón. Cochabamba – Bolivia, 2010.
- Camp C.V., Pezeshk S., and Hansson H., Flexural design of reinforced concrete frames using a genetic algorithm. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 129(1): 105-115, 2003.
- Coelho V.L., *Optimização de Seções Transversais de Concreto Armado. Aplicação a Pórticos*. Dissertação de Mestre em Engenharia de Estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. Brasil, 2003.
- Coello C.C., Santos H.F. y Alonso F.F., Diseño óptimo de vigas de concreto reforzado mediante algoritmos genéticos. *2º Congreso Internacional de Investigación en Ciencias Computacionales y Matemáticas*, Chiapas – México, 1995.
- Coimbra N.T., *Optimização de Seções Transversais de Concreto Armado. Aplicação a Pórticos Planos*. Dissertação de Mestre em Engenharia de Estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. Brasil, 2006.
- Comité ACI 318, *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S - 08) y Comentario*. American Concrete Institute, Farmington Hills, MI – USA, 2008.
- Córdova A.C., *Diseño de Estructuras de Hormigón Armado*. Ed. L. d. X. 2º edición. La Paz – Bolivia, 2004.
- CSI Computers and Structures Inc., *SAP 2000 v. 14 – Basic Analysis Reference Manual*. Berkeley, California – USA, 2009.
- Elachachi S.M. and Djellouli F., Conception dimensionnelle optimisee des structures courantes en beton arme. *XXII Rencontres Universitaires de Génie Civil – Ville & Génie Civil*. France, 2004.
- Fragiadakis M. and Papadrakakis M., Performance-based optimum design of reinforced concrete structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 37: 825-844, 2008.
- Gallagher R.H., Diseño estructural óptimo - Una reseña. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 1(1): 3-20, 1985.
- Hernández I.S., *Métodos de Diseño Óptimo de Estructuras*. Colección SEINOR N° 8. Ed. Paraninfo S.A. Madrid – España, 1990.
- Liang Q.Q., Performance-based Optimization of Strud-and-Tie Models in Reinforced Concrete Beam-Column Connections. *In Tenth East Asia-Pacific Conference on Structural*

- Engineering and Construction EASEC – 10*, Bangkok – Thailand, 2006.
- Martí M.P., Tomás E.A. y Torrano M. S., Aplicación de las Técnicas de optimización en la enseñanza de Hormigón Estructural. *I Jornadas de ACHE sobre la enseñanza del hormigón estructural*, 203-209, Madrid – España, 2001.
- Morales M.R., *Diseño en Concreto Armado*. Fondo Editorial ICG (Instituto de Construcción y Gerencia) PT – 06. 3° edición ICG. Lima – Perú, 2006.
- Payá Z.I., Yepes V. y González V.F., Minimización del coste de pórticos de edificación con heurísticas híbridas. *IV Congreso Internacional de Puentes y Estructuras*, Valencia – España, 2008.
- Pirzada B.G., Saand A. and Durrani N.A., Minimum cost design of rectangular reinforced concrete section using system simulation. *Quaid-e-Awam University Research Journal of Engineering, Science & Technology*, 1(1): 27-32, 2000.
- Quiroz L., Möller O., Rubinstein M. y Foschi R.O., Aplicación de redes neuronales al diseño óptimo de pórticos de hormigón armado sismorresistentes. *Reporte Técnico RT-ID-07/01*. Universidad Nacional de Rosario. Argentina, 2007.
- Ravindran A., Ragsdell K.M. and Reklaitis G.V., *Engineering Optimization. Methods and Applications*. John Wiley and Sons Inc. Second edition. New Jersey – USA, 2006.
- Revista: *Presupuesto y Construcción, Guía de Productos y Servicios*. Año 21, N° 49, Abril – Julio 2010, Publicación cuatrimestral, La Paz – Bolivia.
- Rodrigues J.S., Eloy V.L. and Barbosa G.G., Optimum design of tall buildings in reinforced concrete subjected to wind forces. *6th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*. Rio de Janeiro – Brazil, 2005.
- Saini B., Sehgal V.K. and Gambhir M.L., Genetically Optimized Artificial Neural Network based Optimum Design of Singly and Doubly Reinforced Concrete beams. *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*, 7(6): 603-619, 2006.
- Taha A.H., *Investigación de Operaciones. Una Introducción*. Ed. Prentice Hall. 6° edición. Juárez – México, 1998.
- The Mathworks Inc. *MATLAB: Optimization Toolbox 4.2, User Guide*. MA – USA, 2009.
- Tomás A. and Martí P., Design of reinforcement for concrete co-planar shell structures using optimization techniques. *Meccanica – An International Journal of Theoretical and Applied Mechanics; Simulation, Optimization and Identification*. November, 2009.
- Torrano M.S., *Diseño óptimo de secciones y elementos estructurales de Hormigón Armado*. Tesis Doctoral. Departamento de Estructuras y Construcción. Universidad Politécnica de Cartagena. España, 2003.
- Torrano S. y Martí P., Diseño óptimo de geometría y de propiedades de estructuras de hormigón armado. *Anales de Ingeniería Mecánica*, 2(11): 161-168, 1997.
- Zielinski Z.A., Long W. and Troitsky M.S., Designing Reinforced Concrete Short-Tied Columns Using the Optimization Technique. *ACI Journal Structural*, 92(5): 610-626, 1995.