

ESTUDO DE LIGAÇÕES VIGA-PILAR EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Carla Wagner Matzenbacher, Américo Campos Filho e Alexandre Rodrigues Pacheco

*Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
Avenida Osvaldo Aranha, 99 – 3º andar, Porto Alegre, RS, Brasil, ppgec@ppgec.ufrgs.br,
<http://www6.ufrgs.br/engcivil/ppgec>*

Palavras chave: Elementos finitos, Concreto Armado, Nós de pórtico.

Resumo. O comportamento de ligações viga-pilar em estruturas de concreto armado é complexo e não está plenamente compreendido. Existe um número grande de variáveis interagindo para definir a capacidade resistente de um nó e mesmo extensivos programas experimentais não têm sido suficientes para cobrir todas as combinações possíveis. O objetivo deste artigo é apresentar um modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos, que permite simular o comportamento das ligações viga-pilar em estruturas de concreto armado. Os modelos constitutivos para os materiais são considerados elastoplásticos. As barras de armadura são consideradas através de um modelo incorporado. A fissuração do concreto é representada através de um modelo de fissuras distribuídas. Resultados do modelo computacional são comparados com valores experimentais disponíveis, mostrando o comportamento do diagrama carga-deslocamento e a distribuição das fissuras e tensões ao longo de toda a viga. São apresentados resultados comparativos para 4 modelos nós de pórtico ensaiados por (W. Roeser, *Zum Tragverhalten von Rahmenknoten aus Stahlbeton*, (2002)).

1 INTRODUÇÃO

Com a evolução dos computadores de grande capacidade de processamento, diversos métodos numéricos têm sido desenvolvidos para o estudo do comportamento das estruturas de concreto, possibilitando um exame mais detalhado das mesmas. O método dos elementos finitos é seguramente o processo numérico que mais tem sido usado para este tipo de estudo.

Este trabalho apresenta as formulações adotadas na elaboração de um programa numérico de elementos finitos implementado em Fortran 90. O modelo numérico é utilizado para análise de 4 modelos diferentes de nós de pórtico e os resultados são comparados com os resultados experimentais obtidos por Roeser (2002). O programa possui um pós-processador implementado em Matlab que lê os resultados obtidos para cada incremento de carga e apresenta em figuras de fácil visualização.

Os nós de pórtico são estruturas comumente utilizadas na engenharia civil. Esses nós representam as ligações viga-pilar nas mais diversas formas possíveis. Segundo Paulay e Priestley (1992) os nós podem ser classificados segundo as diferenças observadas nos mecanismos de ancoragem da armadura da viga, dividindo-os em dois grupos: externos (Figura 1 (a) a (f)) e internos (Figura 1 (g) a (j)). Nessas figuras as lajes não são desenhadas a fim de facilitar a visualização.

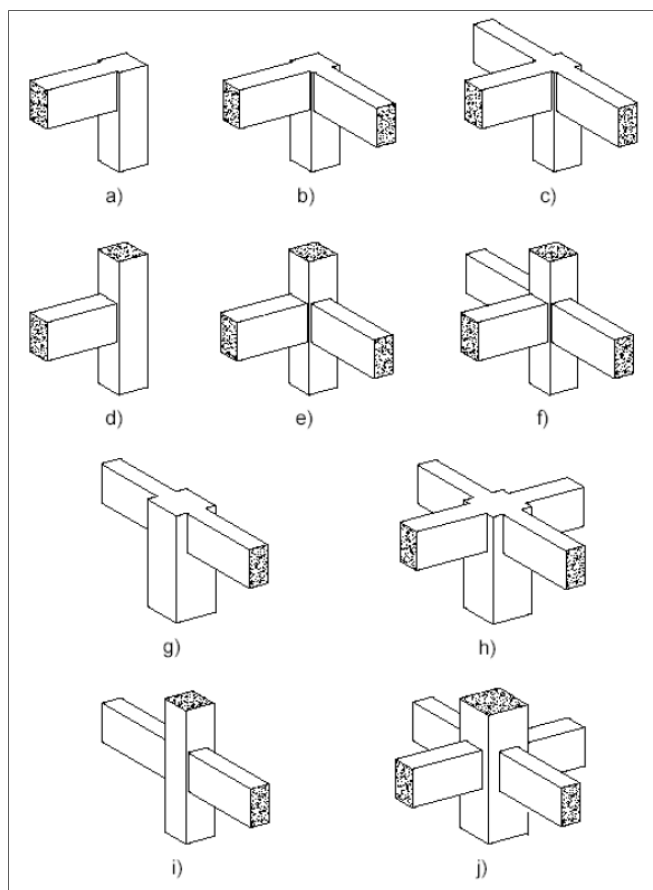


Figura 1: Geometrias usuais de nós (PAULAY E PRIESTLEY, 1992)

Até os anos setenta pouca atenção era dada aos nós de pórtico. Depois de avaliadas as tensões nos membros adjacentes, a maioria dos projetistas não considerava a alteração dessas condições na região nodal. Mesmo os nós que, frequentemente, tinham dimensões um pouco

maiores do que os membros que unia, não eram considerados como um ponto crítico (Park e Paulay, 1975).

Georgoussis (1980) enumera as razões pelas quais as investigações sobre os nós de pórtico em concreto armado foram adiante naquele momento. Mesmo com poucas informações experimentais disponíveis, podia-se perceber que existia uma grande diferença entre a resistência apresentada e a resistência assumida para os nós de pórtico quando determinados detalhamentos de armadura eram utilizados. O crescente uso de concreto de alta resistência resultava na utilização de elementos cada vez mais delgados que produziam maiores forças concentradas nos nós. O detalhamento dos nós exigia, então, uma atenção particular para assegurar o desempenho e diminuir os problemas construtivos. Identificou-se que os nós de concreto armado deveriam ter uma ductilidade adequada para resistir às grandes deformações provenientes de carregamentos sísmicos.

Estas são as motivações principais deste trabalho. Futuramente, o programa computacional será utilizado para análises diversas de nós de pórtico, considerando-se o modelo de fissuras distribuídas e incorporadas. Estes resultados irão completar a dissertação de mestrado de Matzenbacher (2011).

2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO E PARA A ARMADURA

2.1 Modelo de elementos finitos para o concreto

Para a modelagem do concreto, utilizou-se, neste trabalho, o elemento finito isoparamétrico quadrangular sugerido por Owen e Hinton (1980). Este elemento finito possui oito nós e é considerado um elemento da família Serendipity. Ele está ilustrado na Figura 2, tem dois graus de liberdade em cada nó, correspondentes às translações na direção dos eixos x-y, sistema global de coordenadas. Seu campo de deslocamento varia de forma quadrática e seu campo de deformação é linear.

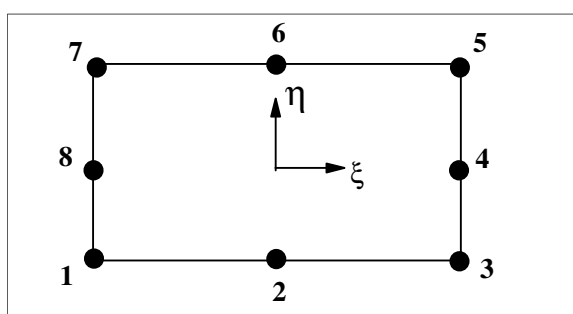


Figura 2: Elemento isoparamétrico quadrangular

A matriz constitutiva elástica utilizada é a matriz para o estado plano de tensão, apresentada na equação 1.

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson. As coordenadas naturais e os fatores de peso dos pontos de integração encontram-se em Owen e Hinton (1977).

2.2 Modelo de elementos finitos para a armadura

Para a representação da armadura, utilizou-se o modelo incorporado proposto por Elwi e Hradey (1989), onde se supõe que esta resiste apenas a esforços axiais e que há compatibilidade de deslocamentos entre seus pontos e os pontos de concreto localizados na mesma posição. Desta forma, a matriz de rigidez da armadura tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto e a matriz de rigidez total é a soma das duas. Permite-se, com este modelo, uma disposição arbitrária das barras de aço no interior dos elementos de concreto, sem a geração de novas incógnitas no problema. Podem ocorrer várias barras de aço dentro de um mesmo elemento finito de concreto. Admite-se, também, aderência perfeita entre o concreto e o aço.

Os deslocamentos ao longo da barra de armadura são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto correspondentes. A expressão final da matriz de rigidez, \mathbf{K} , do elemento resulta na equação 2.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \sum_{i=1}^{nb} \mathbf{K}_{s,i} \quad (2)$$

A variável “nb” denota o número de segmentos de barra de armadura no interior do elemento de concreto, \mathbf{K}_c é a matriz de rigidez do concreto e \mathbf{K}_s é a matriz de rigidez da barra de aço. A matriz de rigidez para cada barra de armadura é expressa pela equação 3.

$$\mathbf{K}_s = E_s A_s \int_s \mathbf{B}_s ds \quad (3)$$

Onde E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço, A_s é a área da seção transversal da barra de armadura e \mathbf{B}_s é o vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura.

As barras de armadura são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos, permitindo-se modelar barras retas e curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que, para barras curvas, são necessários três pontos.

3 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

O material concreto estrutural comporta-se de uma maneira extremamente complexa, apresentando uma resposta altamente não-linear.

A Figura 3 ilustra as três fases típicas pelas quais passa um elemento de concreto estrutural, quando submetido a uma sollicitação de flexão: a primeira, elástica-linear, com o concreto não-fissurado; a segunda, onde aparecem as fissuras e a terceira, plástica.

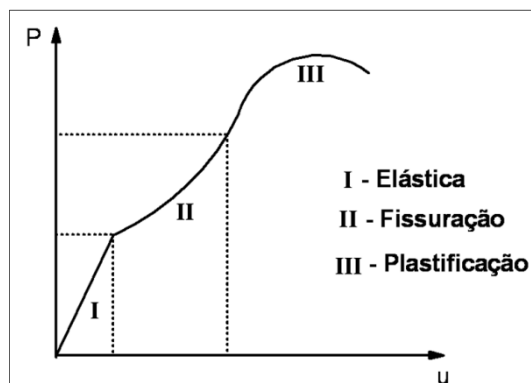


Figura 3: diagrama carga-deslocamento típico de um elemento de concreto estrutural

3.1 Modelos constitutivos para o concreto

O modelo elasto-plástico, utilizado para descrever o comportamento do **concreto comprimido**, compõe-se por um critério de ruptura, por um critério de plastificação e uma regra de endurecimento.

Admite-se, para o concreto não-fissurado, um comportamento isotrópico. Sua superfície de ruptura, f , pode ser expressa, em função das tensões principais, σ_1 , σ_2 e σ_3 , pela equação 4.

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (4)$$

As tensões principais podem ser determinadas através da formulação apresentada por Owen e Hinton (1980) que resulta na seguinte equação 5.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{2J_2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta + 2\pi/3) \\ \text{sen} \theta \\ \text{sen}(\theta + 4\pi/3) \end{pmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Com $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ e $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$.

Neste trabalho, utilizou-se o critério de ruptura, proposto por Ottosen (1977), o qual foi adotado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) e é dado pela equação 6.

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (6)$$

Onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto e:

$$\begin{aligned} \lambda &= c_1 \cos[1/3 \arccos(-c_2 \text{sen } 3\theta)], \text{ para } \text{sen } 3\theta \leq 0 \\ \lambda &= c_1 \cos[1/3 \arccos(-c_2 \text{sen } 3\theta)], \text{ para } \text{sen } 3\theta > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Com $\text{sen } 3\theta$ calculado através da equação fornecida por Owen e Hinton (1980).

Os quatro parâmetros do modelo, α , β , c_1 e c_2 , são determinados (equação 10) conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a partir da relação, k (equação 8), entre a resistência média à compressão uniaxial, f_{cm} , e a resistência média à tração uniaxial, f_{tm} (equação 9), do concreto.

$$k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}} \quad (8)$$

Onde:

$$f_{tm} = 0,14(f_{cm})^{2/3}, \text{ em kN/cm}^2 \quad (9)$$

Assim, os parâmetros do critério de Ottosen são calculados por:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{9k^{1,4}} \\ \beta &= \frac{1}{3,7k^{1,1}} \\ c_1 &= \frac{1}{0,7k^{0,9}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$c_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2$$

A Figura 4 apresenta a forma geral da superfície de ruptura do concreto no espaço tridimensional de tensões, podendo ser vista por seus meridianos e suas seções transversais.

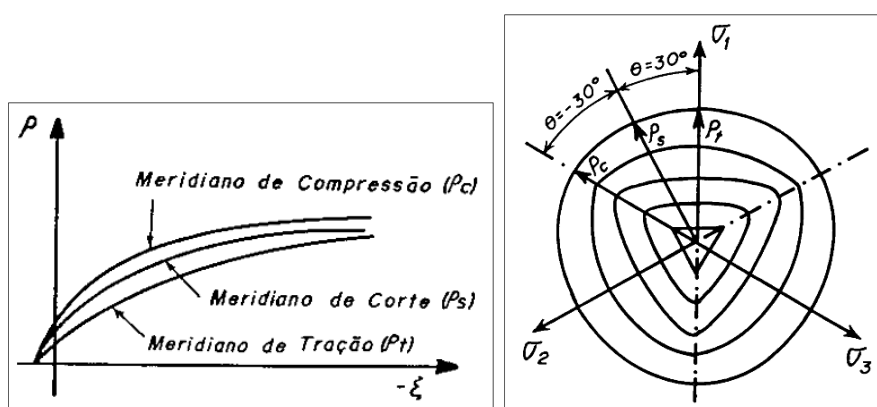


Figura 4: meridianos da superfície de ruptura (esquerda) e seções transversais da superfície de ruptura (direita)

A superfície de plastificação adotada tem a mesma forma da superfície de ruptura. Assim, considerando-se a tensão efetiva $\sigma_{ef} = F$ obtém-se, a partir da equação 6 que define o critério de ruptura, a expressão 11 para as superfícies de plastificação.

$$F = \sigma_{ef} = \frac{\lambda\sqrt{J_2} + \beta I_1 + \sqrt{(\lambda\sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2}}{2} \quad (11)$$

Considerando nula a tensão de plastificação inicial, o domínio plástico, onde o material possui um comportamento elasto-plástico com endurecimento, ocorre para valores de σ_{ef} , dentro do intervalo $0 < \sigma_{ef} < f_{cm}$, conforme ilustrado na Figura 5.

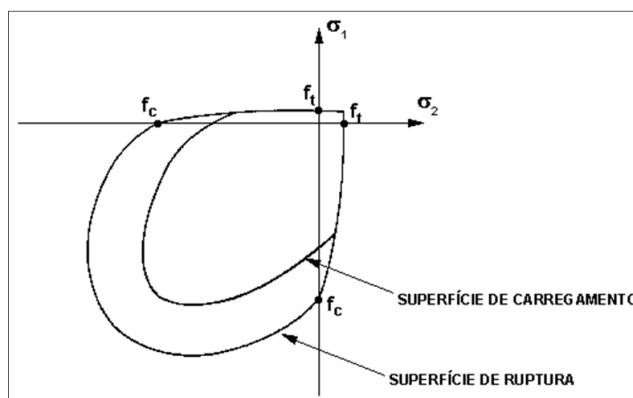


Figura 5: superfícies de ruptura e de carregamento

A regra de endurecimento define a maneira pela qual as superfícies de plastificação se movimentam (superfícies de carregamento), durante a deformação plástica. É determinada pela relação tensão-deformação plástica efetiva, onde, aplicando-se tais conceitos, é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

Neste trabalho, usou-se a curva tensão-deformação, proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), para representar o comportamento do concreto, sob compressão uniaxial, cuja expressão é apresentada na equação 12.

$$\sigma = - \frac{-\frac{E}{f_{cm}} \varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{-0,0022}\right)^2}{1 + \left(\frac{E}{f_{cm}} 0,0022 - 2\right) \frac{\varepsilon}{-0,0022}} f_{cm} \quad (12)$$

A Figura 6 apresentada a seguir representa o diagrama tensão-deformação, para o concreto comprimido.

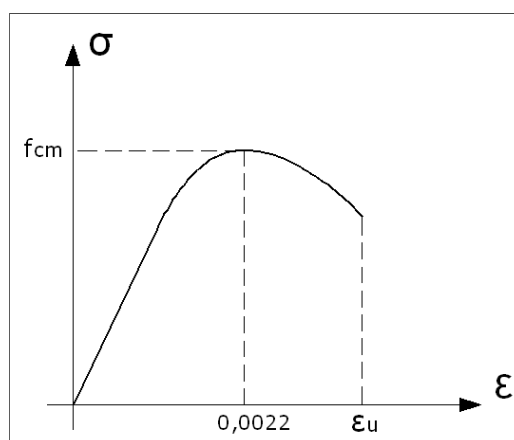


Figura 6: diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

No modelo implementado, considera-se plasticidade associada, por motivos práticos, já que há poucas evidências experimentais disponíveis para este fato, segundo Owen e Hinton (1980). Desta forma, dentro do domínio plástico, na relação tensão-deformação, o vetor de fluxo plástico é normal à superfície de plastificação.

O comportamento para o **concreto tracionado** foi modelado de acordo com os critérios apresentados a seguir. O critério de ruptura de Ottosen foi empregado para se distinguir o comportamento elástico da fratura à tração. Para um ponto, no interior do elemento, previamente não-fissurado, as tensões principais e suas direções são avaliadas. Conforme o critério estabelecido pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) e tomando-se σ_1 como a tensão máxima principal, segue-se que:

- se $\sigma_1 \geq f_{tm}/2$, o ponto de integração fissurou;
- se $\sigma_1 < f_{tm}/2$, o ponto de integração esmagou.

A fissura é formada no plano ortogonal a σ_1 . Após isso, considera-se o concreto ortotrópico, sendo desprezado o efeito de Poisson, conforme Hinton (1988), e os eixos materiais locais coincidem com as direções das tensões principais.

A curva tensão-deformação para o concreto tracionado empregada em Seixas (2003) foi adotada neste trabalho. Esta curva é composta por um ramo ascendente, que corresponde a uma resposta elástica linear, e um ramo descendente, pós-fissura, que considera a degradação linear da aderência (Figura 7). A relação constitutiva é expressa pela equação 13.

$$\sigma = \alpha \cdot f_{tm} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ctu}} \right) \quad (13)$$

Nesta equação, α é o parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente e ε_{ctu} é um parâmetro que indica a deformação limite para a qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada. Neste trabalho, adotou-se para α valores no intervalo $0,4 < \alpha < 0,5$ e para ε_{ctu} foi adotado o intervalo $0,02 < \varepsilon_{ctu} < 0,05$.

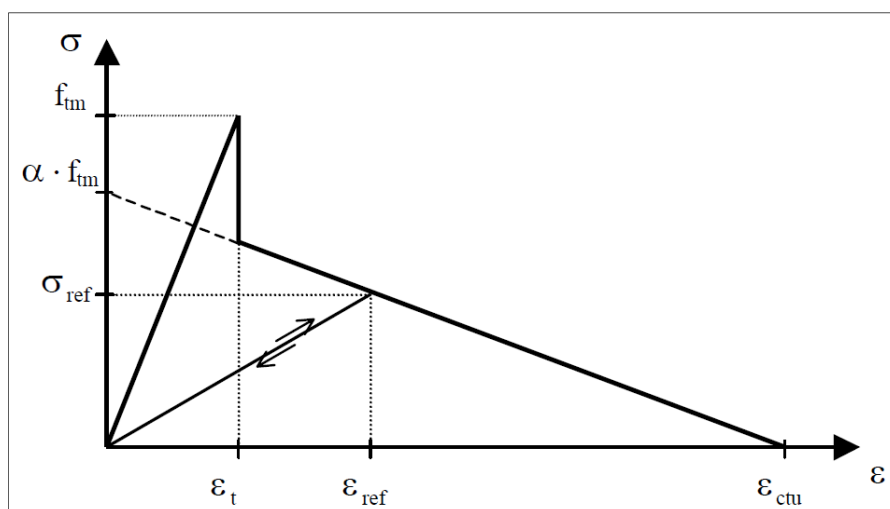


Figura 7: curva tensão-deformação para o concreto tracionado

Para o caso do fechamento total ou parcial da fissura, utiliza-se uma função de “descarga” representada na Figura 7 através da equação 14.

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \varepsilon \quad (14)$$

Assim como a tensão normal ao plano da fissura, a tensão paralela ao plano da fissura também sofre uma modificação. Nos modelos de fissura fixa, os mecanismos de transferências de tensão de corte entre as fissuras podem ser aproximados, conforme sugere Cervenka (1985), reduzindo-se o valor do módulo de elasticidade transversal do concreto, G , através de um fator β que varia entre 0 e 1. Desta forma, o novo valor para o módulo de elasticidade transversal, G_c , é dado conforme a equação 15.

$$G_c = \beta G \quad (15)$$

Em diversas análises, um valor constante foi atribuído a β , mas o mais realista seria relacioná-lo com a deformação normal à tração do concreto, ε_t . Cervenka (1985) apresentou a seguinte fórmula para β , também utilizada por Hinton (1988), a qual foi adotada neste trabalho conforme a equação 16.

$$\beta = 1 - \left(\frac{\varepsilon_t}{0,005} \right)^{k_1} \quad (16)$$

Sendo k_1 um parâmetro adotado com valor de 0,075.

3.2 Modelo constitutivo para a armadura

Nas estruturas de concreto estrutural, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços axiais. Deste modo, faz-se necessário apenas um modelo uniaxial para descrever o seu comportamento.

No modelo computacional, implementou-se um diagrama tensão-deformação bi-linear do aço. Considera-se o aço como um material elasto-plástico perfeito. Seu módulo de elasticidade longitudinal, E_s , é uma variável do problema. O material segue um comportamento elástico-linear até atingir o valor da tensão de escoamento do aço, f_y . A Figura 8 ilustra o diagrama tensão-deformação adotado neste trabalho para representar o comportamento das armaduras.

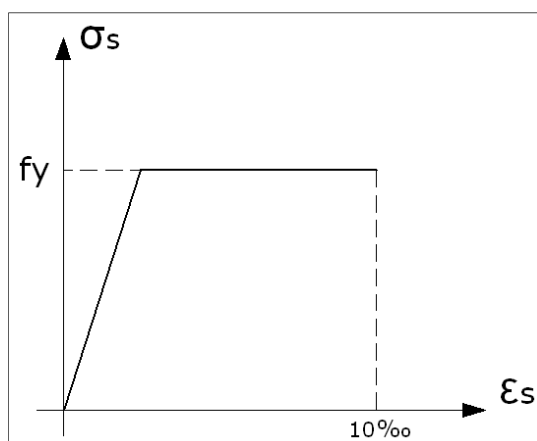


Figura 8: diagrama tensão-deformação para as armaduras

4 ANÁLISE DE NÓS DE PÓRTICO EM CONCRETO ARMADO

O item apresentado a seguir mostra a análise de nós de pórtico de concreto armado. Os resultados obtidos através do modelo computacional são comparados com os resultados experimentais apresentados por Roeser (2002). Neste trabalho são apresentados 4 casos, todos eles sendo nós externos.

As ligações analisadas incluem alguns parâmetros, como: a rigidez do concreto, o detalhamento da armadura e a relação da altura da viga em relação à largura do pilar. As principais características dos modelos estão apresentadas na Tabela 1 e na Tabela 2.

| Modelo | Seções transversais | | Concreto (MPa) |
|--------|---------------------|------------|----------------|
| | Viga (cm) | Pilar (cm) | |
| RK2 | 30/15 | 24/15 | 57,4 |
| RK3 | 30/15 | 24/15 | 57,2 |
| RK5 | 30/15 | 20/15 | 54,9 |
| RK6 | 30/15 | 20/15 | 86,5 |

Tabela 1: propriedades das seções transversais e resistência do concreto de cada nó de pórtico

| Modelo | Armaduras | | | | | | |
|--------|---------------|----------------|---------------|----------------|-------------|----------------------|-------------|
| | Viga | | Pilar | | Nó | | |
| | Longit. | Estribo | Longit. | Estribo | Vertical | Horizontal | Diagonal |
| RK2 | 2.2 ϕ 20 | ϕ 8 c/10 | 2.2 ϕ 16 | ϕ 8 c/10 | 2 ϕ 20 | 3 ϕ 8 (gancho) | 1 ϕ 20 |
| RK3 | 2.2 ϕ 20 | ϕ 8 c/10 | 2.2 ϕ 16 | ϕ 8 c/10 | 2 ϕ 16 | 4 ϕ 10 (gancho) | - |
| RK5 | 2.2 ϕ 25 | ϕ 10 c/10 | 2.2 ϕ 16 | ϕ 8 c/7,5 | 2 ϕ 16 | 4 ϕ 10 (gancho) | - |
| RK6 | 2.2 ϕ 25 | ϕ 10 c/10 | 2.2 ϕ 16 | ϕ 8 c/7,5 | 2 ϕ 16 | 4 ϕ 10 (gancho) | - |

Tabela 2: propriedades das armaduras de cada nó de pórtico

A Figura 9 apresenta a geometria de cada ligação viga-pilar. Os pilares tem largura de 24cm nos modelos RK2 e RK3, enquanto que os pilares dos modelos RK5 e RK6 possuem largura de 20cm. Além disso, estes pilares possuem geometria e distribuição de armaduras idênticas, mudando apenas a resistência à compressão de um nó para o outro. As figuras não apresentam a distribuição dos estribos para simplificar a visualização das demais armaduras.

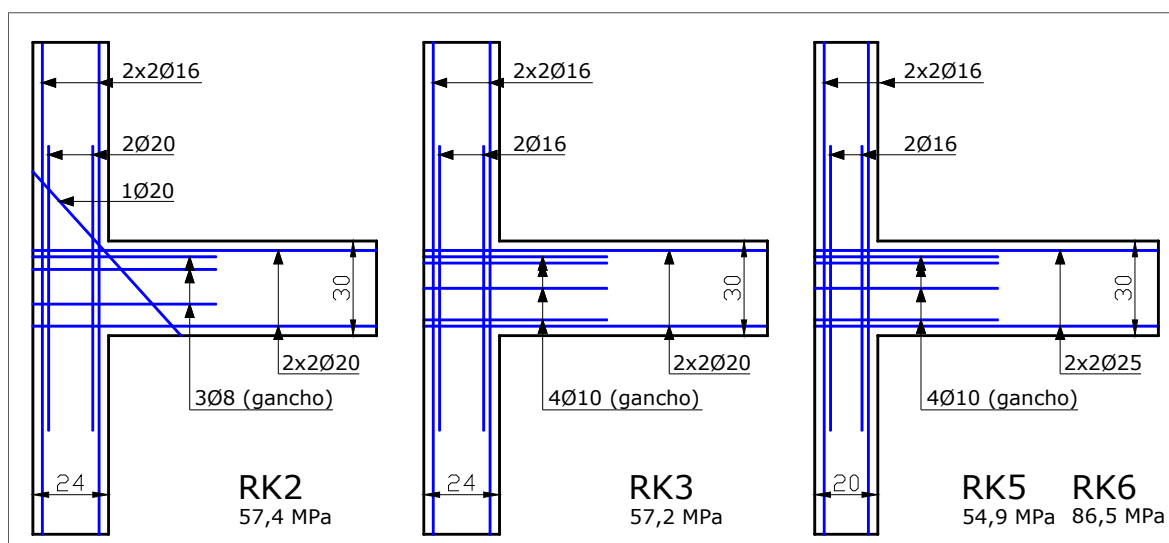


Figura 9: modelos de nós de pórtico analisados

A Figura 10 apresenta o modelo de elementos finitos adotado para resolver os modelos numericamente. A carga N_p é aplicada no início do carregamento com um valor de 500kN. Depois se inicia a aplicação da carga P dividida em pequenos valores incrementais.

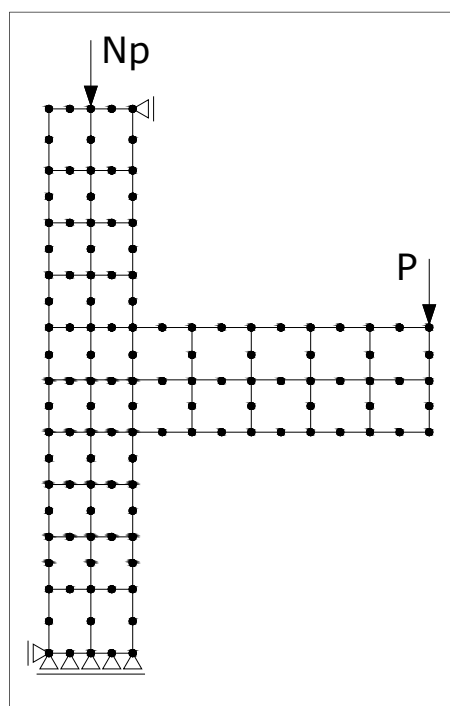


Figura 10: modelo de elementos finitos adotado

A seguir, são apresentados os resultados obtidos através do modelo computacional. As Figura 11 e 12 mostram os resultados no diagrama de carga-deslocamento. Através destes gráficos pode-se estabelecer uma comparação entre os resultados numéricos e experimentais. Em cada diagrama estão apresentados duas curvas e dois pontos. Cada ponto representa para qual incremento da curva carga-deslocamento estão apresentados os valores de tensões normais, as distribuições das fissuras e as tensões axiais na armadura (Figura 13 a 20). O asterisco vermelho representa a abertura de fissura nas duas direções.

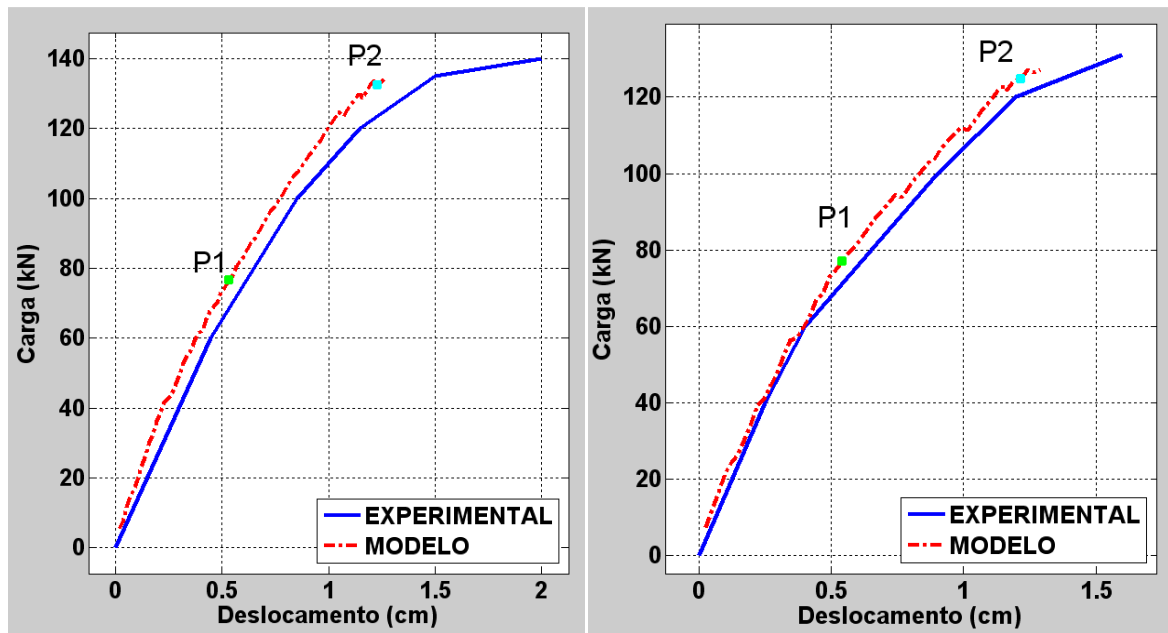


Figura 11: diagrama carga-deslocamento para o modelo RK2 (esquerda) e RK3 (direita)

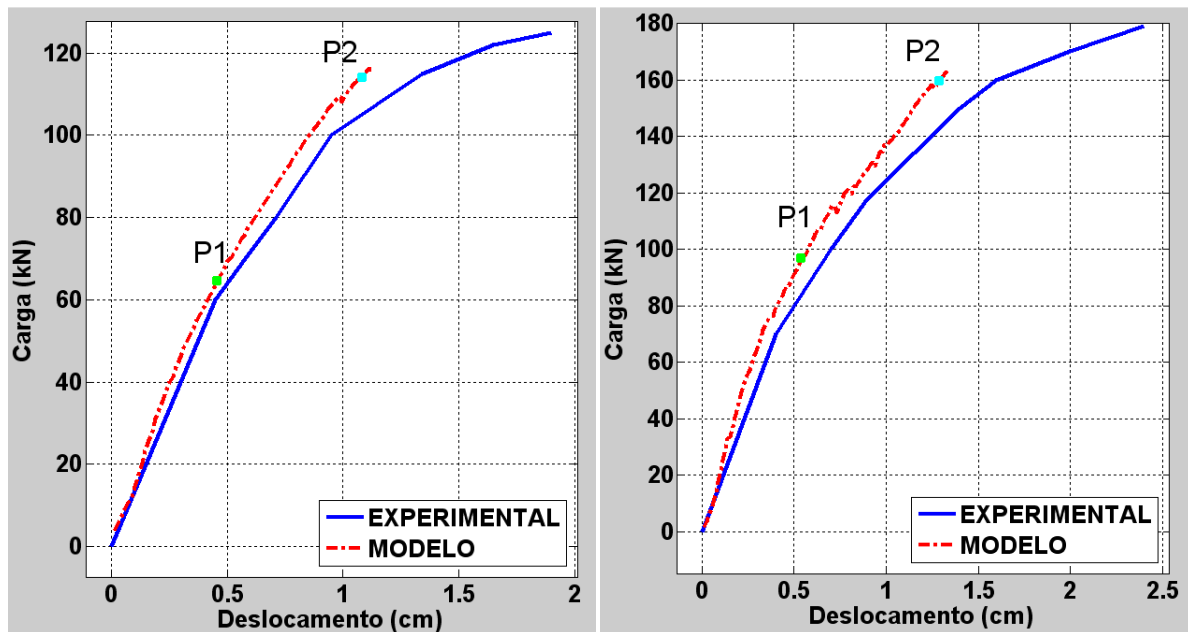


Figura 12: diagrama carga-deslocamento para o modelo RK5 (esquerda) e RK6 (direita)

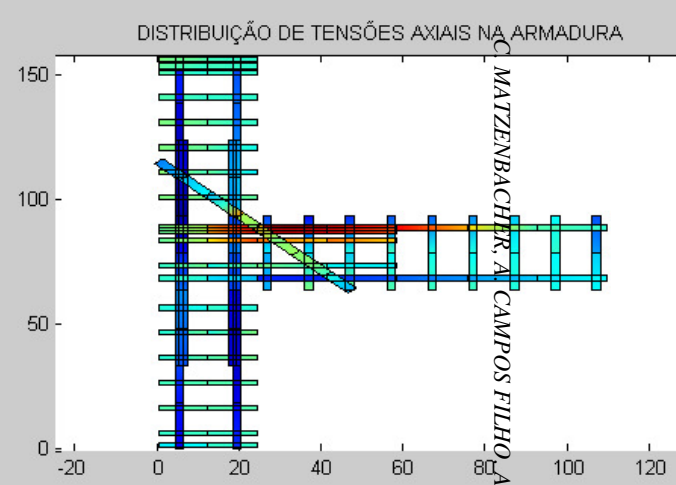
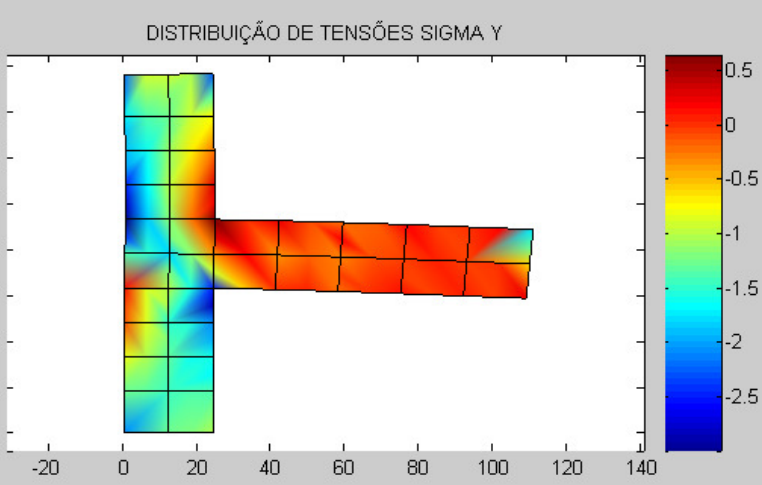
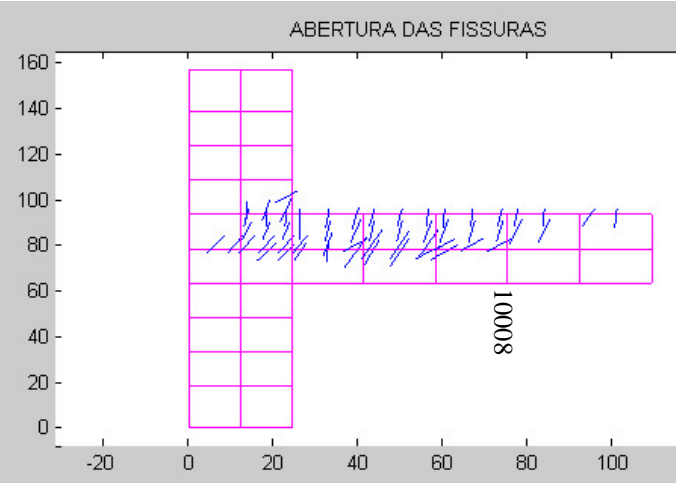
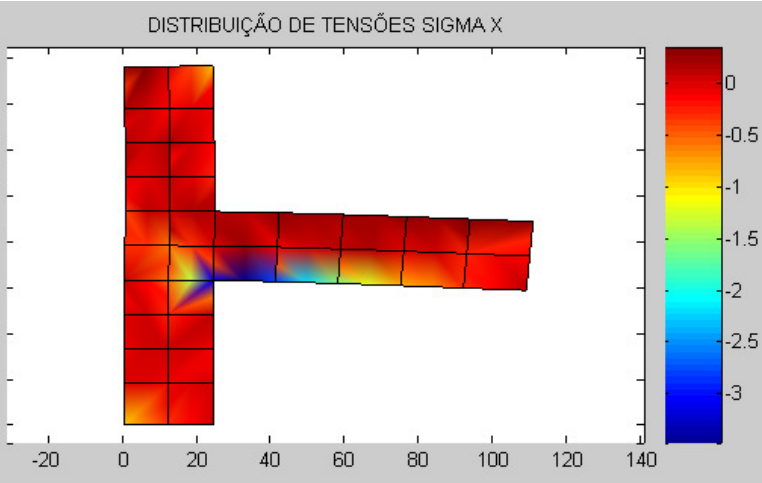


Figura 13: resultados do modelo RK2 para o ponto P1

C. MATZENBACH JR., A. CAMPOS FILHO, A. RODRIGUES PACHECO

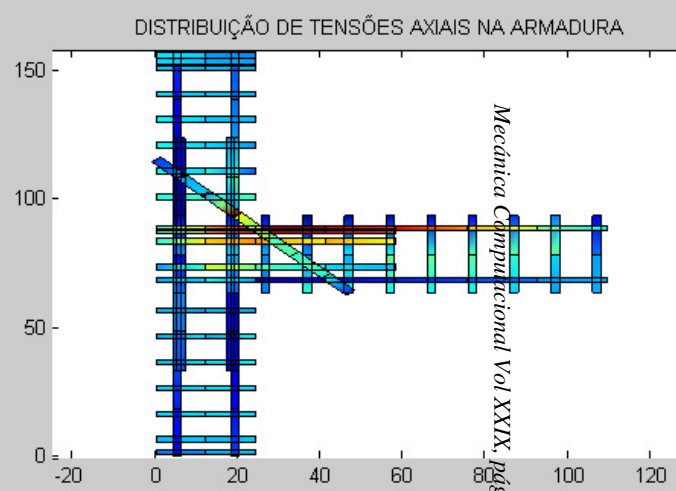
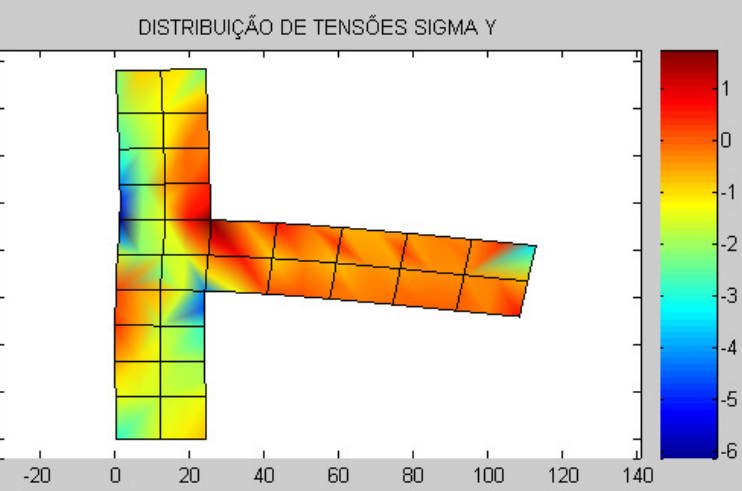
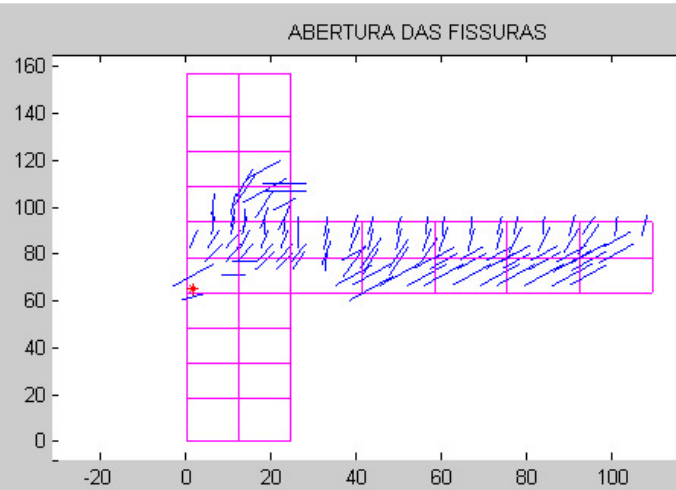
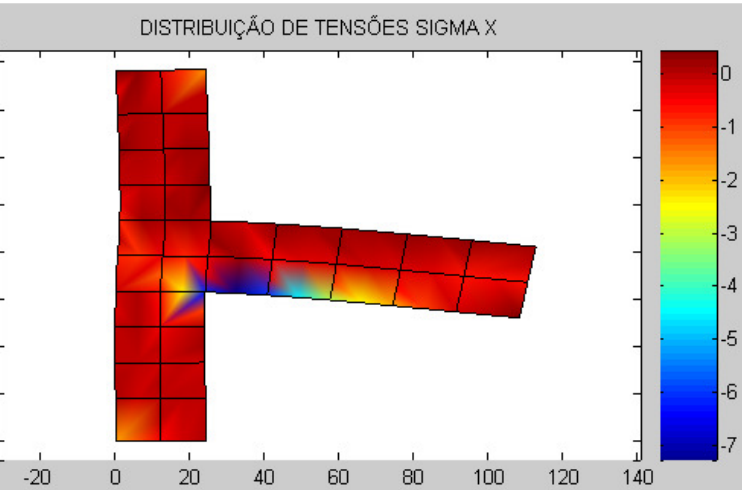


Figura 14: resultados do modelo RK2 para o ponto P2

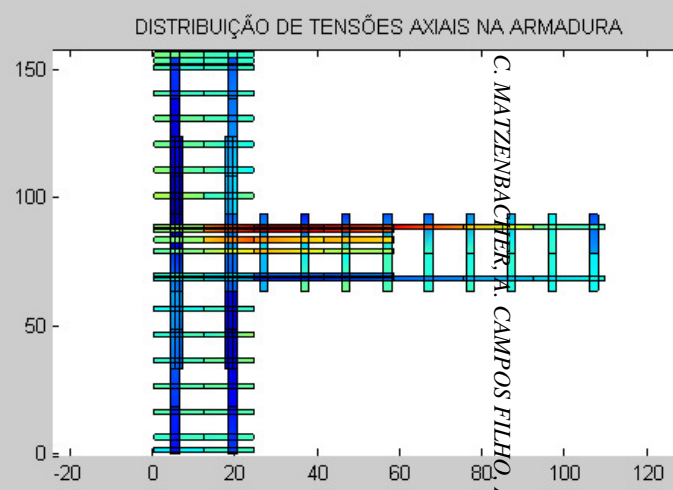
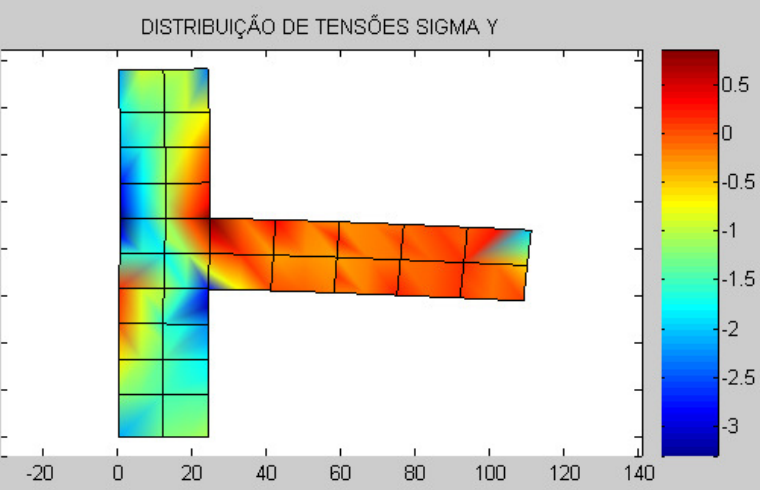
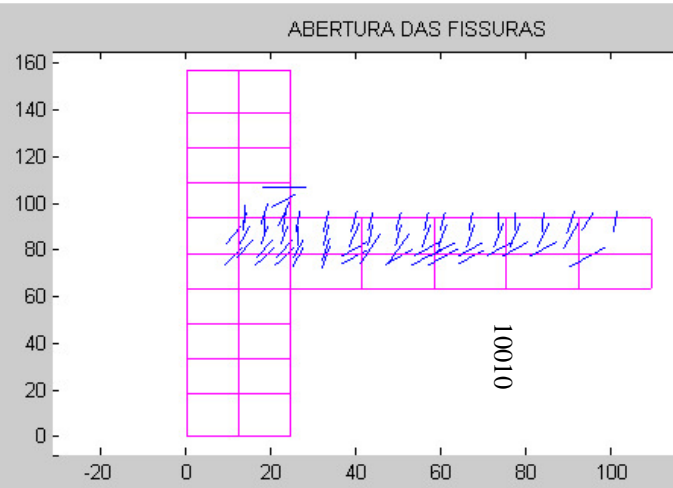
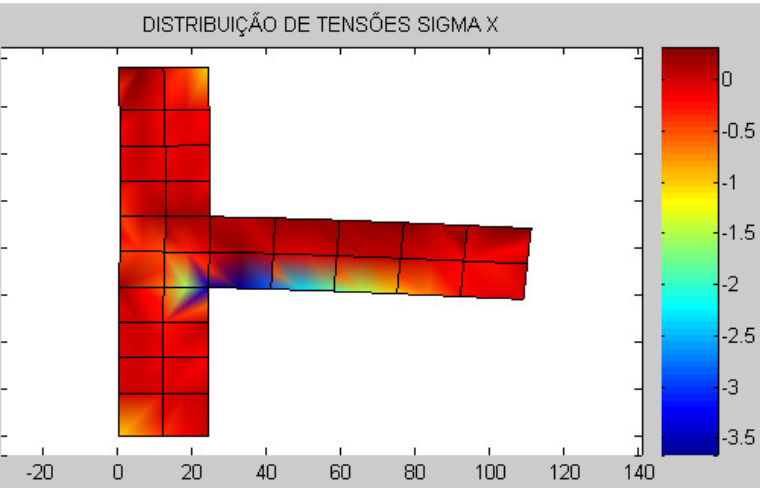


Figura 15: resultados do modelo RK3 para o ponto P1

C. MATZENBACHER, A. CAMPOS FILHO, A. RODRIGUES PACHECO

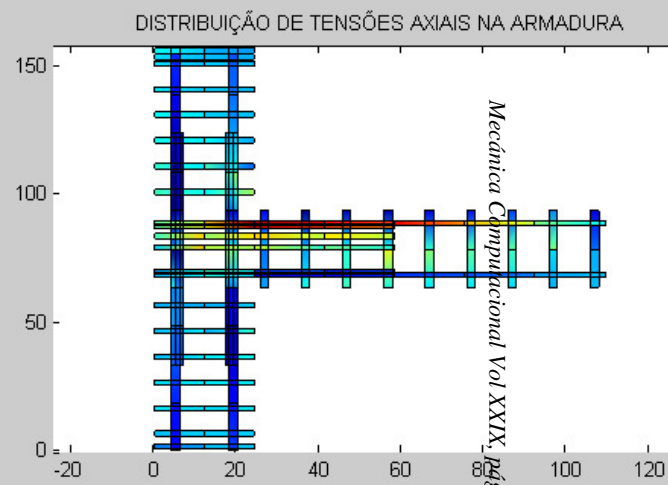
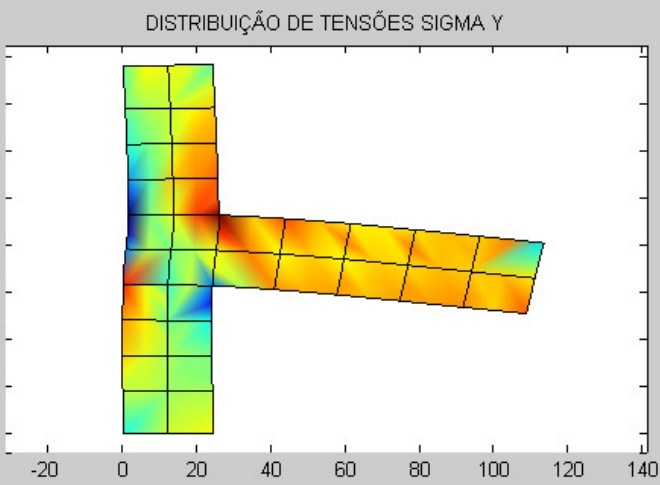
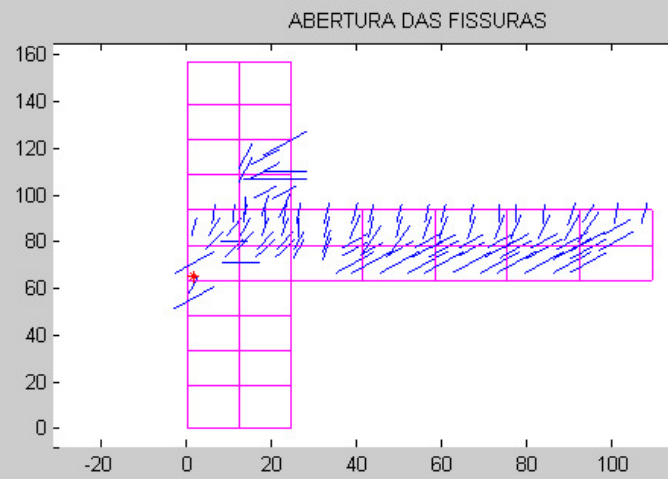
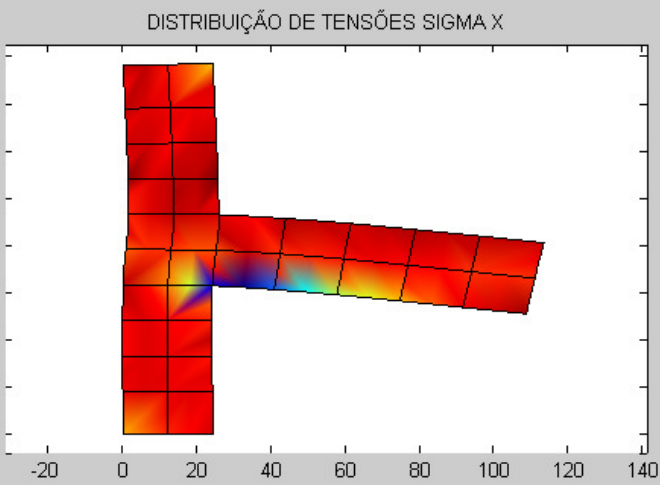


Figura 16: resultados do modelo RK3 para o ponto P2

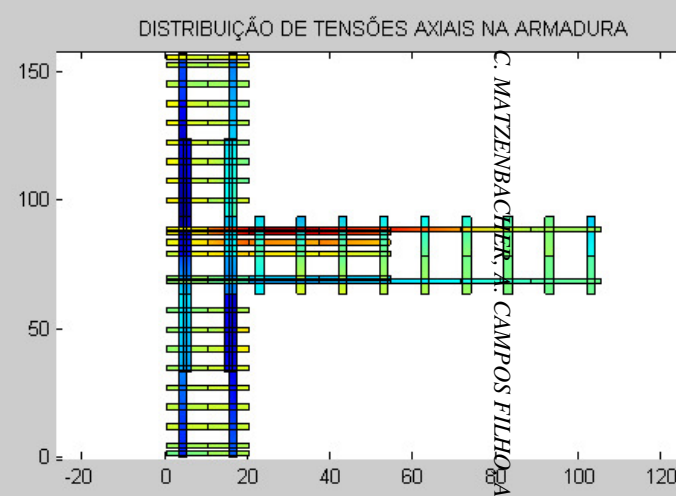
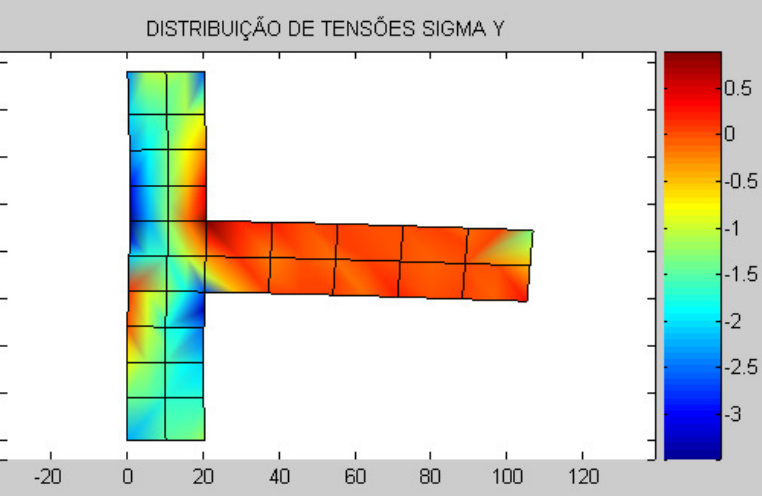
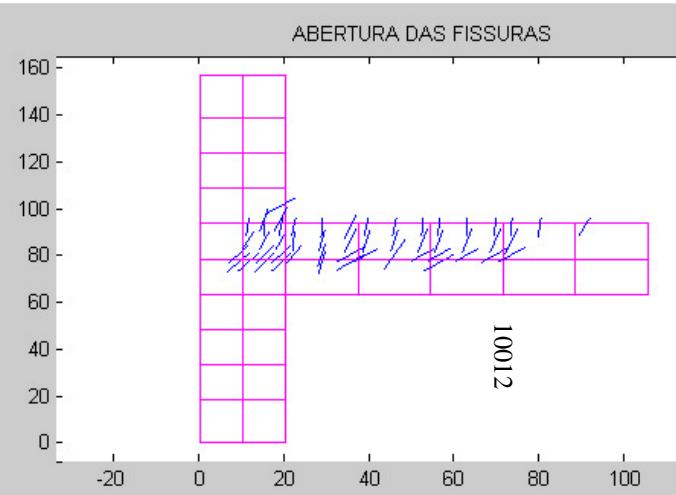
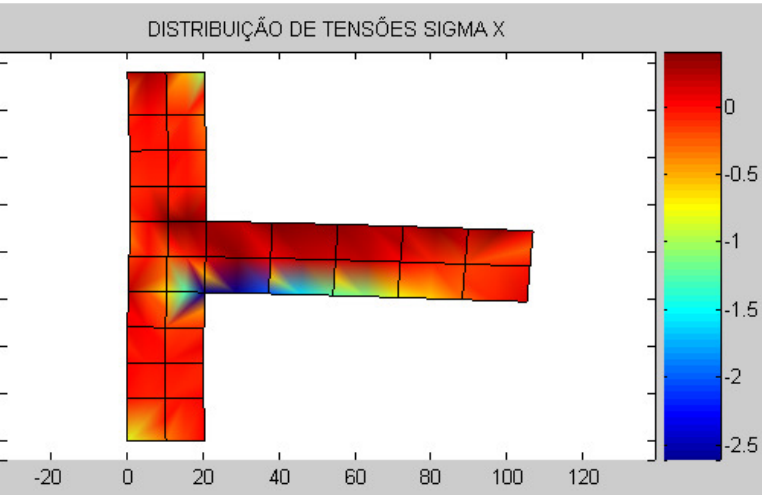


Figura 17: resultados do modelo RK5 para o ponto P1

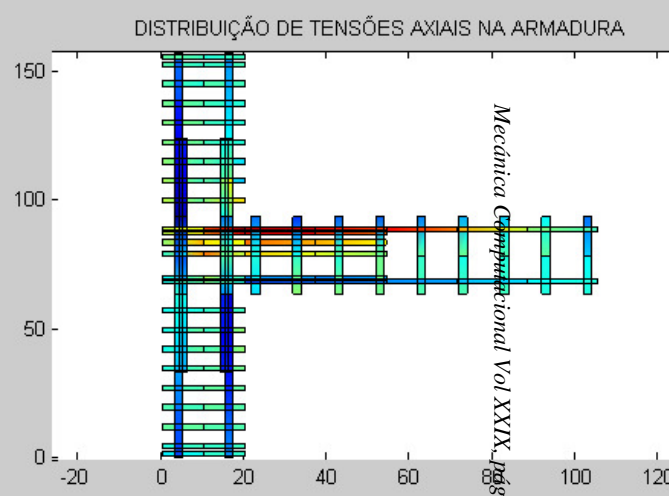
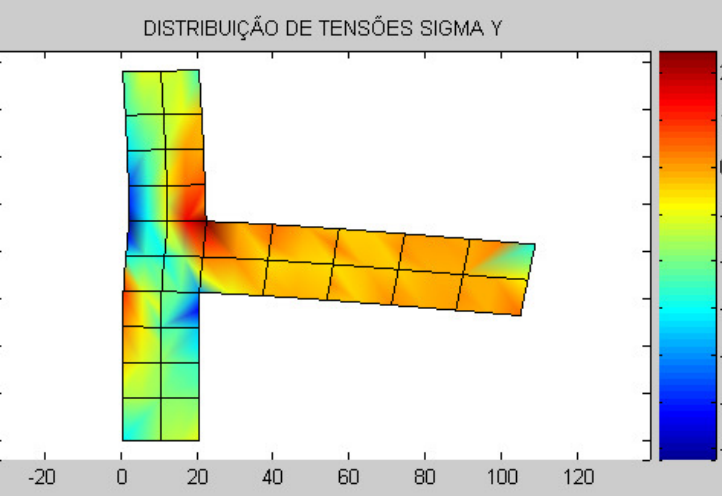
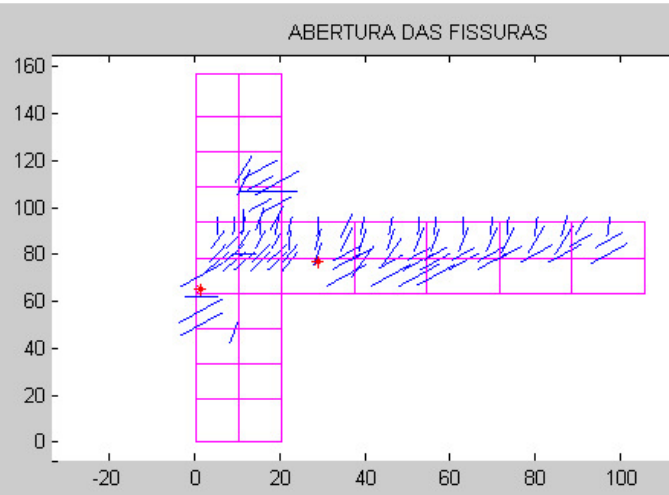
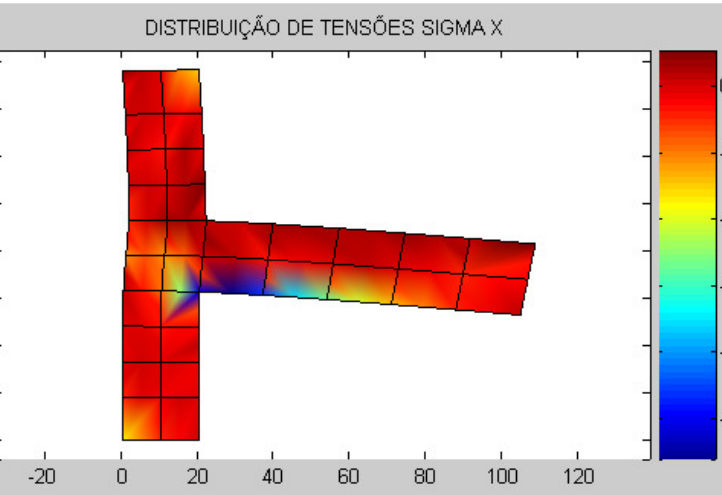


Figura 18: resultados do modelo RK5 para o ponto P2

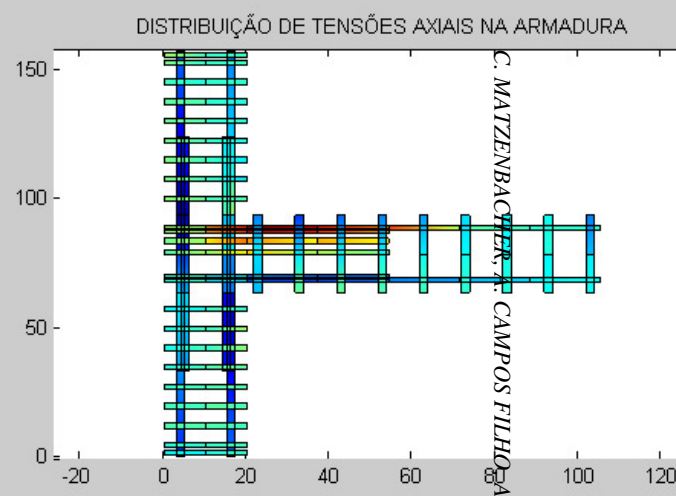
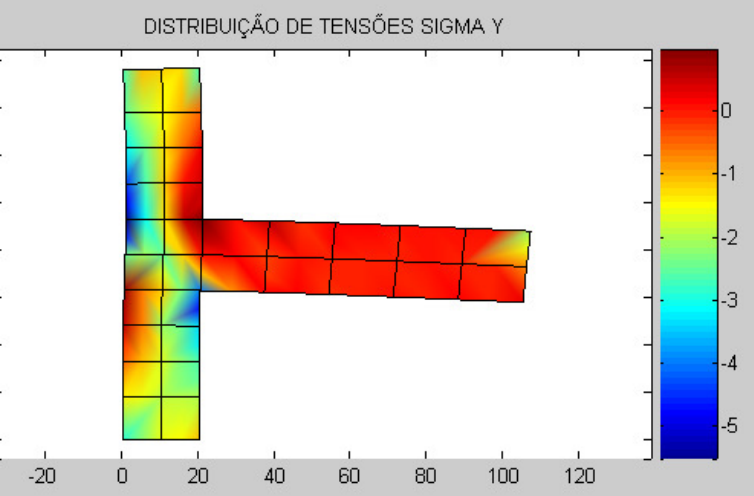
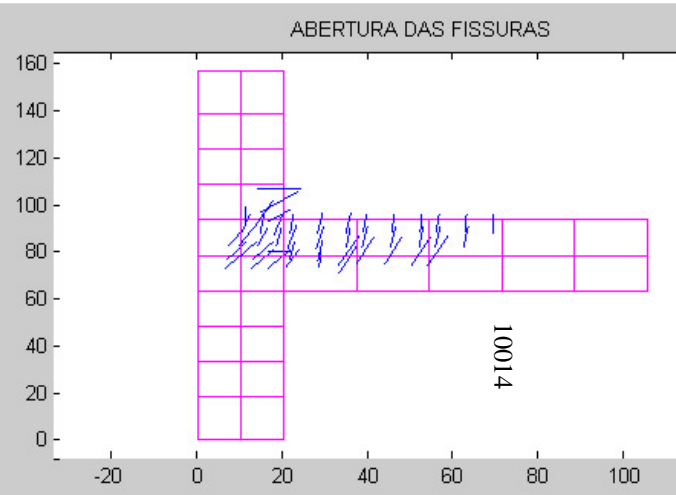
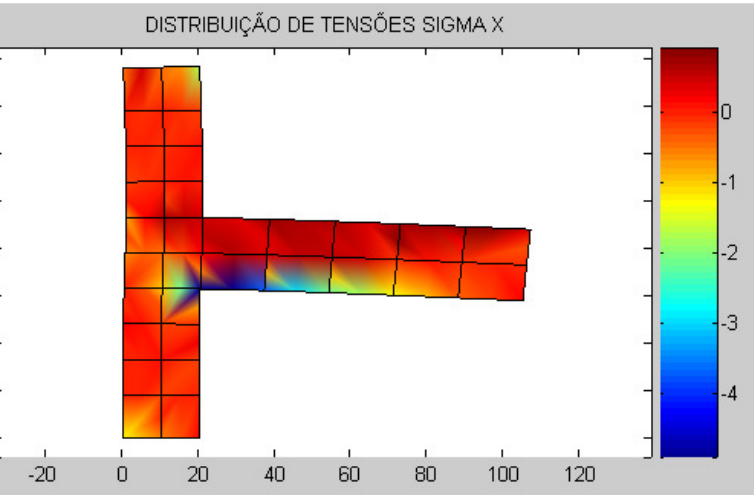


Figura 19: resultados do modelo RK6 para o ponto P1

C. MATZENBACHER, E. CAMPOS FILHO, A. RODRIGUES PACHECO

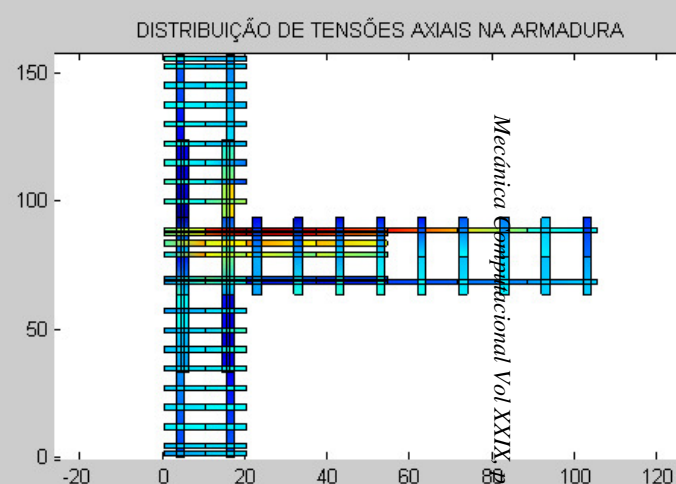
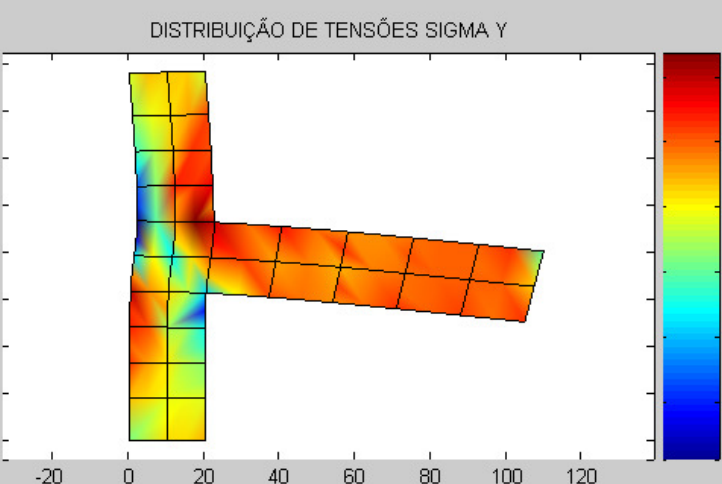
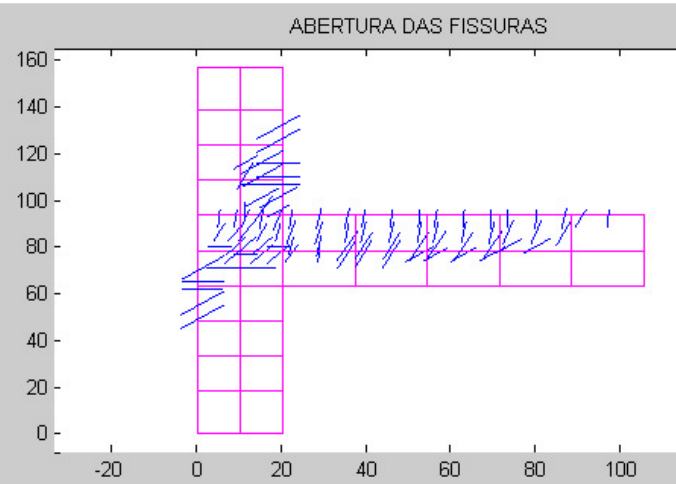
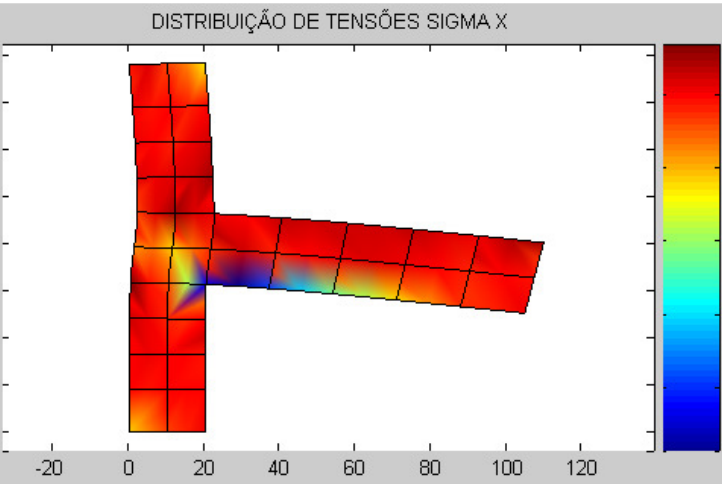


Figura 20: resultados do modelo RK6 para o ponto P2

Em todos os modelos, para as cargas intermediárias (pontos P1), as maiores tensões estão na direção Y, devido à aplicação da carga inicial N_p no pilar. Nestes gráficos pode-se verificar também o surgimento das fissuras próximas à ligação da viga com o pilar e, conseqüentemente, o desenvolvimento de tensões de tração nas armaduras superiores da viga.

Nos resultados correspondentes a carga de ruptura, as tensões em X possuem valores correspondentes à plastificação do concreto, na parte inferior da ligação da viga com o pilar. Enquanto que as tensões na armadura superior da viga atingem o patamar de escoamento, seguindo-se a ruptura do nó de pórtico.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os nós de pórtico são estruturas muito complexas, pois existe uma grande quantidade de variáveis interagindo na sua capacidade resistente do nó. Os gráficos apresentados nas análises mostram com detalhes a complexidade do comportamento das ligações, com o desenvolvimento das tensões no concreto e no aço através da fissuração.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico o apoio para realização desta pesquisa.

REFERENCES

- Cervenka, V. Constitutive model for cracked reinforced concrete. *Journal of the American Concrete Institute*. v. 82. n. 6. p. 877-882. 1985.
- Comité Euro-International du Béton. *CEB-FIP Model Code 1990*. Lausanne, 1993.
- Elwi, A.E.; Hrudey, T.M. Finite element model for curved embedded reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics Division*. ASCE. v. 115. n. 4. p. 740-745. Apr. 1989.
- Georgoussis, G. K. *Beam-Column joints in reinforced concrete*. 1980. 254 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Department of Civil and Structural Engineering. University of Manchester.
- Hinton, E. *Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells*. Swansea: Pineridge Press Limited, 1988.
- Matzenbacher, C. W. *Aplicação do método dos elementos finitos ao estudo de ligações viga-pilar em estruturas de concreto armado*. 2011. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Porto Alegre, Brasil. (em andamento)
- Owen, D. R. J.; Hinton, E. *Finite Elements in plasticity: theory and practice*. Swansea: Pineridge Press Limited, 1980.
- Owen, D.R.J.; Hinton, E. *Finite element programming*. London: Academic Press, 1977. 305p.
- Park, R.; Paulay, T. *Reinforced concrete structures*. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 1975.
- Paulay, T.; Priestley, M. J. N. *Seismic desing of reinforced concrete mansory buildings*. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- Roeser, W. *Zum Tragverhalten von Rahmenknoten aus Stahlbeton*. 2002. 152 f. Tese (Doutorado). University of Aachen, Aachen.
- Seixas, M. P. *Análise de pilares esbeltos de concreto armado confinados, através do método dos elementos finitos*. 2003. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Porto Alegre, Brasil.