

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO EFEITO DE PINO E DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DO CONCRETO À COMPRESSÃO NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PAINÉIS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS AO CORTE PURO

Carlos R. P. David^a, Virgínia M. R. d'Avila^b, Eduardo Bittencourt^b

^aMestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha 99, Porto Alegre, RS, Brasil (CEP: 90035-190), carlosrpdavid@hotmail.com

^bProfessor Doutor do Centro de Mecânica Computacional Avançada (CEMACOM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha 99, Porto Alegre, RS, Brasil (CEP: 90035-190), vichy@ufrgs.br, <http://www.ufrgs.br>

Palavras Chave: concreto armado, elementos finitos, fissura incorporada, corte puro, efeito de pino, painel.

Resumo. A análise de painéis de concreto armado submetidos a corte puro é um tópico que tem recebido atenção de pesquisadores ao longo dos anos. Isto se deve, principalmente, à dificuldade encontrada na aplicação do carregamento e das condições de vinculação sobre a estrutura. O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo numérico capaz de representar o comportamento de painéis de concreto armado submetidos ao corte puro, considerando-se a influência do efeito de pino (resistência ao corte das barras da armadura) e do efeito do comportamento não-linear do concreto comprimido na resposta dos painéis. Na análise computacional via Elementos Finitos, será utilizado um modelo de fissura incorporada que considera a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento. Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrão. Um modelo de transferência de tensão por aderência é usado para incluir a contribuição do aço. Para representar as barras de aço da armadura, é utilizado um modelo incorporado que permite a disposição arbitrária das barras no interior dos elementos de concreto. Os resultados numéricos obtidos são comparados com os resultados experimentais. São incluídos dois diferentes modelos de efeito de pino, analisando-se a influência dos mesmos no comportamento dos painéis ensaiados. Vários painéis com diferentes formas de ruptura experimental foram simulados, obtendo-se respostas muito boas. Além disso, foram feitas comparações das diversas curvas resposta dos painéis simulados com as diferentes relações constitutivas do concreto comprimido, verificando-se diferenças consideráveis entre as curvas para os níveis de carregamento mais altos.

1 INTRODUÇÃO

É de comum conhecimento que a correta modelagem da fissura é um tópico difícil devido à natureza localizada, pois trata da descontinuidade no campo dos deslocamentos. Em uma análise via Método dos Elementos Finitos (MEF), as fissuras podem ser representadas de formas distintas. Os modelos de fissura incorporada baseiam-se no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrões. Em estruturas de concreto armado, a dificuldade na modelagem da fissura aumenta devido ao complexo comportamento da interação entre os dois materiais envolvidos após o início da fissuração. Os modelos de transferência de tensão baseiam-se na transferência de tensão por aderência entre o aço e o concreto e são capazes de fornecer informações sobre o comportamento local da fissura. Basicamente, estes modelos determinam a distribuição das deformações, no aço e no concreto adjacente, ao longo da armadura. Quando as deformações dos dois materiais têm valores diferenciados, ocorre um escorregamento relativo entre eles e a conseqüente formação da fissura. Além disso, na simulação numérica da fissuração em peças de concreto armado submetidas ao corte puro, o problema torna-se ainda mais desafiador devido ao fato de que a direção das barras da armadura nem sempre coincidem com as direções das tensões principais, ou seja, a tensão de tração que irá fissurar o concreto não tem a mesma direção das barras de aço.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo numérico capaz de simular o comportamento de painéis de concreto armado submetidos ao corte puro, como os ensaiados experimentalmente por Vecchio (1981). Comparações usando-se dois diferentes modelos de efeito de pino são apresentadas, bem como são mostradas as respostas obtidas considerando-se o comportamento do concreto à compressão como sendo elástico-linear ou com um comportamento não-linear parabólico, verificando-se em que situações esta relação constitutiva do concreto torna-se mais importante. Além disso, são feitas comparações com as respostas dadas pelo modelo analítico desenvolvido por Vecchio (1981).

2 MODELO DE FISSURA INCORPORADA E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

No presente trabalho, empregou-se um modelo baseado no modelo original de fissura incorporada apresentado por Dvorkin et al. (1990) e modificado por d'Avila (2003). Mais detalhes do modelo podem ser vistos em David et al. (2009) e David (2010). O modelo original de Dvorkin não possui a inclusão das barras de armadura, o que foi feito por d'Avila (2003) e Brisotto (2006) através do modelo de transferência de tensão por aderência de Russo, Zingone e Romano (1990).

2.1 Modelo original de Dvorkin et al. para concreto simples

Os três principais aspectos do modelo original de Dvorkin et al. são: a localização de deformações envolve o elemento completo como domínio mínimo - forma-se apenas uma fissura por elemento; a consideração da localização de deformações na forma de uma linha de descontinuidade de deslocamentos, que passa pelo centro do elemento; e a existência de duas equações constitutivas definindo o comportamento pós-localização do concreto simples: uma relação tensão-deslocamento para a linha de descontinuidade e uma relação convencional tensão-deformação para o resto do domínio.

O elemento finito usado é o QMITC (*Quadrilateral with Mixed Interpolation of Tensorial Components*). Trata-se de um elemento quadrilátero bidimensional de cinco nós, ver figura 1(a), baseado no método de interpolação mista das componentes tensoriais (Dvorkin e Vassolo (1989)). Este elemento adota uma interpolação para os deslocamentos e uma para as

deformações, realizando as duas interpolações em conjunto. Na figura 1(b), está representado o elemento finito com a linha de descontinuidade de deslocamentos (fissura). A fissura, que passa pelo nó central (nó 5), divide o elemento em dois subdomínios: **V1** e **V2**.

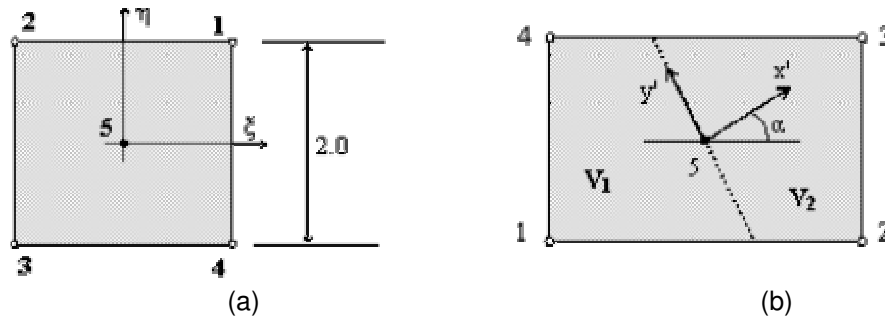


Figura 1: (a) elemento QMITC; (b) elemento com a linha de descontinuidade

2.2 Modelo para concreto armado

Através de d'Avila (2003) e, posteriormente, com implementações de Brisotto (2006), foi proposta a inclusão da contribuição da armadura no modelo de Dvorkin.

A fissuração em estruturas de concreto armado é caracterizada pelo aparecimento de várias fissuras espalhadas ao longo da peça. A inclusão da armadura causa significativas modificações no processo de formação e crescimento das fissuras e, conseqüentemente, na força transmitida através das mesmas. Para representar esta situação, mudanças foram feitas no modelo original de fissura incorporada apresentado na seção 2.1. As duas principais modificações feitas são: permitir que o modelo seja capaz de representar um número variável de fissuras em cada elemento; incluir a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças. O modelo de transferência de tensão de Russo, Zingone e Romano (1990) foi usado para introduzir estas modificações. Mais detalhes destes modelos são mostrados em d'Avila (2003), Brisotto (2006), David et al. (2009) e David (2010).

2.3 Modelos de Efeito de Pino

Em estruturas onde a tensão tangencial tem valor significativo, na região das fissuras, o aço é submetido a deformações transversais em relação ao eixo da barra, relacionadas aos mecanismos de corte e flexão das barras causados pela distorção (efeito de pino), conforme mostrado na figura 2. O efeito de pino para este tipo de estrutura é muito importante e não pode ser negligenciado. Vecchio (1981) e Oliver et al. (2008) ressaltam a importância desse efeito. O Boletim 230 do CEB 1996 (CEB-230 (1996, p. 122)) coloca que o efeito de pino torna-se ativo quando a fissuração é de maior importância, normalmente onde a capacidade última de carga é importante e que é um fenômeno muito localizado, **a menos se uma armadura regular é acompanhada por um sistema de fissuração regular, com cargas regularmente distribuídas (típico caso dos painéis a corte puro)**. Dois modelos diferentes de efeito pino foram implementados neste trabalho e estão detalhados a seguir.

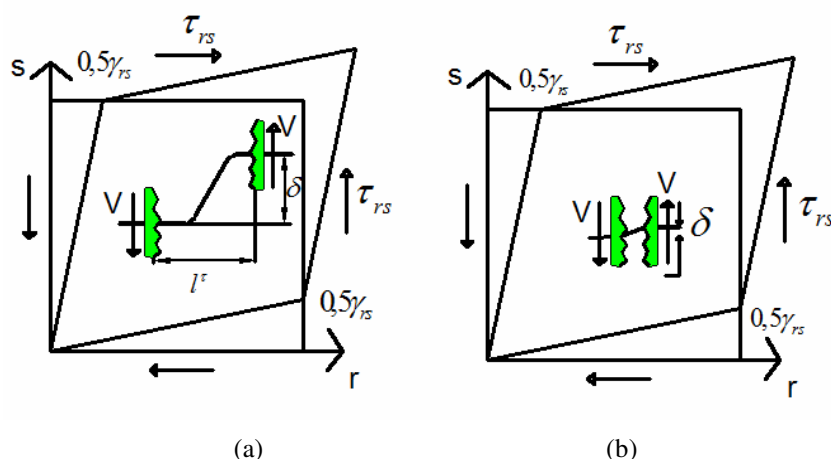


Figura 2: efeito de pino (a) devido à flexão da barra na abertura de fissura e (b) devido ao corte direto da barra (baseada em OLIVER et al., 2008, p. 337)

2.3.1 Modelo de Efeito de Pino Usado por Oliver et al. (2008) – MDA1

O primeiro modelo de efeito de pino usado no presente trabalho é baseado no modelo usado por Oliver et al. (2008). Dois mecanismos diferentes de efeito de pino podem ser ativados na região das fissuras: flexão da barra pelo deslocamento transversal da barra na região das fissuras e corte da barra pelo mesmo motivo, conforme pode ser observado na figura 2. A teoria é baseada nas equações de Timoshenko para viga bi-engastada.

São usadas as equações dadas por Oliver et al. (2008), mas apenas para o mecanismo de corte, já que a abertura das fissuras é pequena e o efeito de flexão é reduzido. Para a consideração do corte da barra, considera-se toda a abertura das fissuras concentrada no meio do painel (conforme também é realizado para o cálculo dos escorregamentos e tensões no modelo de transferência de tensão por aderência), e duas barras (vertical e horizontal) com uma área equivalente à soma de todas as barras de cada direção, engastada em ambas extremidades do painel. O modelo deve ser aplicado para as duas direções ortogonais da armadura. O deslocamento de corte sofrido é tomado como sendo a componente vertical da abertura normal de fissura para a barra horizontal e como sendo a componente horizontal da abertura normal de fissura para a barra vertical. Portanto, a implementação do efeito de pino deste modelo consiste no uso das relações mostradas em (1), onde: G , E e ν são o módulo de corte, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson das barras de aço; f_y e A_s são a tensão de escoamento das barras e a área de aço das mesmas; V_h e V_v são as forças devido ao efeito de pino provocadas pelas barras horizontais e verticais; W_{fis} e θ são a abertura normal das fissuras e o ângulo de inclinação da direção das tensões principais; e, L é o comprimento do lado do painel.

$$\begin{aligned}
 G_s &= E_s / 2(1 + \nu_s) \\
 V_y &= f_y A_s / \sqrt{3} \\
 V_h &= G_{s1} \gamma_1 A_{s1} = G_{s1} A_{s1} \left(\frac{W_{fis} \sin(\theta)}{L} \right) \leq V_{y1} \\
 V_v &= G_{s2} \gamma_2 A_{s2} = G_{s2} A_{s2} \left(\frac{W_{fis} \cos(\theta)}{L} \right) \leq V_{y2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

2.3.2 Modelo de Efeito de Pino de Di Prisco e Gambarova – MDA2

O Boletim 230 do CEB 1996 (CEB-230 (1996, p. 127)) apresenta vários modelos de efeito de pino usados por diferentes autores. Foi escolhido o modelo de Di Prisco e Gambarova por ser baseado na teoria de viga em repouso sobre fundação elástica de concreto, que é uma teoria bastante usada por diversos autores na representação deste efeito. Este modelo é feito para cada barra individual, ao contrário do modelo mostrado no item 2.3.1. As relações usadas são mostradas em (2).

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt[4]{\frac{d_b K_{eq}}{4E_s J_b}} \\ V &= \frac{d_b K_{eq}}{2\alpha} W \\ K_{eq} &= \gamma K_s \\ K_s &= \frac{127\sqrt{f_c'}}{d_b^{0,66}} \\ \gamma &= 2,12 \quad \text{se } \frac{V}{V_u} \leq 0,4 \\ \gamma &= \left\{ 0,544 + 0,026 \cosh \left[8 \left(\frac{V}{V_u} - 0,4 \right) \right] \right\}^{\frac{4}{3}} \quad \text{se } \frac{V}{V_u} > 0,4 \\ V_u &= 1,27 d_b^2 \sqrt{|f_c'| |f_y|} \quad (\text{Dulacska}) \end{aligned} \quad (2)$$

Sendo, d_b o diâmetro da barra de aço; J_b o momento de inércia da barra; E_s o módulo de elasticidade; W a abertura unitária de fissura na direção ortogonal à barra de aço; K_{eq} o módulo de fundação equivalente; α a rigidez da fundação; f_c' a resistência à compressão do concreto; V_u a resistência última de pino (relação de Dulacska); e f_y a tensão de escoamento do aço. A força de pino para cada barra de armadura é obtida pela segunda equação de (2). Simplificadamente calcula-se o modelo para uma barra em cada direção e multiplica-se o resultado pelo número de barras em cada uma destas direções, já que a distribuição da armadura e a fissuração são uniformes ao longo da peça.

2.4 Relações Constitutivas dos Materiais

Este item apresenta as relações constitutivas dos diferentes materiais empregados neste trabalho.

2.4.1 Concreto

- Tração:** para o comportamento do concreto intacto à tração, foi adotado o modelo constitutivo elástico-linear. Para o comportamento do concreto fissurado foi empregado o modelo de Hillerborg et al. (1976) para representar a transferência de tensões normais à fissura devido ao amolecimento. Este modelo está de acordo com os princípios da Mecânica da Fratura, já que a área limitada pela curva tensão transmitida através da fissura x abertura da fissura ($\sigma_c \times w_c$) é igual à energia específica de fratura do material (Gf) (ver figura 3).

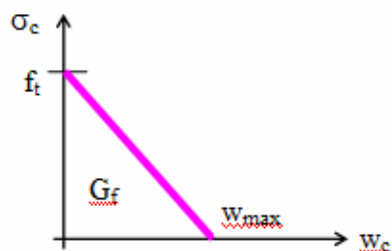


Figura 3: amolecimento linear

b) Modelos para o Concreto Comprimido:

b.1) Comportamento Linear (CL): é a relação constitutiva mais simples, onde o comportamento do concreto é considerado linear, sendo representado por uma reta com ponto inicial na origem do cruzamento dos eixos de tensão e deformação e com o final no ponto (ϵ_0, f_c') , onde a abscissa é a deformação do cilindro de concreto correspondente a uma tensão igual à resistência a compressão do concreto (f_c');

b.2) Comportamento Não-Linear Parabólico (CNL): analisando-se os resultados de painéis ensaiados para um dado nível de deformações, Vecchio (1981) concluiu que o nível de tensões era tipicamente maior se a distorção de corte associada era relativamente pequena, ou seja, a máxima deformação de corte tem um efeito degradante no comportamento tensão-deformação de compressão do concreto. Isto pode ser visto na figura 4, onde os valores de tensões obtidos (nuvem de pontos) vão se tornando cada vez menores em relação à parábola teórica conforme vai aumentando a distorção do painel, mostrando que, para um mesmo nível de deformações, o concreto suporta menos tensão do que o esperado (ou, similarmente, para um mesmo nível de tensões, a deformação no concreto obtida experimentalmente é maior que a esperada). Portanto Vecchio introduziu um parâmetro “ β ” na curva tensão-deformação parabólica comumente usada para o concreto. A expressão modificada é mostrada na equação (3) e é esta a relação usada para incluir o comportamento não-linear do concreto comprimido nos painéis ensaiados neste trabalho. Como, no presente trabalho, os painéis são simulados com deslocamentos prescritos, a expressão (3) não pode ser aplicada diretamente, pois a deformação da diagonal comprimida, ϵ_d , é obtida diretamente dos deslocamentos prescritos ($\epsilon_d = \bar{\delta} / L$). Para contornar este problema, a equação é aplicada ao contrário, ou seja, calcula-se uma nova deformação da diagonal comprimida a partir da inserção da tensão desta diagonal (f_d), obtida através de Círculos de Mohr (ver David (2010)). Com essa nova deformação da diagonal comprimida, calculada analiticamente, obtém-se uma nova distorção do painel.

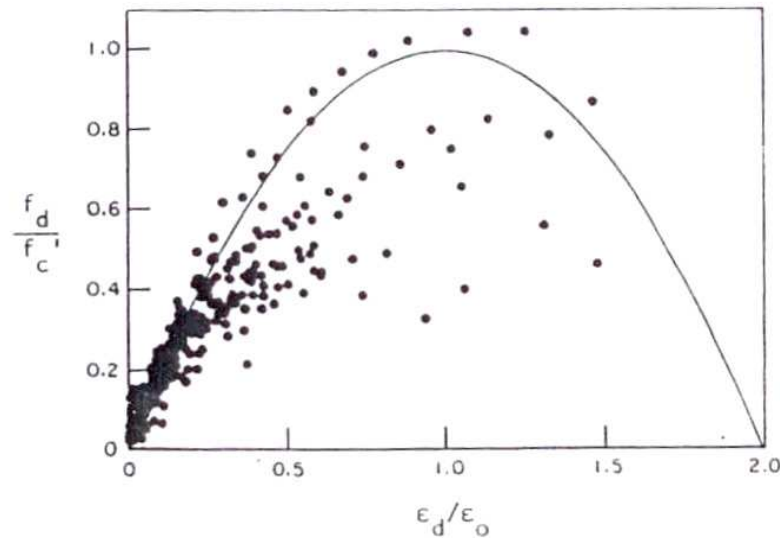


Figura 4: dados obtidos das tensões e deformações principais de compressão (VECCHIO, 1981, p. 78)

$$f_d = f_c' \left[2 \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right) - \beta \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (3)$$

Na equação (3), f_c' é a resistência à compressão do concreto; ε_d é a deformação do concreto da diagonal comprimida do painel; e, ε_0 é a deformação do cilindro de concreto correspondente, na tensão de compressão de pico (f_c'). Com a redução dada pelo fator β , a tensão e deformação de pico passam a ser dadas, respectivamente, por: $f_p = f_c'/\beta$ e $\varepsilon_p = \varepsilon_0/\beta$. Este fator foi determinado por Vecchio a partir dos inúmeros ensaios realizados, através de ajuste de curva, resultando na expressão (4), sendo γ_m a distorção máxima de corte ($\gamma_m = 2\varepsilon_d + \varepsilon_l + \varepsilon_t$), onde ε_l e ε_t são as deformações longitudinal e transversal do painel.

$$\beta = 0,58 + 0,27 \left(\frac{\gamma_m}{\varepsilon_d} \right) \quad (4)$$

2.4.2 Armadura

O modelo constitutivo adotado para o comportamento da armadura na direção do eixo das barras é o modelo elastoplástico com endurecimento. As barras de aço são incorporadas dentro dos elementos finitos e podem ser dispostas de forma arbitrária, independentes dos nós dos mesmos. Para isto são criados nós adicionais para as barras, porém que não agregam novas incógnitas ao problema de elementos finitos. As barras de aço são consideradas como tiras de material mais rígido dentro dos elementos. Mais detalhes podem ser vistos em Elwi e Hrudey (1989), d'Avila (2003) e David (2010).

Para a resistência transversal das barras da armadura em relação ao seu eixo (efeito de pino), foram usados os modelos apresentados no item 2.3.

2.5 Modelo modificado empregado

Para peças submetidas ao corte puro, as direções principais de tensões ou deformações estão inclinadas à 45° com a horizontal. Assim, para o painel quadrado da figura 5, a linha de localização possui um ângulo de inclinação de 45° , passando no nó central e terminando em nós de extremidade do elemento. O fluxo de tensões nas faces do elemento deve ser constante e possuir a orientação indicada na figura 5, sendo uma diagonal do elemento tracionada e a outra comprimida.

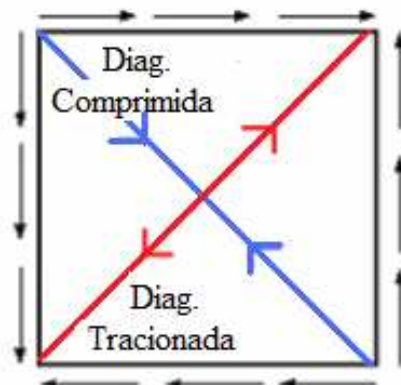


Figura 5: tensões em um painel submetido ao corte puro

Na simulação numérica, para obter o comportamento físico correto, uma alternativa é o uso de incrementos em deslocamentos prescritos nos quatro nós de extremidade do painel, mantendo-se todos eles vinculados nas duas direções globais x e y , ver figura 6. Desse modo, as tensões são iguais em cada face do elemento para o mesmo incremento de deslocamento, bem como as reações e deslocamentos nos nós.

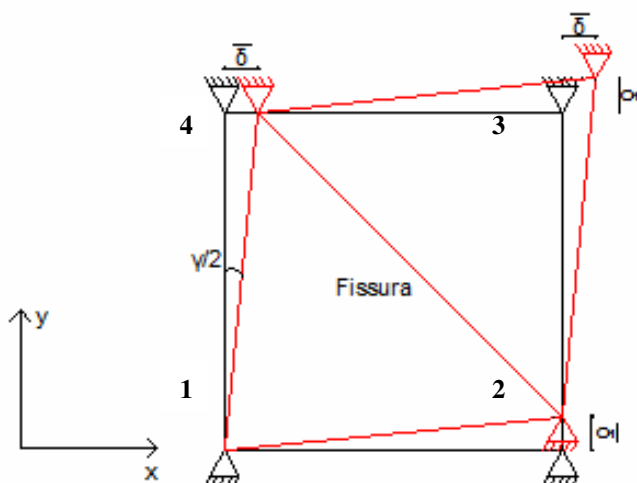


Figura 6: simulação de corte puro

Outro aspecto é que o modelo de transferência de tensão por aderência usado para incluir a contribuição da armadura nos elementos finitos é desenvolvido para tirantes de concreto armado, sendo unidimensional. Dessa forma, o modelo deve ser aplicado para cada uma das direções das barras de armadura do painel e deve-se compor o resultado nas direções das diagonais dos elementos, cuidando com o correto valor e sentido das diversas grandezas

calculadas. O processo detalhado está descrito em David (2010).

Em relação à saída de resultados, foram plotadas diversas curvas de acordo com as que Vecchio (1981) apresentou em sua tese de doutorado, para que fosse obtida uma comparação padronizada. A principal curva a ser comparada entre os resultados numéricos e experimentais é a da distorção angular x tensão tangencial. A deformação longitudinal do aço, ε_l , é obtida diretamente do modelo de transferência de tensão por aderência, possibilitando-se, então, o cálculo da distorção pela fórmula (5), onde ε_d é a deformação da diagonal comprimida, calculada conforme descrito no item 2.4.1, e θ é o ângulo entre a direção da deformação de compressão principal (ângulo das fissuras) e a horizontal.

$$\gamma_t = 2(\varepsilon_d + \varepsilon_l) / \tan \theta \quad (5)$$

A tensão tangencial é calculada a partir das reações obtidas nos vínculos do painel divididas pela área da borda. As outras curvas a serem comparadas são:

- a) deformação longitudinal, ε_l , obtida da lei de escorregamento, pela tensão tangencial e compara-se com os resultados experimentais de Vecchio (1981);
- b) deformação transversal, ε_t , obtida da lei de escorregamento, pela tensão tangencial e compara-se com os resultados experimentais de Vecchio (1981);
- c) deformação da diagonal comprimida, ε_d (calculada conforme descrito em 2.4.1), pela tensão tangencial e compara-se com os resultados experimentais de Vecchio (1981);
- d) deformação da diagonal tracionada, ε_{dt} ($\varepsilon_{dt} = \varepsilon_d + \varepsilon_l + \varepsilon_t$), pela tensão tangencial e compara-se com os resultados experimentais de Vecchio (1981);
- e) tensão da diagonal comprimida, f_d , obtida através das relações dos Círculos de Mohr de Tensões, pela tensão tangencial e compara-se com a experimental e a analítica obtidas por Vecchio (1981).
- f) tensão da diagonal tracionada, f_{dt} , obtida através das relações dos Círculos de Mohr de Tensões, pela tensão tangencial e compara-se com a experimental e a analítica obtidas por Vecchio (1981).
- h) Variação do ângulo das tensões e deformações principais com o aumento da tensão tangencial: apenas para os painéis com taxas de armadura diferentes nas duas direções, o que faz com que os ângulos das tensões e deformações principais sejam diferentes de 45°, ver David (2010).

3 ANÁLISE NUMÉRICA

Serão apresentados três painéis analisados experimentalmente por Vecchio (1981), comparando-se os resultados dos dois modelos de efeito de pino e a influência da relação constitutiva adotada para o concreto à compressão entre as diversas curvas-resposta apresentadas. Os painéis ensaiados possuem dimensões de 890 x 890 x 70mm e são sujeitos ao corte puro, conforme mostrado na figura 5. Para fornecer o estado de corte puro, são dados os incrementos de deslocamentos prescritos conforme figura 6.

3.1 Painel PV27

Este painel é armado horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% em cada direção ($\rho_l = \rho_t = 1,785\%$). O diâmetro das barras é de 6,35mm. Os demais dados estão na tabela 1, sendo: f_c a resistência à compressão do concreto; ε_0 a deformação do cilindro de concreto na tensão de compressão de pico; f_t a resistência à tração do concreto; E_c o módulo de Young do

concreto; ν o coeficiente de Poisson do concreto; E_s o módulo de Young do aço; f_{yh} a tensão de escoamento das barras horizontais; f_{yv} a tensão de escoamento das barras verticais; G_f a energia de fratura do concreto e G_s o módulo de corte das barras.

f_c (MPa)	20,5	E_s (MPa)	200.000
ϵ_0 (adim.)	0,0019	f_{yh} (MPa)	442
f_t (MPa)	2,04	f_{yv} (MPa)	442
E_c (MPa)	21.500	G_f (N/m)	120
ν (adim.)	0,25	G_s (MPa)	80.000

Tabela 1: dados do painel PV27

Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 7 e 8. As curvas MDA1 e MDA2 referem-se aos modelos de efeito de pino utilizados que foram descritos no item 2.3. A designação “CL” e “CNL” referem-se, respectivamente, à consideração do concreto à compressão com uma lei constitutiva elástica-linear (CL) ou não-linear (CNL), conforme descrito no item 2.4.

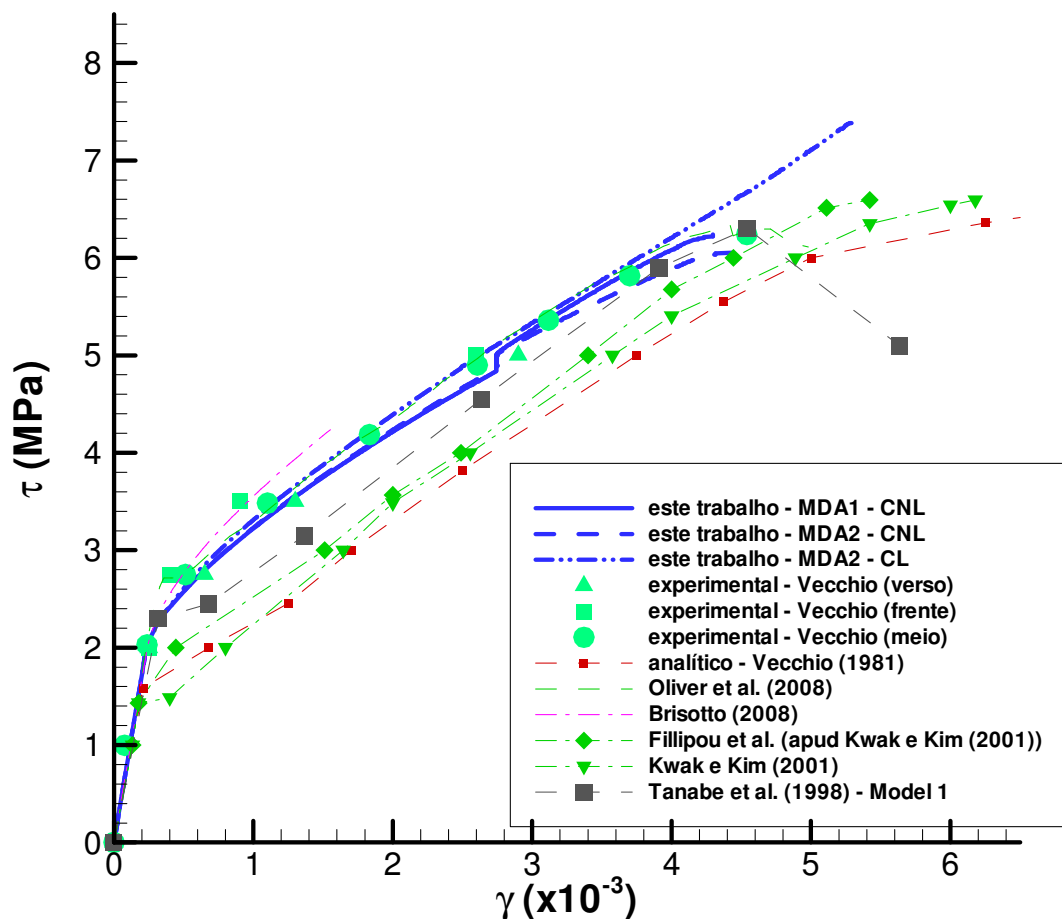


Figura 7: curva tensão tangencial x distorção do painel PV27

No caso desse painel em específico, na curva tensão x distorção (figura 7), há também os dados numéricos obtidos por outros pesquisadores, além de três curvas experimentais obtidas

por Vecchio (1981): uma medindo-se a parte da frente do painel; uma medindo-se o verso do mesmo; e uma tomando-se a média das outras duas, sendo todas plotadas como uma nuvem de pontos.

A curva tensão tangencial x distorção (figura 7) está muito próxima da curva experimental média, apresentando bons resultados, para os dois modelos de efeito de pino. Percebe-se também que a relação constitutiva para o concreto comprimido começa a se tornar muito importante para os níveis de carga mais altos. Como, neste caso, o painel sofreu ruptura devido ao esmagamento do concreto, que é um caso comum nos painéis ensaiados onde a armadura possui uma tensão de escoamento alta e a taxa de armadura também é alta, a consideração de um comportamento linear (CL) para o concreto comprimido vai tornando a resposta cada vez pior conforme se aproxima da carga de ruptura, sendo que a relação constitutiva não-linear (CNL) ofereceu uma aproximação numérica muito mais próxima da experimental para esses níveis de carga mais altos. Porém, salienta-se que, na maior parte da curva, onde as tensões na diagonal comprimida ainda são relativamente baixas, a relação constitutiva para o concreto comprimido não possui uma influência muito significativa na resposta numérica.

Há uma “quebra” na curva próxima ao nível de tensões de 5MPa indicando a formação da segunda geração de fissuras que, no modelo numérico, é quando o número de fissuras é dobrado instantaneamente. Ressalta-se que os resultados numéricos obtidos são mais próximos dos experimentais se comparados com o modelo de Vecchio (1981).

Em relação à curva de deformação das barras de aço (figura 8(a)), foi obtida uma resposta muito próxima da experimental e melhor que a analítica de Vecchio (1981), indicando que as deformações e tensões na armadura foram corretamente calculadas. Também se nota a “quebra” próxima a 5MPa indicando a formação da 2ª geração de fissuras. Verifica-se que o modelo de Efeito de Pino MDA1 forneceu uma resposta um pouco mais próxima da experimental em relação ao MDA2. Além disso, verificou-se que a lei constitutiva do concreto comprimido não influencia em nada na resposta numérica da armadura, como era de se esperar (a figura mostra que as curvas para o MDA2, tanto para a relação constitutiva linear (CL) quanto para a não-linear (CNL), estão sobrepostas). Dessa forma, para os próximos painéis apresentados neste trabalho, somente foi apresentada uma curva para o modelo MDA 2.

A curva da figura 8(b) mostra a deformação da diagonal tracionada, ϵ_{dt} , para cada incremento de deslocamentos dado. Verificou-se uma proximidade bastante boa dos resultados experimentais e numéricos do presente trabalho para os dois modelos de efeito de pino. As relações constitutivas do concreto comprimido apresentaram pouca influência na resposta numérica da diagonal tracionada, como era de se esperar. Salienta-se que essas deformações são obtidas através do Círculo de Mohr de Deformações (ver David (2010)).

A curva da figura 8(c) mostra a deformação da diagonal comprimida, ϵ_d , para cada incremento de deslocamentos dado. Conforme explicado, esta deformação é determinada inicialmente por relações trigonométricas e, posteriormente, no caso de ser usada a relação constitutiva não-linear (CNL) para o concreto comprimido, ela é recalculada com as relações apresentadas no item 2.4. Neste caso, verifica-se, conforme era de se esperar, uma grande diferença na determinação da deformação da diagonal comprimida para cada estágio de tensões tangenciais, dependendo da relação constitutiva empregada. Verificou-se que a curva com o comportamento não-linear (CNL) empregada neste trabalho acompanhou bem o comportamento da curva experimental e que a curva

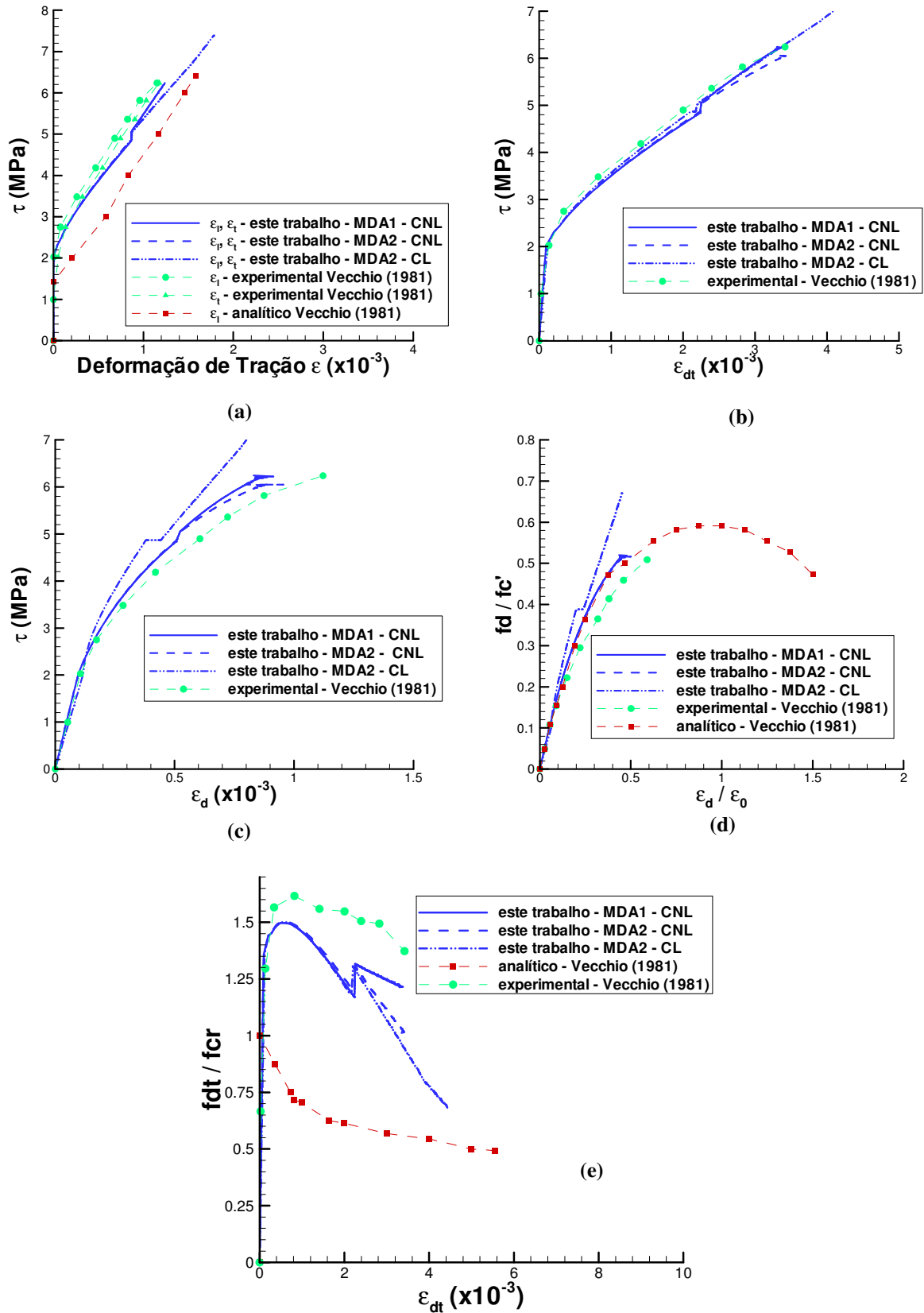


Figura 8: curvas do painel PV27 de (a) $\varepsilon_l = \varepsilon_t \times \tau$; (b) $\varepsilon_{dt} \times \tau$; (c) $\varepsilon_d \times \tau$; (d) deformações x tensões de compressão; (e) deformações x tensões de tração

com o comportamento linear (CL) afastou-se muito da curva experimental nos níveis de carga mais altos.

As figuras 8(d) e 8(e) mostram os resultados das tensões adimensionalizadas nas duas diagonais do painel. As curvas numéricas do presente trabalho foram muito melhores nas tensões da diagonal tracionada ($\varepsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr}$) que o modelo analítico de Vecchio e foram praticamente iguais na tensão da diagonal comprimida ($\varepsilon_d / \varepsilon_0 \times f_d / f_c$) em relação ao mesmo, (para a relação constitutiva não-linear do concreto à compressão) já que a relação usada neste trabalho é baseada no modelo de Vecchio. Observa-se que a simulação para as tensões da diagonal comprimida, usando-se uma relação constitutiva não-linear (CNL), foi bem satisfatória até o nível de carga última obtido nos resultados experimentais, ao contrário da resposta com o uso da relação constitutiva linear (CL). Para a diagonal tracionada, como era de se esperar, houve pouca influência da relação constitutiva do concreto à compressão na resposta numérica obtida, como pode-se observar na figura 8(e).

O modelo de efeito de pino MDA1 simulou melhor a tensão na diagonal tracionada se comparado ao MDA2. A repentina “quebra” na curva da diagonal tracionada (figura 8(e)) foi devido à 2ª geração de fissuras. Em estruturas reais, o número de fissuras vai aumentando progressivamente, mas, no modelo de fissura incorporada, esse número é dobrado cada vez que a tensão no concreto entre fissuras atinge a resistência à tração do concreto. Isto ocasiona uma certa instabilidade do algoritmo nesse instante, sendo uma desvantagem do modelo incorporado. O que poderia ser feito para se obter uma curva mais coerente, é uma suavização de resultados unindo-se as retas finais à primeira parte das curvas.

3.2 Painel PV22

Este painel é armado horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% na direção horizontal ($\rho_t=1,785\%$) e 1,524% na direção vertical ($\rho_t=1,524\%$). O diâmetro das barras horizontais é de 6,35mm e das barras verticais é de 5,87mm. Os demais dados do painel são dados na tabela 2. Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 9, 10 e 11.

f_c (MPa)	19,6	E_s (MPa)	200.000
ε₀ (adim.)	0,002	f_{yh} (MPa)	458
f_t (MPa)	1,9	f_{yv} (MPa)	420
E_c (MPa)	19.600	G_f (N/m)	110
v (adim.)	0,25	G_s (MPa)	80.000

Tabela 2: dados do painel PV22

A curva tensão tangencial x distorção (figura 9) está muito próxima da curva experimental, apresentando bons resultados para os dois modelos de efeito de pino, com uma leve vantagem do modelo MDA1 para o trecho final da curva. Percebe-se também que a relação constitutiva para o concreto comprimido começa a se tornar muito importante para os níveis de carga mais altos, como ocorreu no painel PV27. Este painel também sofreu ruptura devido ao esmagamento do concreto.

Novamente, a “quebra” na curva próxima ao nível de tensões de 4MPa indica a formação da segunda geração de fissuras. Ressalta-se que os resultados numéricos obtidos são mais próximos dos experimentais se comparados com o modelo matemático de Vecchio.

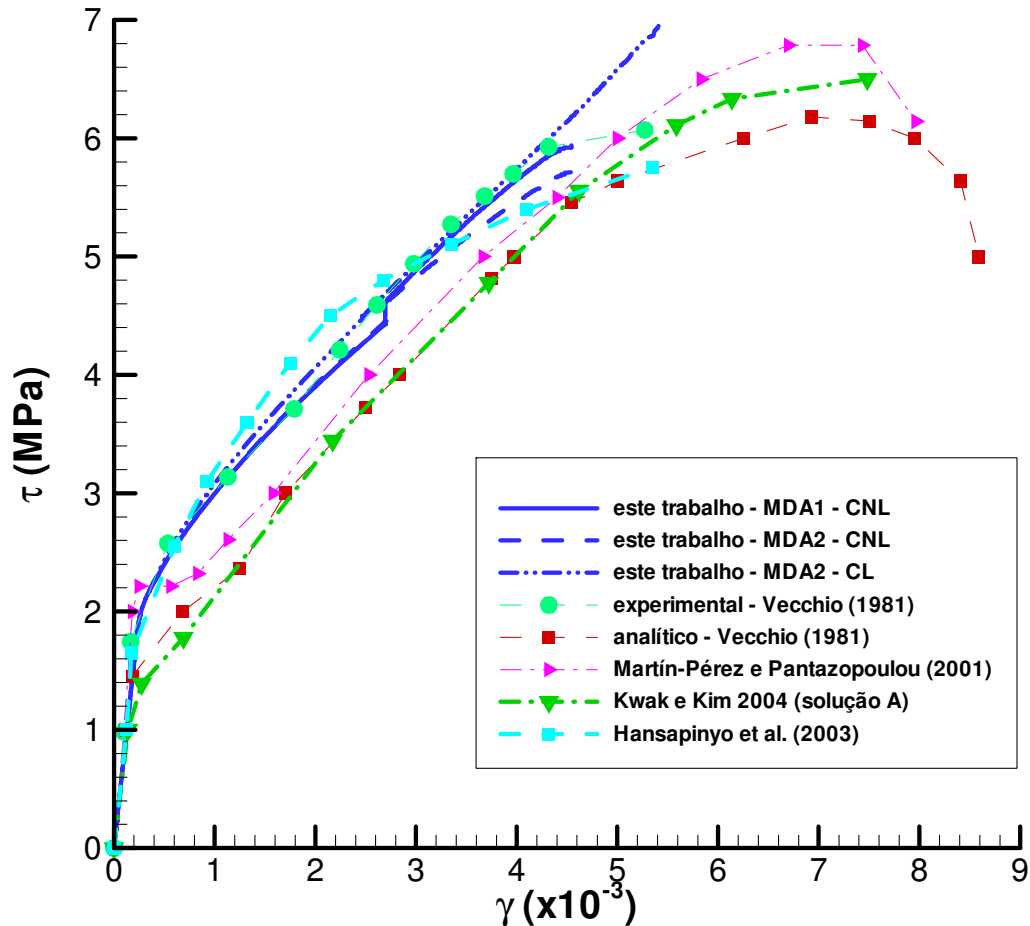


Figura 9: curva tensão tangencial x distorção do painel PV22

Em relação à curva de deformação das barras de aço (no sentido das mesmas) (figura 10(a) e 10(b)), foi obtida uma resposta muito próxima da experimental e melhor que a analítica de Vecchio (1981). Verifica-se que o modelo de Efeito de Pino MDA1 forneceu uma resposta um pouco mais próxima da experimental em relação ao MDA2. Como salientado no PV27, a relação constitutiva do concreto comprimido não possui influência na resposta numérica fornecida pela armadura.

A curva da figura 10(c) mostra a deformação da diagonal tracionada para cada incremento de deslocamentos dado. Verificou-se uma proximidade bastante boa dos resultados experimentais e numéricos do presente trabalho.

A curva da figura 10(d) mostra a deformação da diagonal comprimida para cada incremento de deslocamentos dado. Esta curva também resultou próxima dos resultados experimentais de Vecchio (1981) para o modelo constitutivo não linear do concreto comprimido. Da mesma forma que para o painel PV27, verifica-se, conforme era de se esperar, uma grande diferença na determinação da deformação da diagonal comprimida para cada estágio de tensões tangenciais, dependendo da relação constitutiva empregada.

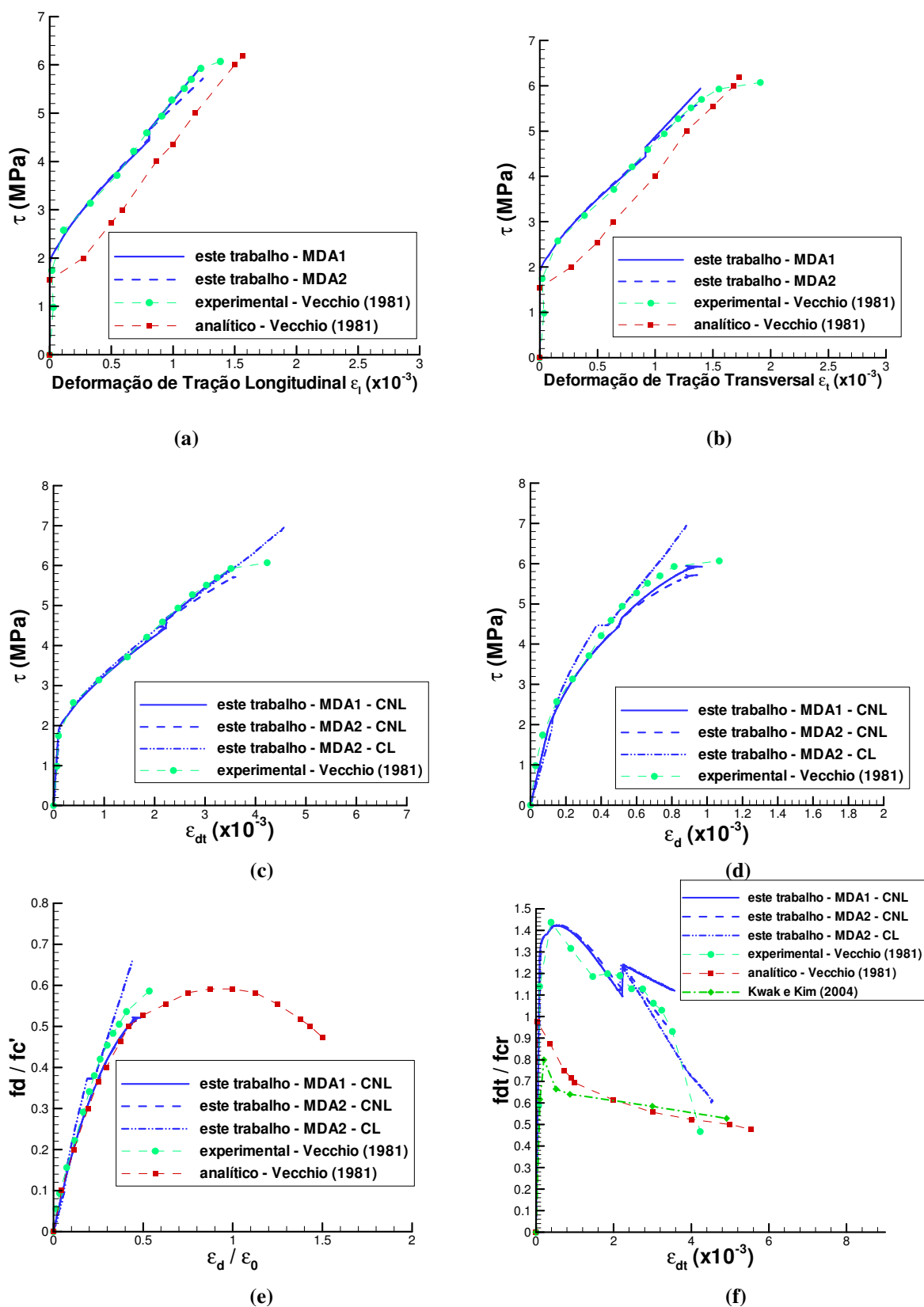


Figura 10: curvas do painel PV22 de (a) $\epsilon_l \times \tau$; (b) $\epsilon_t \times \tau$, (c) $\epsilon_{dt} \times \tau$; (d) $\epsilon_d \times \tau$; (e) deformações x tensões de compressão; (f) deformações x tensões de tração;

As figuras 10(e) e 10(f) mostram os resultados das tensões adimensionalizadas nas duas diagonais do painel. Da mesma forma que no painel PV27, as curvas numéricas do presente trabalho foram muito melhores nas tensões da diagonal tracionada ($\epsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr}$) que o modelo analítico de Vecchio e foram praticamente iguais na tensão da diagonal comprimida ($\epsilon_d / \epsilon_0 \times f_d / f_c$) em relação ao mesmo, (para a relação constitutiva não-linear do concreto à compressão) já que a relação usada neste trabalho é baseada no modelo de Vecchio. Verifica-se que a simulação para as tensões da diagonal comprimida, usando-se uma relação constitutiva não-linear (CNL), capturou muito bem o comportamento experimental, ao contrário da resposta com o uso da relação constitutiva linear (CL). Para a diagonal tracionada, como era de se esperar, houve pouca influência da relação constitutiva do concreto à compressão na resposta numérica obtida, como pode-se observar na figura 10(e). Da mesma forma que para o painel PV27, observa-se a “quebra” na curva no momento da formação da segunda geração de fissuras.

A figura 11 mostra a variação do ângulo entre as direções das deformações e tensões principais de compressão e a horizontal, com o aumento do carregamento. Em painéis com taxas de armadura diferentes nas duas direções, o ângulo de distorção do painel e, conseqüentemente, o ângulo da direção das fissuras são variáveis por causa desta diferença nas armaduras, sendo inclusive que, além de variáveis, os ângulos das deformações e tensões principais são diferentes, o que não é previsto pelo modelo analítico de Vecchio (1981). Os modelos de efeito de pino MDA1 e MDA2 forneceram uma resposta muito próxima entre eles e representaram muito bem a variação dos ângulos experimentais. O método numérico para a determinação deste ângulo encontra-se em David (2010). Como o modelo numérico fornece um ângulo apenas, é essencial que a variação deste ângulo fique entre as variações dos dois ângulos experimentais (de deformação e de tensão), e que acompanhe o comportamento dos mesmos. Pode ser observado também que o modelo de Kwak e Kim (2004) também fornece uma resposta numérica muito próxima da obtida neste trabalho. O modelo empregado para o concreto à compressão não influencia na determinação da resposta numérica da variação do ângulo de distorção do painel, como pode ser observado na figura, onde o modelo MDA2 (CL) e MDA2 (CNL) resultaram idênticos. Desse modo, para os próximos painéis, será apresentada apenas uma curva para o modelo MDA2.

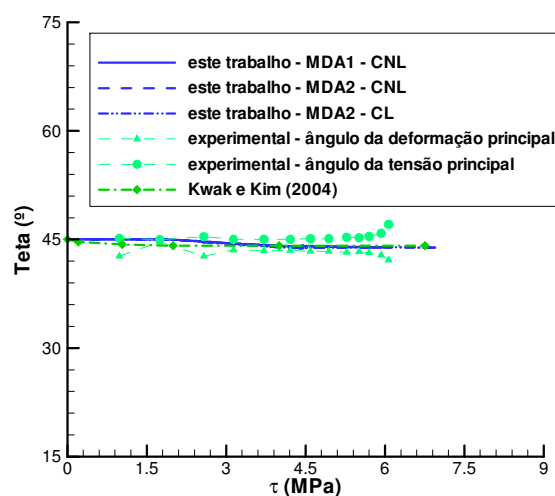


Figura 11: variação do ângulo de distorção do painel PV22

3.3 Painel PV9

Neste painel, a estrutura é armada horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% em cada direção ($\rho_l = \rho_t = 1,785\%$). O diâmetro das barras é de 6,35mm. Os demais dados do painel são dados na tabela 3 e a descrição do significado de cada parâmetro é a mesma feita para o painel PV27.

f_c (MPa)	11,6	E_s (MPa)	200.000
ϵ_0 (adim.)	0,0028	f_{yh} (MPa)	455
f_t (MPa)	1,0	f_{yv} (MPa)	455
E_c (MPa)	8.300	G_f (N/m)	30
ν (adim.)	0,25	G_s (MPa)	80.000

Tabela 3: dados do painel PV9

Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 12,13 e 14.

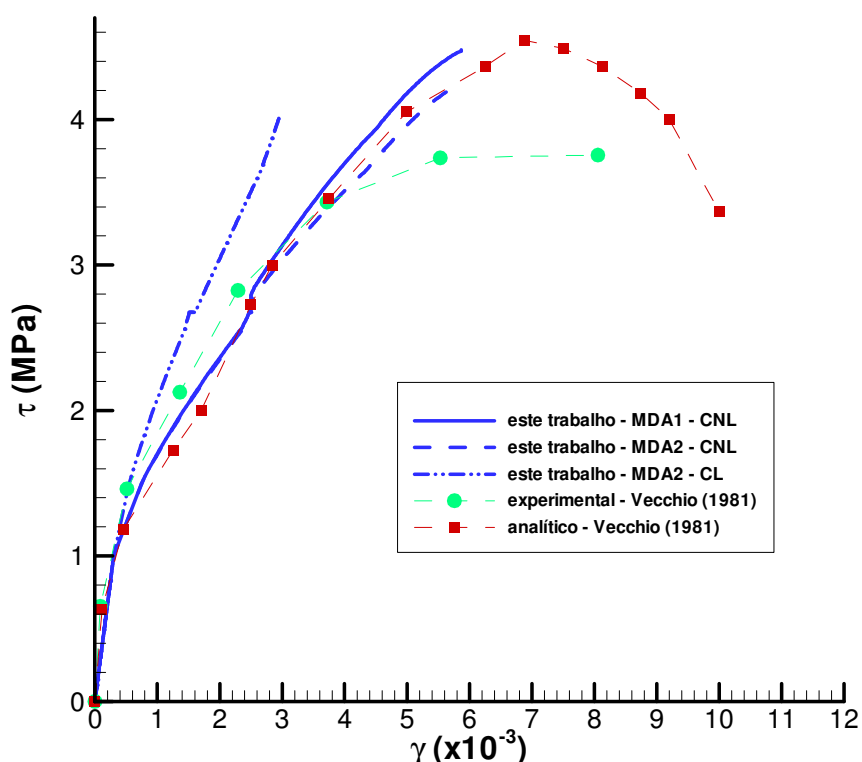


Figura 12: curva tensão tangencial x distorção do painel PV9

A curva tensão tangencial x distorção (figura 9), usando o modelo não-linear do concreto comprimido, não está muito próxima da curva experimental para os níveis mais altos de carga, mas já representa uma resposta muito melhor se comparada com a resposta obtida com o modelo linear. Este painel é muito importante na determinação da influência do concreto comprimido na resposta, já que para este caso, o concreto possui a resistência à compressão e o módulo de elasticidade muito baixos e já se comporta de forma não-linear para baixos níveis

de carga. Neste problema, a não-linearidade e esmagamento do concreto são muito importantes ao longo de todo o carregamento, sendo a resposta do painel muito mais condicionada ao comportamento do concreto do que da armadura. Salienta-se que, como estamos aplicando o modelo de Vecchio para o comportamento do concreto comprimido, as respostas numéricas obtidas por Vecchio e as deste trabalho são muito parecidas, já que o comportamento do concreto à compressão é o fator preponderante na resposta nesse caso. Este painel apresentou uma resposta mais flexível do que o esperado.

Em relação à curva de deformação das barras de aço (no sentido das mesmas) (figura 13(a)), foi obtida uma resposta muito próxima da experimental, o mesmo que ocorreu com a analítica de Vecchio (1981), indicando que as deformações e, por conseguinte, tensões na armadura foram corretamente calculadas para cada incremento de deslocamentos.

A curva da figura 13(b) mostra a deformação da diagonal tracionada, ϵ_{dt} , para cada incremento de deslocamentos dado. Verificou-se uma proximidade boa dos resultados experimentais e numéricos do presente trabalho (para o modelo CNL), até próximo à carga de ruptura do painel. Como a resposta numérica para as tensões da diagonal tracionada é obtida via Círculos de Mohr (ver David (2010)), ela é influenciada pelas deformações nas armaduras e pela deformação da diagonal de concreto comprimida. Como o concreto comprimido possui uma influência muito significativa para este caso, conforme já salientado anteriormente, conseqüentemente, a resposta numérica da deformação da diagonal tracionada sofreu uma grande influência no uso da lei constitutiva para o concreto comprimido, conforme pode ser observado na mesma figura, onde a diferença entre as respostas MDA2-CL e MDA2-CNL é muito grande.

A curva da figura 13(c) mostra a deformação da diagonal comprimida para cada incremento de deslocamentos dado. Aqui já fica clara a completa inviabilidade em usar uma lei constitutiva linear para um concreto comprimido que possui resistência e módulo de elasticidade muito baixos. Conforme pode ser observado nesta figura, a curva MDA2-CL representa algo totalmente irreal, enquanto que a curva MDA2-CNL já apresenta um comportamento satisfatório do resultado experimental.

As figuras 13(d) e 13(e) mostram os resultados das tensões adimensionalizadas nas duas diagonais do painel. As curvas numéricas do presente trabalho representaram bem as tensões da diagonal tracionada ($\epsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr}$) (até a deformação de 3×10^{-3} , que é muito próximo do nível da carga de ruptura) e as tensões da diagonal comprimida ($\epsilon_d / \epsilon_0 \times f_d / f_c$) (até o nível de tensões da diagonal comprimida igual a 55% da resistência à compressão do concreto). Para a diagonal comprimida, novamente cabem os comentários já realizados para a deformação desta diagonal, já que também as tensões calculadas com uma relação constitutiva elástico-linear representam um comportamento muito longe do experimental, enquanto que o modelo não-linear de Vecchio representa um comportamento numérico satisfatório.

3.4 Painel PV11

Neste painel, a estrutura é armada horizontalmente e verticalmente por 36 (2x18) barras em duas camadas (total de 72 barras), com uma taxa de aço de 1,785% na direção horizontal ($\rho_l=1,785\%$) e 1,306% na direção vertical ($\rho_t=1,306\%$). O diâmetro das barras horizontais é de 6,35mm e das barras verticais é de 5,44mm. Os demais dados do painel são dados na tabela 7 e a descrição do significado de cada parâmetro é a mesma feita para o painel PV27.

f_c (MPa)	15,6	E_s (MPa)	200.000
ϵ_0 (adim.)	0,0026	f_{vh} (MPa)	235
f_t (MPa)	1,2	f_{vv} (MPa)	235
E_c (MPa)	12.000	G_f (N/m)	50
ν (adim.)	0,25	G_s (MPa)	80.000

Tabela 4: dados do painel PV11

Os resultados da simulação numérica e a comparação com os ensaios experimentais de Vecchio (1981) são mostrados nas figuras 14, 15 e 16.

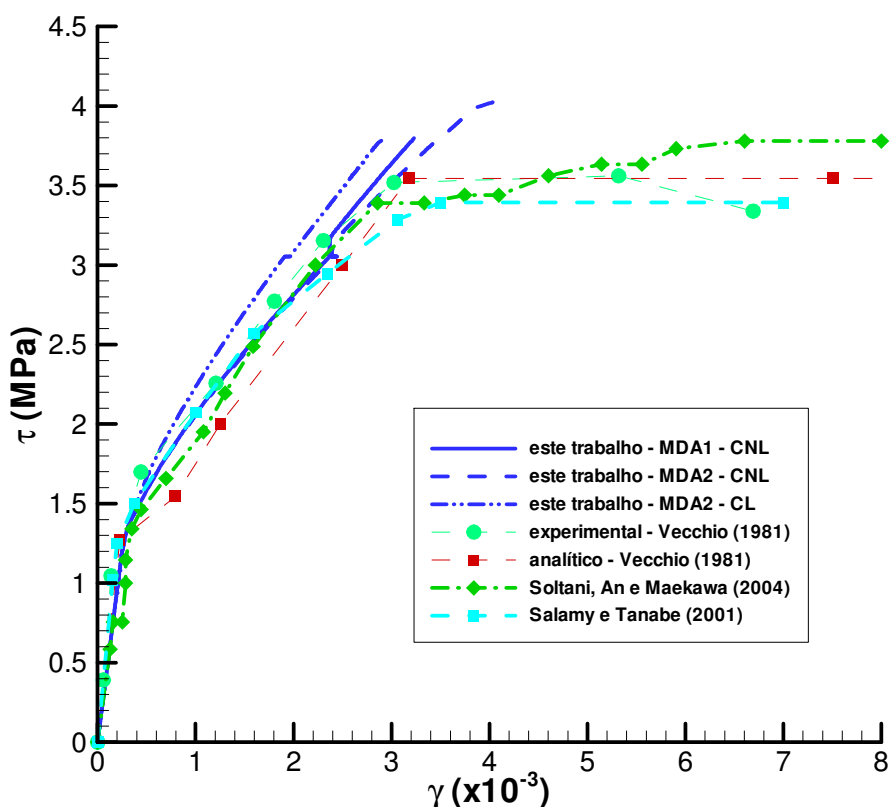


Figura 14: curva tensão tangencial x distorção do painel PV11

A curva tensão tangencial x distorção (figura 14) está próxima da curva experimental, apresentando bons resultados para os dois modelos de efeito de pino (e para ambas as relações constitutivas para o concreto comprimido), com uma leve vantagem do modelo MDA2 para o

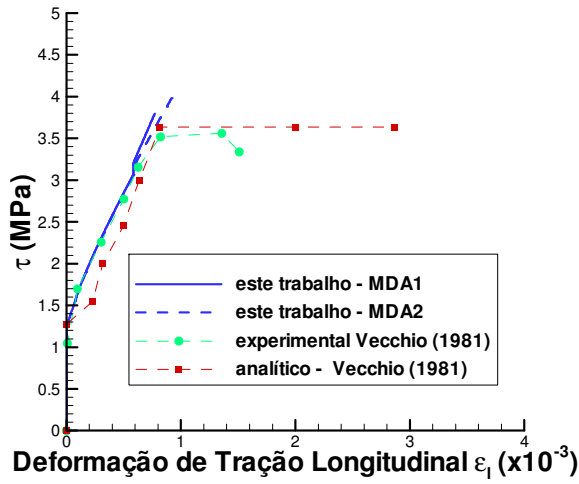
trecho final da curva. Este painel não possui uma influência muito significativa da relação constitutiva empregada para o concreto comprimido já que, para este painel, a armadura possui uma tensão de escoamento muito baixa e é ela que governa o processo de ruptura. É possível perceber a diferença nas respostas para este painel e para o painel PV9, para constatar como o efeito da não-linearidade do concreto é mais preponderante em painéis que possuem baixa resistência deste material em relação à armadura e que rompem pela falência do mesmo. A simulação realizada pelo algoritmo do presente trabalho conseguiu acompanhar os resultados experimentais e numéricos de Vecchio e os resultados de outros pesquisadores, conforme observado na figura 14.

Em relação à curva de deformação das barras de aço (no sentido das mesmas) (figura 15(a) e 15(b)), foi obtida uma resposta muito próxima da experimental e melhor que a analítica de Vecchio (1981).

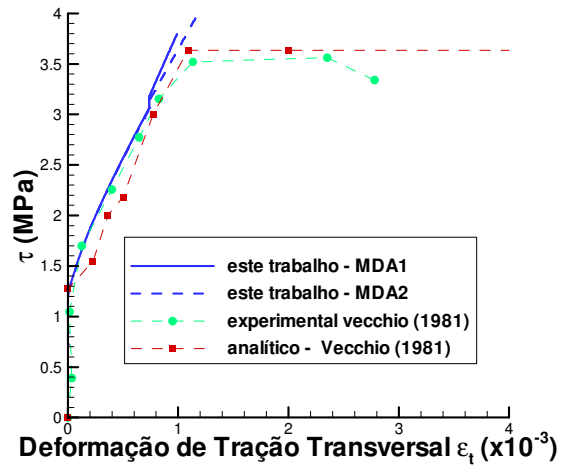
A curva da figura 15(c) mostra a deformação da diagonal tracionada, ϵ_{dt} , para cada incremento de deslocamentos dado. Verificou-se uma proximidade bastante boa dos resultados experimentais e numéricos do presente trabalho, até o nível de tensões de 3,50MPa que é próximo à carga de ruptura.

A curva da figura 15(d) mostra a deformação da diagonal comprimida, ϵ_d , para cada incremento de deslocamentos dado. Esta curva também resultou próxima dos resultados experimentais de Vecchio (1981) para os modelos CNL. O modelo linear (CL) forneceu um resultado que não representa muito bem o ensaio experimental, porém com pouca diferença, já que, para este painel, o esmagamento do concreto não é muito influente.

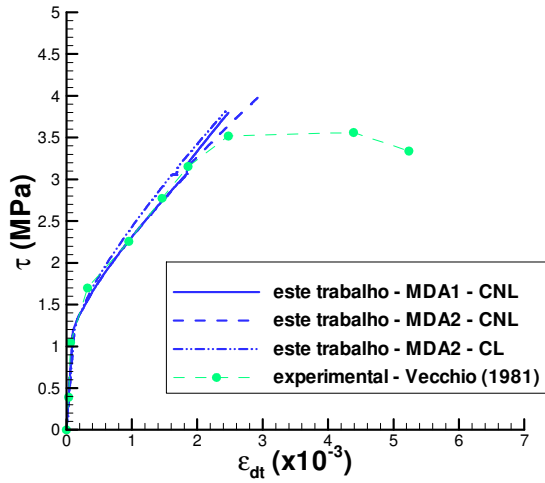
As figuras 15(e) e 15(f) mostram os resultados das tensões adimensionalizadas nas duas diagonais do painel. As curvas numéricas do presente trabalho representaram bem as tensões da diagonal tracionada ($\epsilon_{dt} \times f_{dt} / f_{cr}$) (até a deformação de 3×10^{-3} , que é muito próximo do nível da carga de ruptura) e as tensões da diagonal comprimida ($\epsilon_d / \epsilon_0 \times f_d / f_c$) (até o nível de tensões da diagonal comprimida igual a 42% da resistência à compressão do concreto). Para a diagonal comprimida, observou-se uma diferença pouco significativa na resposta obtida com os diferentes modelos de relação constitutiva para o concreto comprimido, como ocorreu para as deformações desta diagonal. Novamente, salienta-se a influência direta dos parâmetros dos materiais nos painéis ensaiados (lembrando do PV9, onde a diferença nessa curva foi muito grande entre os modelos CL e CNL). Em relação à diagonal tracionada, salienta-se que a resposta obtida pelo presente trabalho resultou mais próxima da curva experimental se comparada com as curvas de outros pesquisadores, como pode ser observado na figura 15(f).



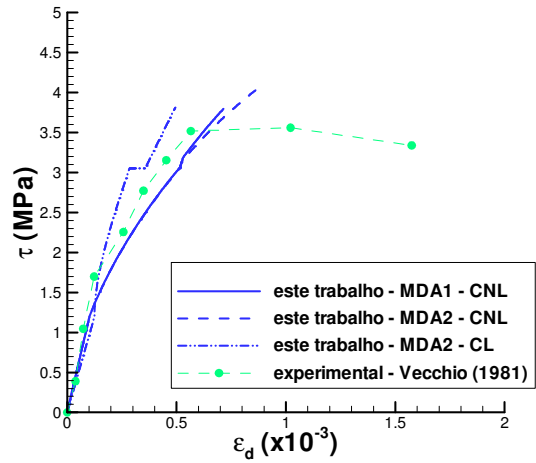
(a)



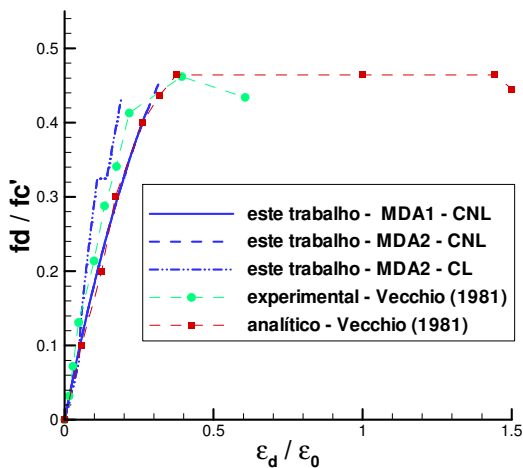
(b)



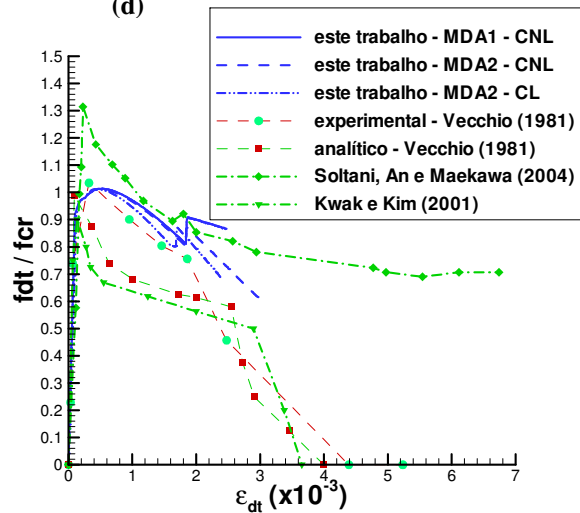
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 15: curvas do painel PV11 de (a) $\varepsilon_l \times \tau$; (b) $\varepsilon_t \times \tau$; (c) $\varepsilon_{dt} \times \tau$; (d) $\varepsilon_d \times \tau$; (e) deformações \times tensões de compressão; (f) deformações \times tensões de tração;

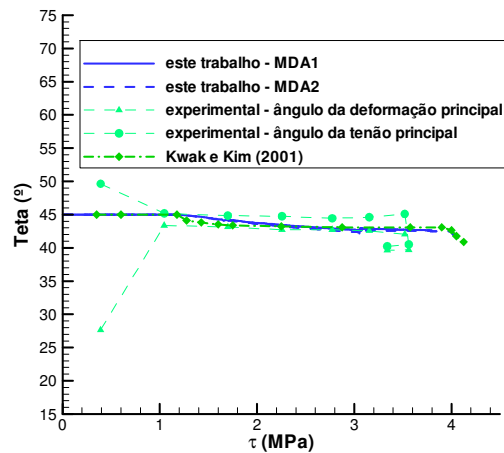


Figura 16: variação do ângulo de distorção do painel PV11

A figura 11 mostra a variação do ângulo entre as direções das deformações e tensões principais de compressão e a horizontal, com o aumento do carregamento. Os modelos de efeito de pino MDA1 e MDA2 forneceram uma resposta muito próxima entre eles e representaram muito bem a variação dos ângulos experimentais. O método numérico para a determinação deste ângulo encontra-se em David (2010). Pode ser observado também que o modelo de Kwak e Kim (2001) também fornece uma resposta numérica muito próxima da obtida neste trabalho.

4 CONCLUSÕES

O trabalho apresentou um modelo desenvolvido para a simulação numérica de painéis de concreto armado submetidos ao corte. A importância do estudo desses elementos é muito grande porque eles podem ser considerados como sendo uma pequena parte de estruturas complexas. Descrevendo-se bem uma pequena parte dessas estruturas, é possível, futuramente, estender-se o processo para a análise global das mesmas, possibilitando projetos mais econômicos e seguros.

Conforme foi observado, resultados muito bons foram obtidos na simulação numérica dos painéis apresentados. Verificou-se uma boa concordância entre as respostas experimentais e numéricas para a maioria das curvas. Foram salientadas também as diferenças em considerar-se um modelo constitutivo elástico-linear ou não-linear para o concreto comprimido, constatando-se a importância desta relação em cada um dos painéis apresentados. Foram também apresentados dois modelos diferentes para a consideração do efeito de pino nos painéis e as respostas numéricas obtidas com o uso dos mesmos, sendo que é um efeito muito importante nesse tipo de estrutura e não pode ser negligenciado.

Finalmente, ressalta-se a importância do estudo da fissuração em estruturas de concreto armado para o melhor entendimento do comportamento estrutural dos materiais e assim, cada vez mais, desenvolve-se um maior conhecimento sobre as estruturas executadas, havendo mais segurança aos projetistas e usuários, com menos problemas e patologias nas edificações.

5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPQ pelos recursos financeiros obtidos.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brisotto, D. S. *Um Modelo de Fissura Incorporada para Análise da Fissuração em Peças de Concreto Armado Fletidas via Mef*. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2006.
- Comité Euro-International du Béton. Ceb-Fip Code Model 1990. Bulletin D'information N. 230. *RC Elements Under Cyclic Loading – State of Art*. New York: ASCE, Publication Sales Department, 1996.
- David, C. R. P. *Simulação Numérica de Painéis de Concreto Armado Submetidos ao Corte Puro*. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2010.
- David, C. R. P.; D'avila, V.M.R.; Bittencourt, E. Simulação Numérica de Painéis de Concreto Armado Submetidos ao Corte. *In: 51º Congresso Brasileiro do Concreto*, Curitiba –Brasil, 2009.
- D'avila, V.M.R. *Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos*. Tese (Doutorado Em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2003.
- D'avila, V.M.R.; Brisotto, D.S.; Bittencourt, E. Numerical Simulation of Cracking in Reinforced Concrete Members by an Embedded Model. *Engineering Computations*. Emerald, London, U. 25, N° 8, P.739 – 763, 2008.
- Dvorkin, E.N., Cuitiño, A.M., Gioia, G. Finite Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distorsions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.30, Pp.541-564, 1990.
- Dvorkin, E. N., Vassolo, S. A Quadrilateral 2-D Finite Element Based on Mixed Interpolation of Tensorial Components. *Engineering Computations*, Vol.6, Pp.217-224, 1989.
- Elwi, A.E.; Hrudrey, M. Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics*. ASCE, V.115, N.4, P.740-754, New York, 1989.
- Hansapinyo, C.; Pimanmas, A.; Maekawa, K.; Chaisomphob, T. Proposed Model of Shear Deformation of Reinforced Concrete Beam After Diagonal Cracking. *Journal of Materials, Concrete Structures Pavements*, JSCE, N. 725, Vol. 58, P. 305-319, Pathumthani, Tailândia, 2003.
- Hillerborg, A.; Modéer, M.; Peterson, P.E. Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements. *Cemente and Concrete Reserch*, v.6, p.773-782, 1976.
- Kwak, H.G.; Kim, D.Y. Nonlinear Analysis of RC Shear Walls Considering Tension-Stiffening Effect. *Computer and Structures*, V. 79, P. 499-517, 2001.
- Kwak, H.G.; Kim, D.Y. Material Nonlinear Analysis of RC Shear Walls Subject to Monotonic Loadings. *Engineering Structures*, v. 26, p. 1517-1533, 2004.
- Martín-Pérez, B.; Pantazopoulou, S.J. Effect of Bond, Aggregate Interlock and Dowel Action on The Shear Strenght Degradation of Reinforced Concrete. *Engineering Structures*, v. 23, p. 214-227, 2001.
- Oliver, J.; Linero, D.L.; Huespe, A.E.; Manzoli, O.L. Two-Dimensional Modeling of Material Failure in Reinforced Concrete by Means of a Continuum Strong Discontinuity Approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V. 197, P. 332-348, 2008.
- Russo, G., Zingone, G., Romano, F. Analytical Solution for Bond-Slip of Reinforcing Bars in R. C. Joints, *Journal of Structural Engineering*. ASCE, Vol. 116: (2), Pp. 336-355, 1990.
- Salamy, M.R.; Tanabe, T.A. Analysis of RC Panels and Post-Peak Behavior Using Unified Plastic Model. *Journal of Materials, Concrete Structures Pavements*, JSCE, N. 690, Vol.

53, P. 147-158, Japão, 2001.

Soltani, M.; An, X.; Maekawa, K. Cracking Response and Local Stress Characteristics of RC Membrane Elements Reinforced with Welded Wire Mesh. *Cement e Concrete Composites*, V. 26, P. 389-404, 2004.

Tanabe, T.A.; Yu, G.X.; Salamy, M.R. Analysis of the Localized Failure Phenomenon in Reinforced Concrete Shear Walls. *Computational Modelling of Concrete Structures*, P. 265-274, Isbn-9054109467, Balkema, Rotterdam, 1998.

Vecchio, F.J. *The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Stresses*. Thesis – Department of Civil Engineering, University of Toronto, 1981.