

CONTRIBUIÇÃO PARA A ESTIMATIVA DE DESLOCAMENTOS EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

José J. C. Pituba^a e Rodrigo G. Delalibera^b

^a*Grupo de Modelagem Computacional de Estruturas, Universidade Federal de Goiás – UFG, Campus Catalão, Av Dr Lamartine Pinto de Avelar, 1120, Setor Universitário, Catalão-GO, Brasil, julio.pituba@pq.cnpq.br, <http://www.catalao.ufg.br/deciv>*

^b*Grupo de Modelagem Computacional de Estruturas, Universidade Federal de Goiás – UFG, Campus Catalão, Av Dr Lamartine Pinto de Avelar, 1120, Setor Universitário, Catalão-GO, Brasil, dellacivil@gmail.com, <http://www.catalao.ufg.br/deciv>*

Palavras Chave: Mecânica do dano, concreto armado, norma técnica.

Resumo. Este trabalho pretende contribuir para a melhoria do procedimento sugerido pela NBR 6118:2003 que leva em conta a rigidez do concreto fissurado na estimativa do cálculo de deslocamentos em vigas de concreto armado em regime de serviço. Um modelo constitutivo que leva em conta a anisotropia, deformações plásticas e resposta bimodular induzidas pelo processo de danificação é usado para simular o comportamento do concreto fissurado, enquanto que um comportamento elastoplástico é admitido para a armadura. Os modelos constitutivos foram implementados em um programa para análise de estruturas de barras com elementos finitos estratificados em camadas. Inicialmente, o modelo de dano é apresentado brevemente assim como a identificação paramétrica dos materiais que foram usados na confecção das vigas de concreto armado. Em seguida, são analisadas vigas com geometrias e arranjo de armaduras diferentes. As respostas numéricas são comparadas com àquelas obtidas com o emprego do procedimento sugerido pela NBR 6118:2003 (2004). Finalmente, algumas observações são discutidas baseadas nas análises efetuadas neste trabalho.

1 INTRODUÇÃO

No cálculo usual de deslocamentos em estruturas através da Resistência dos Materiais, pode-se recorrer, por exemplo, ao PTV (Princípio dos Trabalhos Virtuais). Contudo, no caso de estruturas em concreto armado, o cálculo é complexo. Isso se deve ao fato dos elementos de concreto armado serem heterogêneos compostos por concreto e aço, com módulos de elasticidade distintos acarretando em diferença de rigidez à flexão. Além disso, existe a grande possibilidade de ocorrência de diferentes comportamentos numa mesma estrutura submetida a cargas de pequena intensidade (regime de serviço), ou seja, regiões onde o concreto tracionado possui fissuras (Estádio II) e regiões onde está íntegro (Estádio I), não apresentando fissuras perceptíveis, mesmo sabendo-se que o concreto está microfissurado antes da aplicação de carregamentos, em função do seu processo de fabricação. A existência de fissuras provoca diminuição da inércia, contribuindo para a resistência ao movimento da flexão, onde teoricamente apenas o aço resiste às tensões de tração. No instante em tal fato ocorre, o momento fletor atuante na estrutura recebe a denominação de momento de fissuração M_r .

Com o avanço do conhecimento do comportamento dos materiais e das técnicas de cálculo, além do desenvolvimento de computadores cada vez mais eficientes, torna-se possível a consideração de mecanismos de comportamento das estruturas em concreto armado através de modelos matemáticos mais realísticos. Isso é refletido na própria NBR 6118:2003 (2004), onde existe um procedimento de cálculo de deslocamentos em elementos lineares considerando a não-linearidade física do concreto, onde o fenômeno principal é a fissuração que provoca a perda de resistência e rigidez desse material.

Esta tendência de cálculo leva a estruturas mais eficientes (econômicas e ao mesmo tempo seguras), porém os procedimentos de execução e a mão-de-obra devem ser aperfeiçoados sob o risco da ocorrência de um descompasso entre o que é projetado e o que é executado.

Restringindo-se a preocupação deste trabalho ao caso do projeto, a tentativa de aproximação do modelo matemático à realidade do comportamento estrutural tem a vantagem de ser possível calcular respostas mais precisas, porém tem o grande inconveniente do número excessivo de parâmetros, identificação paramétrica complexa com necessidade de ensaios experimentais bastante elaborados, custo de formulação teórica do modelo e de processamento numérico elevados. Em suma, tem-se um modelo matemático sem serventia prática. A busca por modelos matemáticos que tentem equilibrar a simplicidade com robustez de resultados é algo desejável. Dentro desse contexto, o trabalho tem objetivo de mostrar as potencialidades de emprego prático de um modelo constitutivo para o concreto baseado na Mecânica do Dano no Contínuo (MDC) seguindo o formalismo proposto em Pituba (2006a). Tal modelo já foi bastante testado em situações complexas de carregamento (Proença e Pituba, 2003, Pituba, 2006b, Pituba, 2008a, Pituba, 2008b, Pituba, 2009 e Pituba, 2010a) passando-se agora a uma iniciativa de tentar aplicar uma versão mais simples, porém eficiente, do modelo na análise de estruturas em concreto armado sob regime de serviço.

A MDC é sem dúvida capaz de descrever os processos de perda de rigidez e resistência em estruturas em concreto, onde o principal fenômeno é a fissuração, isso porque a MDC é uma ferramenta para a simulação, em meios contínuos equivalentes, da deterioração de materiais devida exclusivamente a um processo de microfissuração. A teoria procura descrever, mediante uma relação constitutiva local, a evolução do processo real de microfissuração que se desenvolve entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, representado pela ruptura do elemento de 'volume representativo' em torno do ponto considerado, o que se pode associar com a formação de uma fissura macroscópica.

O modelo de Pituba (2006a) descreve o processo de perda de rigidez, traduzida em deslocamentos maiores, através da penalização do módulo de elasticidade do material em dado ponto da estrutura e não na penalização do momento de inércia da seção estudada e, ainda mais, na representação dessa perda por uma inércia equivalente em toda viga, como se toda ela estivesse fissurada de forma homogênea. Sendo este último processo, o considerado pela NBR 6118:2003 (2004). Essas questões juntamente com a confiabilidade das respostas numéricas apresentadas pelo modelo de dano até então, associado ao baixo custo das análises numéricas frente ao elevado custo das análises experimentais, motivou a discussão que segue aqui.

Por fim, o trabalho contribui para uma discussão sobre a consideração da não-linearidade física do concreto fissurado no cálculo de deslocamentos de vigas em concreto armado sugerida em procedimentos da NBR 6118:2003 (2004). Para tanto, o modelo de dano é empregado em análises de vigas em concreto armado submetidas a carregamento de peso próprio e carga acidental com a variação de comprimento de vão, seção transversal e arranjo de armaduras. Objetiva-se aqui verificar as diferenças entre as respostas numéricas apresentadas pelo modelo de dano, a resposta experimental e a resposta analítica obtida com o emprego do procedimento da NBR 6118:2003 (2004). Para o aprofundamento da discussão se faz necessária a utilização do modelo constitutivo em trabalhos futuros para investigar mais casos, comparando com as respostas obtidas pelo procedimento da NBR e propondo, se for o caso, uma nova forma de se considerar a não-linearidade física do concreto no cálculo de deslocamentos de estruturas em concreto armado, sendo este o objetivo final dos autores.

2 MODELO DE DANO

O concreto é aqui entendido como um material que pertence à categoria dos meios inicialmente isotrópicos que passam a apresentar isotropia transversal e resposta bimodular induzidas pelo dano. A formulação do modelo para o concreto tem por base o princípio de equivalência de energia e o formalismo apresentado em Pituba (2006a).

No que segue, o modelo proposto é descrito brevemente, iniciando pela apresentação do tensor de dano para estados predominantes de tração, cuja expressão é dada na forma:

$$\mathbf{D}_T = f_1(D_1, D_4, D_5)(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + 2 f_2(D_4, D_5)[(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})] \quad (1)$$

sendo $f_1(D_1, D_4, D_5) = D_1 - 2 f_2(D_4, D_5)$ e $f_2(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4)(1-D_5)$.

O tensor de dano apresenta duas variáveis escalares na sua composição (D_1 e D_4) e uma terceira variável de dano D_5 , ativada somente se tiver havido compressão prévia com danificação correspondente. A variável D_1 representa a danificação na direção perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material e D_4 é a variável representativa da danificação gerada pelo cisalhamento entre as bordas das fissuras pertencentes àquele plano.

Na Eq. (1), o tensor \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem e o tensor \mathbf{A} é, por definição, Curnier et al. (1995), formado pelo produto tensorial do versor perpendicular ao plano de isotropia transversal por ele mesmo. As operações produtos tensoriais entre os tensores de segunda ordem \mathbf{I} e \mathbf{A} que aparecem na Eq. (1) e que serão utilizadas durante toda a formulação estão descritas em Pituba (2006b).

Para estados predominantes de compressão, propõe-se para o tensor de dano a relação:

$$\mathbf{D}_C = f_1(D_2, D_4, D_5)(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) + f_2(D_3)[(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})] + 2f_3(D_4, D_5)[(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})] \quad (2)$$

sendo $f_1(D_2, D_4, D_5) = D_2 - 2 f_3(D_4, D_5)$, $f_2(D_3) = D_3$ e $f_3(D_4, D_5) = 1 - (1-D_4)(1-D_5)$.

Notam-se três variáveis escalares na sua composição: D_2 , D_3 e D_5 , além de D_4 , relacionada

a efeitos de tração pré-existentes. A variável D_2 (danificação perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material) penaliza o módulo de elasticidade nessa direção, e juntamente com D_3 (representante da danificação no plano de isotropia transversal) penaliza o coeficiente de Poisson em planos perpendiculares ao de isotropia transversal.

Finalmente, os tensores constitutivos resultantes são descritos por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T = & \lambda_{11}[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}] + 2\mu_1[\mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I}] - \lambda_{22}^+(D_1, D_4, D_5) [\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}] \\ & - \lambda_{12}^+(D_1) [\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{A}] - \mu_2(D_4, D_5) [\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{A}] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_C = & \lambda_{11}[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}] + 2\mu_1[\mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I}] - \lambda_{22}^-(D_2, D_3, D_4, D_5) [\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}] - \lambda_{12}^-(D_2, D_3) [\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{A}] \\ & - \lambda_{11}^-(D_3) [\mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I}] - \frac{(1-2\nu_0)}{\nu_0} \lambda_{11}^-(D_3) [\mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I}] - \mu_2(D_4, D_5) [\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{A}] \end{aligned} \quad (4)$$

onde $\lambda_{11} = \lambda_0$ e $\mu_1 = \mu_0$. Os outros parâmetros só existem para dano não-nulo, evidenciando dessa forma a anisotropia e bimodularidade induzidas pelo dano, e são definidos por:

$$\begin{aligned} \lambda_{22}^+(D_1, D_4, D_5) = & (\lambda_0 + 2\mu_0)(2D_1 - D_1^2) - 2\lambda_{12}^+(D_1) - 2\mu_2(D_4, D_5) \\ \lambda_{12}^+(D_1) = & \lambda_0 D_1; \mu_2(D_4, D_5) = 2\mu_0[1 - (1 - D_4)^2(1 - D_5)^2] \\ & + \frac{(\nu_0 - 1)}{\nu_0} \lambda_{11}^-(D_3) - 2\mu_2(D_4, D_5) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\lambda_{12}^-(D_2, D_3) = \lambda_0[(1 - D_3)^2 - (1 - D_2)(1 - D_3)]$$

$$\lambda_{11}^-(D_3) = \lambda_0(2D_3 - D_3^2), \mu_2(D_4, D_5) = 2\mu_0[1 - (1 - D_4)^2(1 - D_5)^2]$$

Em Curnier et al. (1995) define-se uma hipersuperfície, no espaço das tensões ou das deformações, a ser empregada como critério para a identificação das respostas constitutivas de compressão ou de tração. Neste modelo adota-se uma forma particular para a hipersuperfície no espaço das deformações: um hiperplano $g(\epsilon)$, caracterizado por sua normal unitária N ($\|N\| = 1$). Para a versão uniaxial do modelo vale a seguinte relação:

$$g(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) = N(\mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^e = \gamma_1(D_1, D_2) \epsilon_V^e + \gamma_2(D_1, D_2) \epsilon_{11}^e \quad (6)$$

onde $\gamma_1(D_1, D_2) = \{1 + H(D_2)[H(D_1) - 1]\}\eta(D_1) + \{1 + H(D_1)[H(D_2) - 1]\}\eta(D_2)$ e $\gamma_2(D_1, D_2) = D_1 + D_2$.

As funções de Heaveside empregadas na última relação são dadas por:

$$H(D_i) = 1 \text{ para } D_i > 0; H(D_i) = 0 \text{ para } D_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

As funções $\eta(D_1)$ e $\eta(D_2)$ são definidas, respectivamente, para os casos de tração, supondo que não tenha danificação prévia de compressão, e de compressão, supondo que não tenha havido danificação prévia de tração.

$$\eta(D_1) = \frac{-D_1 + \sqrt{3 - 2D_1^2}}{3}; \eta(D_2) = \frac{-D_2 + \sqrt{3 - 2D_2^2}}{3} \quad (8)$$

Com relação ao critério de danificação, é conveniente separá-lo em critério para início de

danificação, quando o material deixa de ser isótropo; e critério para carga e descarga, entendido aqui num sentido de evolução ou não das variáveis de dano, quando o material já apresentar-se como transversalmente isótropo.

O critério para ativação inicial da danificação em tração ou compressão é dado por:

$$f_{T,C}(\boldsymbol{\sigma}) = W_e^* - Y_{0T,0C} < 0 \quad (9)$$

onde W_e^* é a energia de deformação elástica complementar considerando-se o meio inicialmente íntegro, isótropo e puramente elástico e $Y_{0T} = \sigma_{0T}^2 / 2E_0$ ou $Y_{0C} = \sigma_{0C}^2 / 2E_0$ é um valor de referência obtido de ensaios uniaxiais de tração, ou de compressão, respectivamente, sendo σ_{0T} e σ_{0C} as tensões dos limites elásticos.

Portanto, $\mathbf{D}_T = \mathbf{0}$ (ou seja, $D_1 = D_4 = 0$) para estados predominantes de tração ou $\mathbf{D}_C = \mathbf{0}$ (ou seja, $D_2 = D_3 = D_5 = 0$) para estados de compressão, onde o regime de resposta do material é elástico linear e isótropo.

Para o caso de $g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) > 0$ e $g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}_T, \mathbf{D}_C) < 0$, as energias elásticas complementares do meio danificado são dadas, respectivamente, pelas relações:

$$W_{e+}^* = \frac{\sigma_{11}^2}{2E_0(1-D_1)^2} \quad e \quad W_{e-}^* = \frac{\sigma_{11}^2}{2E_0(1-D_2)^2} \quad (10)$$

Considerando-se, então, uma situação geral de meio danificado em regime predominante de tração, o critério para a identificação de acréscimos de danificação é representado pela seguinte relação:

$$f_T(\boldsymbol{\sigma}) = W_{e+}^* - Y_{0T}^* \leq 0 \quad (11)$$

onde o valor de referência Y_{0T}^* é definido pela máxima energia elástica complementar determinada ao longo do processo de danificação até o estado atual. Para o meio danificado em regime predominante de compressão, valem relações análogas ao caso de tração.

Nos casos onde configura-se carregamento, isto é, onde $\dot{\mathbf{D}}_T \neq \mathbf{0}$ ou $\dot{\mathbf{D}}_C \neq \mathbf{0}$, é necessário atualizar os valores das variáveis escalares de dano que aparecem nos tensores \mathbf{D}_T e \mathbf{D}_C , considerando-se suas leis de evolução.

Limitando-se a análise ao caso de carregamento monotônico crescente e versão uniaxial do modelo, as leis de evolução propostas para as variáveis escalares de dano são resultantes de ajustes sobre resultados experimentais e apresentam características similares àquelas encontradas nos modelos de Mazars (1986) e La Borderie (1991). A forma geral proposta é:

$$D_i = 1 - \frac{1 + A_i}{A_i + \exp[B_i(Y_i - Y_{0i})]} \quad \text{com } i = 1, 3 \quad (12)$$

onde A_i , B_i e Y_{0i} são parâmetros a serem identificados. Os parâmetros Y_{0i} são entendidos como limites iniciais para a ativação da danificação, os mesmos utilizados na Eq. (9). A identificação paramétrica do modelo é realizada através de ensaios experimentais de tração uniaxial para a obtenção dos parâmetros A_1 , B_1 e $Y_{01} = Y_{0T}$, de ensaios de compressão uniaxial para a identificação dos parâmetros A_2 , B_2 e Y_{02} e finalmente de ensaios de compressão biaxial para obter A_3 , B_3 e $Y_{03} = Y_{02} = Y_{0C}$. Por outro lado, a identificação dos parâmetros contidos nas leis de evolução correspondentes às variáveis de dano D_4 e D_5 , as quais influenciam o comportamento do concreto em cisalhamento, são objeto de estudo em

Pituba (2010b). Resultados da identificação paramétrica através de ensaios correspondentes a estados uni, bi e triaxiais em corpos de prova de concreto são descritos em Proença and Pituba (2003). Todavia, o modelo de dano aqui utilizado é uma versão simplificada no sentido de que é utilizada sua versão para análises unidimensionais, onde apenas ensaios uniaxiais de tração e de compressão são necessários para sua identificação paramétrica.

Por outro lado, quando o processo de danificação é ativado, a formulação passa a envolver o tensor A que, por sua vez, depende do conhecimento da normal ao plano de isotropia transversal. Então, devem-se definir regras para a localização dessa normal para um dado estado de deformação.

Em Pituba (2006b), sugere-se um critério para a localização do plano de isotropia transversal baseado nos sinais das taxas das deformações principais. Inicialmente propõe-se que a isotropia transversal decorrente do dano se manifesta somente se existirem taxas positivas de deformação, ao menos em uma das direções principais. Em seguida, definem-se algumas regras para identificar sua localização. Em primeiro lugar, um estado de deformação em que uma das taxas de deformação é não-nula ou de sinal contrário às demais, aplica-se a seguinte regra:

“No espaço das deformações principais, se duas das três taxas das deformações forem de alongamento, encurtamento ou nulas, o plano definido por elas será o plano de isotropia”.

Nesse caso enquadra-se, por exemplo, a tração uniaxial, resultando que o plano de isotropia transversal é perpendicular à direção da tensão de tração. Entretanto, há casos não abrangidos por essa regra. Por exemplo, o estado de deformação plana em que as deformações não-nulas são de sinais contrários. Para essa situação, vale uma segunda regra:

“Num estado de deformação plana, onde as taxas das deformações principais no plano tenham sinais contrários, o plano local de isotropia transversal do material fica definido pelas direções da deformação principal permanentemente nula e da deformação cuja taxa seja positiva”.

Outro caso particular ocorre quando todas as taxas de deformações principais são positivas. Para esses estados vale uma terceira regra, segundo a qual assume-se que a direção de maior alongamento seja perpendicular ao plano local de isotropia transversal do material. Obviamente, critérios baseados em outros fundamentos podem ser sugeridos, como por exemplo, a teoria de microplanos.

3 PROCEDIMENTO DA NBR 6118:2003 (2004)

Os modelos de avaliação de deslocamentos em estruturas de concreto armado consideram o comportamento dos elementos estruturais submetidos à ação de momento fletor nos Estádios I (seção íntegra, considera-se a contribuição do concreto na região tracionada) e II (peça fissurada despreza-se a contribuição do concreto tracionado para o equilíbrio da seção transversal).

A NBR 6118:2003 (2004), versão 2004, apresenta um critério para o cálculo do deslocamento excessivo em elementos fletidos de concreto armado baseado numa ponderação das inércias nos Estádios I (I_1) e II (I_2), resultando uma inércia equivalente, I_{eq} . Essa inércia equivalente é calculada por meio da Eq. (13), que foi obtida por meio do modelo proposto por Branson (1968). Tal procedimento é válido desde que o momento atuante na seção crítica, M_a , seja maior que o momento fletor que provoca a primeira fissura, M_f .

$$I_{eq} = \left(\frac{M_f}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_2 \leq I_c \quad (13)$$

Na Eq. (13), I_c , a inércia da seção íntegra, sem a consideração da contribuição das barras de aço na seção transversal de concreto armado (homogeneização da seção).

O momento que provoca a primeira fissura, denominado momento de fissuração, M_r , é calculado por meio da Eq. (14). Observa-se por meio da Eq. (14), que a norma brasileira despreza o efeito favorável das barras de aço da seção transversal de concreto armado, diminuindo, portanto, o valor de M_r .

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} \quad (14)$$

O valor de α da expressão 14 tem valor igual a 1,2 para seções transversais T ou duplo T e valor igual a 1,5 para seções transversais retangulares. O valor da resistência a tração do concreto (f_{ct}) é calculado por meio da expressão 15 e, y_t é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada da seção transversal.

$$f_{ct} = 0,21 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (15)$$

Sendo f_{ck} a resistência característica do concreto à compressão.

O momento na seção crítica, M_a , é determinada por meio de uma combinação de ações, denominada quase-permanente. A combinação quase permanente reduz a intensidade das ações variáveis acidentais, por meio de um coeficiente estatístico Ψ_2 , cujo valor pode ser igual a 0,3, 0,4 e 0,6, dependendo para qual fim destina-se a utilização da estrutura. A combinação quase-permanente é calculada pela Eq. (16).

$$F_{d,ser} = \sum_{i=1}^n F_{gi,k} + \sum_{j=1}^m \Psi_{2j} \cdot F_{qj,k} \quad (16)$$

Na Eq. (16), F_g representa os valores das intensidades das ações permanentes e F_q representa os valores das intensidades das ações variáveis acidentais.

4 PROTÓTIPOS DE ENSAIO

4.1 Código Computacional

A versão unidimensional do modelo de dano foi implementada num programa para análise plana de estruturas de barras discretizadas com elementos finitos estratificados em camadas (EFICoS - Eléments Finis à Couches Superposées).

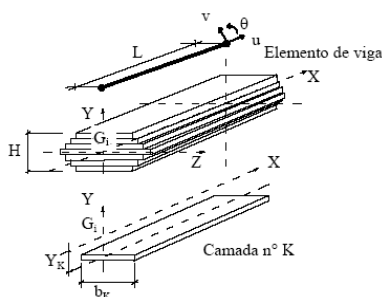


Figura 01: Elemento finito empregado

O elemento finito unidimensional com camadas superpostas é baseado num elemento de viga clássico com dois nós, onde cada nó possui três graus de liberdade u , v e θ (Fig. 01).

São assumidas, como hipóteses de cálculo, a negligência de deformações por distorção. Para o concreto vale o modelo de danificação em estudo, e para as barras de aço longitudinais

admite-se um comportamento elasto-plástico. Para efeito de cálculo, o peso-próprio do elemento é levado em conta no modelo em elementos finitos.

Para a análise da seção transversal discretizada em concreto armado, uma certa camada pode ser composta de aço e concreto. Admitindo-se perfeita aderência entre os materiais, definem-se, para a camada em questão, um módulo elástico e uma deformação anelástica equivalentes, utilizando-se a seguinte regra de homogeneização:

$$E_k = (1 - C_{ak})E_{ck} + C_{ak}E_{ak} \quad (17)$$

$$\varepsilon_{ank} = (1 - C_{ak})\varepsilon_{ank} + C_{ak}\varepsilon_{pk} \quad (18)$$

onde:

- C_{ak} é a concentração volumétrica de aço na camada N° k
- E_{ak} é o módulo de elasticidade do aço na camada N° k
- E_{ck} é o módulo de elasticidade do concreto na camada N° k
- ε_{pk} é a deformação plástica do aço na camada N° k
- ε_{ankk} é a deformação anelástica na camada N° k
- ε_{ank} é a deformação anelástica do concreto na camada N° k

4.2 Modelos em Elementos Finitos

Neste item são descritos os modelos em elementos finitos de vigas utilizados para verificar a influência de alguns parâmetros no cálculo de deslocamentos em vigas. Esses modelos são aqui chamados de “protótipos de ensaios”, onde os mesmos foram ensaiados numericamente a fim de se obter os resultados a serem comparados com os preconizados pela NBR 6118:2003 (2004).

Neste trabalho foram admitidos como parâmetros de variação o comprimento do vão, a altura da seção transversal e o arranjo das barras de aço da armadura. Os protótipos de ensaio estão nomeados segundo as propriedades contidas na Tabela 01 e suas geometrias estão descritas na Figura 02.

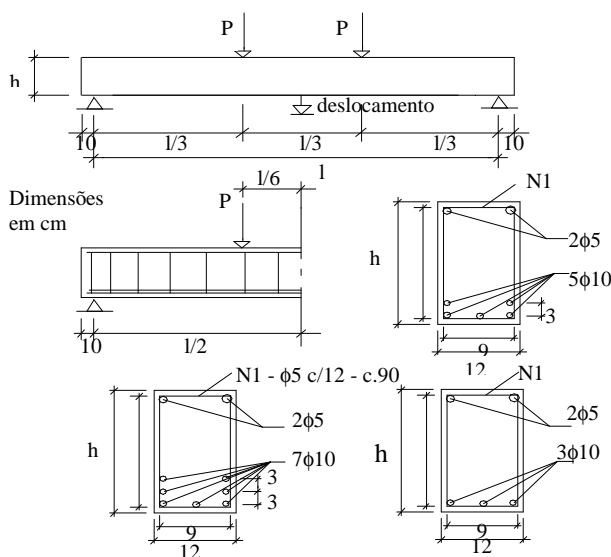


Figura 02: Geometria e armadura dos protótipos de ensaio.

VIGA	VÃO (m)	As (cm ²)	VIGA	VÃO (m)	As (cm ²)	VIGA	VÃO (m)	As (cm ²)
V31 - 12x30	2,4	2,36	V32 - 12x40	2,4	2,36	V33 - 12x50	2,4	2,36
V51 - 12x30	2,4	3,93	V52 - 12x40	2,4	3,93	V53 - 12x50	2,4	3,93
V71 - 12x30	2,4	5,5	V72 - 12x40	2,4	5,5	V73 - 12x50	2,4	5,5
V34 - 12x30	3	2,36	V35 - 12x40	3	2,36	V36 - 12x50	3	2,36
V54 - 12x30	3	3,93	V55 - 12x40	3	3,93	V56 - 12x50	3	3,93
V74 - 12x30	3	5,5	V75 - 12x40	3	5,5	V76 - 12x50	3	5,5
V37 - 12x30	4	2,36	V38 - 12x40	4	2,36	V39 - 12x50	4	2,36
V57 - 12x30	4	3,93	V58 - 12x40	4	3,93	V59 - 12x50	4	3,93
V77 - 12x30	4	5,5	V78 - 12x40	4	5,5	V79 - 12x50	4	5,5

Tabela 1: Características geométricas dos protótipos de ensaio.

O concreto utilizado apresenta as curvas de tensão-deformação das Figuras 03 e 04. Um modelo elasto-plástico perfeito é utilizado na simulação do comportamento mecânico do aço que compõe as armaduras. Já o modelo de dano proposto por Pituba (2006a), em sua versão unidimensional, será empregado na simulação do comportamento mecânico do concreto. A identificação paramétrica do modelo é realizada através de processo automatizado de minimização de erro utilizando as curvas obtidas em ensaios de tração e compressão uniaxiais de tensão obtidas em Álvares (1993), como descrito no item 2. Cabe ressaltar que no ensaio em tração, a resposta apresentada pelo modelo de Mazars (1986) foi tomada como referência por Álvares, pois o ensaio em tração direta é bastante complexo de ser realizado. No entanto, as respostas carga-deslocamento apresentadas pelo modelo no item 5 deste trabalho confirmam a boa recuperação da resposta experimental do concreto.

Observe que um novo concreto pode ser utilizado gerando nova identificação paramétrica e novas combinações de protótipos de ensaios. Os resultados da identificação paramétrica encontram-se na Figura 03 e 04. Os valores dos parâmetros obtidos para o modelo de dano estão relacionados na Tabela 02.

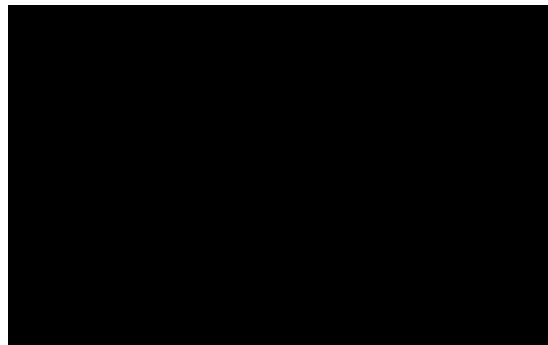


Figura 03: Identificação paramétrica em compressão uniaxial

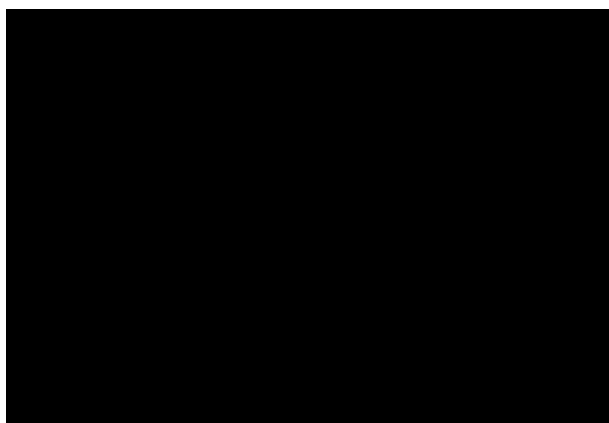


Figura 04: Identificação paramétrica em tração uniaxial

Parâmetros de Tração	Parâmetros de Compressão
$Y_{01} = 0,72 \times 10^{-4} \text{MPa}$	$Y_{02} = 0,5 \times 10^{-3} \text{MPa}$
$A_1 = 50$	$A_2 = -0,9$
$B_1 = 6700 \text{MPa}^{-1}$	$B_2 = 0,4 \text{MPa}^{-1}$

Tabela 2: Valores dos parâmetros do modelo de dano.

O concreto utilizado possui um módulo de elasticidade longitudinal no valor de 29200 MPa, resistência à compressão de 30,8 MPa e resistência à tração de 2,25 MPa. Já o aço utilizado para as armaduras possui módulo de elasticidade longitudinal no valor de 196 GPa, limite de escoamento inicial de 500 MPa.

Com intuito de aferir o deslocamento vertical calculado por meio do modelo número apresentado neste trabalho, calculou-se analiticamente os deslocamentos verticais das vigas de concreto armado submetidas à ação de momento fletor, utilizando os critérios sugeridos pela NBR 6118:2003 (2004), mostrados no item 3 deste trabalho, considerando-se como ações permanentes o peso próprio das vigas e como ações variáveis acidentais, o valor das forças F_r e $3 \cdot F_r$, aplicadas às distâncias de $\ell/3$ e $2 \cdot \ell/3$ medidas a partir do apoio da esquerda da viga (ver Figura 02). O valor da força F_r foi obtido em função do valor do momento de fissuração (Eq. (14)) e calculado por meio de Eq. (19).

$$F_r = \left(M_r - \frac{g \cdot \ell^2}{8} \right) \cdot \frac{2}{\ell} \quad (19)$$

Na Eq. (19), F_r é o valor da intensidade da força que provoca o momento de fissuração, g representa o peso próprio das vigas de concreto armado e ℓ é o vão livre da viga (medido entre apoios).

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os protótipos V31, V51 e V71 já foram analisados em trabalhos anteriores (Pituba, 2008b) empregando o modelo de dano em questão e suas respostas foram comparadas com resultados experimentais contidos em Álvares (1993), o que nos leva a uma garantia da qualidade da resposta numérica frente aos resultados experimentais. Esses resultados, juntamente com os resultados dos outros protótipos analisados estão descritos nas Figuras 05, 06 e 07, onde se

pode visualizar o gráfico de carga accidental P x deslocamento no meio do vão das vigas ensaiadas.

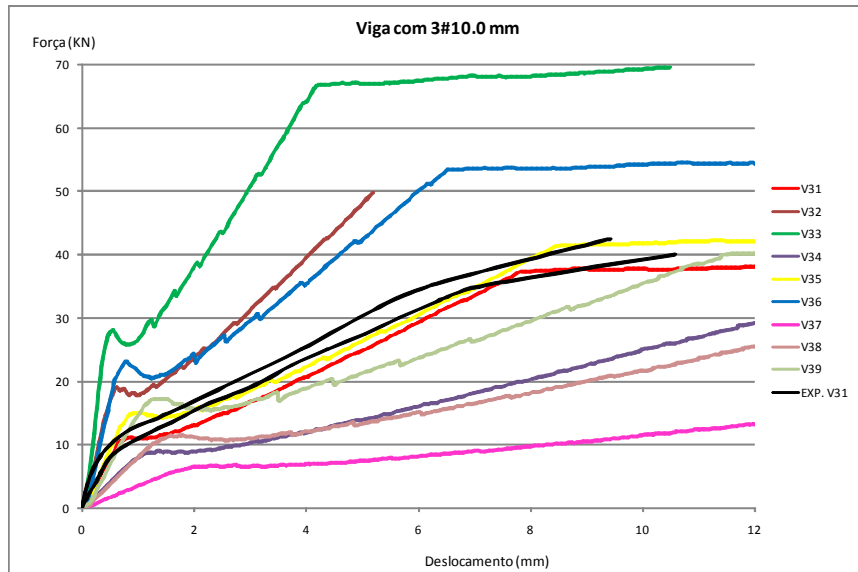


Figura 05: Carga x deslocamento no meio do vão das vigas com 3#10.0mm.

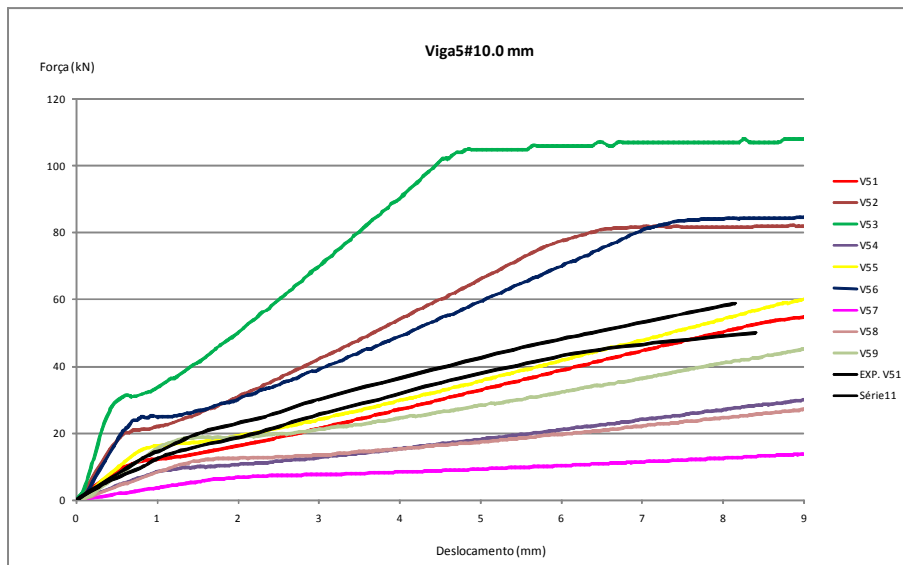


Figura 06: Carga x deslocamento no meio do vão das vigas com 5#10.0mm.

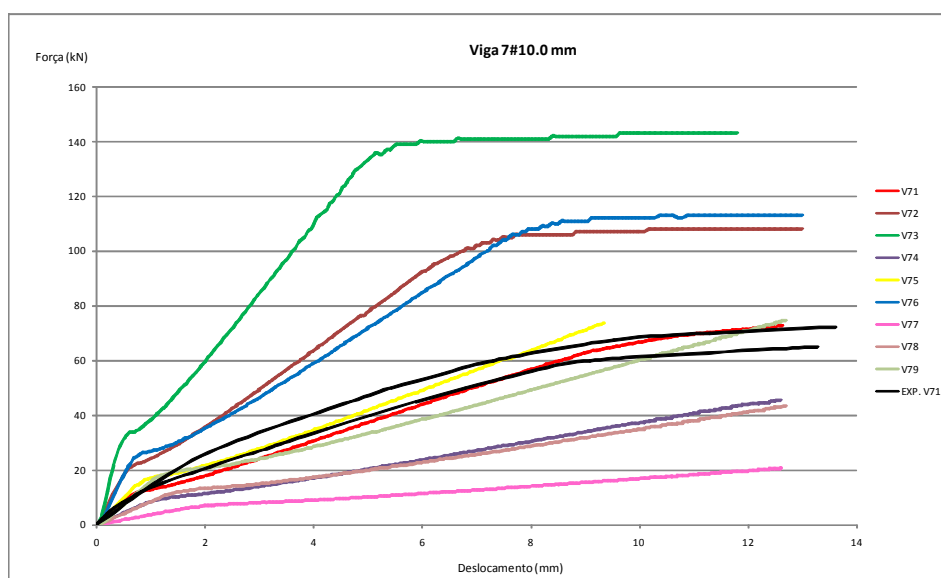


Figura 07: Carga x deslocamento no meio do vão das vigas com 7#10.0mm.

Observa-se a boa concordância da resposta numérica dos protótipos V31, V51 e V71 com as curvas experimentais em cada situação, como forma de validar a experimentação numérica sugerida neste trabalho. Cabe ressaltar que em Álvares (1993), os ensaios experimentais foram compostos por uma série de vigas com os arranjos de armadura $3\text{Ø}10.0\text{mm}$, $5\text{Ø}10.0\text{mm}$ e $7\text{Ø}10.0\text{mm}$. Portanto, as curvas experimentais ilustradas nos gráficos refletem a nuvem de pontos carga-deslocamento obtida durante os ensaios de cada tipo de viga.

Nas tabelas a seguir são descritos os resultados obtidos para deslocamentos no meio dos vãos de cada protótipo com o emprego do Procedimento da NBR6118:2003 (2004), assim como aqueles obtidos nas análises numéricas. Foram considerados os valores para $P=F_r$ e $P=3F_r$ no intuito de averiguar o comportamento do Procedimento sugerido pela NBR em relação à evolução do processo de danificação das vigas.

Os valores percentuais da diferença entre os deslocamentos foram calculados admitindo como valores de referência os preconizados pela NBR.

VIGA	P = Fr				
	Fr NBR (kN)	Fr Num. (kN)	Desl. NBR (cm)	Desl. Num. (cm)	Diferença (%)
V31- 12x30	4.53	6.28	0.033	0.029	12.12
V51- 12x30	4.53	6.44	0.033	0.028	15.15
V71 - 12x30	4.53	6.51	0.033	0.028	15.15
V34 - 12x30	3.21	4.89	0.051	0.039	23.53
V54 - 12x30	3.21	4.91	0.051	0.038	25.49
V74 - 12x30	3.21	4.97	0.051	0.038	25.49
V37 - 12x30	1.92	3.39	0.093	0.054	41.94
V57 - 12x30	1.92	3.43	0.093	0.055	40.86
V77 - 12x30	1.92	3.69	0.093	0.055	40.86
V32 - 12x40	8.28	10.39	0.025	0.025	0.00
V52 - 12x40	8.28	10.66	0.025	0.024	4.00
V72 - 12x40	8.28	10.82	0.025	0.023	8.00
V35 - 12x40	6.3	7.85	0.039	0.035	10.26
V55 - 12x40	6.3	8.05	0.039	0.034	12.82
V75 - 12x40	6.3	8.17	0.039	0.034	12.82
V38 - 12x40	4.2	6.23	0.072	0.054	25.00

V58 - 12x40	4.2	6.09	0.072	0.052	27.78
V78 - 12x40	4.2	6.18	0.072	0.052	27.78
V33 - 12x50	16.67	20.35	0.024	0.027	-12.50
V53 - 12x50	16.67	20.89	0.024	0.026	-8.33
V73 - 12x50	16.67	21.26	0.024	0.025	-4.17
V36 - 12x50	12.94	15.39	0.038	0.039	-2.63
V56 - 12x50	12.94	15.79	0.038	0.038	0.00
V76 - 12x50	12.94	16.07	0.038	0.037	2.63
V39 - 12x50	9.05	8.77	0.069	0.062	10.14
V59 - 12x50	9.05	8.99	0.069	0.062	10.14
V79 - 12x50	9.05	10.13	0.069	0.06	13.04

Tabela 3: Valores dos deslocamentos obtidos com o Procedimento da NBR6118 e com os ensaios numéricos para $P=F_r$.

VIGA	P = 3 Fr		
	Desl. NBR (cm)	Desl. Num. (cm)	Diferença (%)
V31 - 12x30	0.32	0.22	31.25
V51- 12x30	0.23	0.14	39.13
V71 - 12x30	0.19	0.12	36.84
V34 - 12x30	0.45	0.25	44.44
V54 - 12x30	0.32	0.14	56.25
V74 - 12x30	0.27	0.13	51.85
V37 - 12x30	0.67	0.16	76.12
V57 - 12x30	0.49	0.16	67.35
V77 - 12x30	0.41	0.16	60.98
V32 - 12x40	0.28	0.21	25.00
V52 - 12x40	0.2	0.14	30.00
V72 - 12x40	0.16	0.11	31.25
V35 - 12x40	0.41	0.31	24.39
V55 - 12x40	0.29	0.19	34.48
V75 - 12x40	0.24	0.15	37.50
V38 - 12x40	0.66	0.43	34.85
V58 - 12x40	0.48	0.22	54.17
V78 - 12x40	0.38	0.17	55.26
V33 - 12x50	0.31	0.29	6.45
V53 - 12x50	0.22	0.2	9.09
V73 - 12x50	0.17	0.16	5.88
V36 - 12x50	0.48	0.44	8.33
V56 - 12x50	0.34	0.3	11.76
V76 - 12x50	0.27	0.23	14.81
V39 - 12x50	0.79	0.73	7.59
V59 - 12x50	0.57	0.47	17.54
V79 - 12x50	0.45	0.37	17.78

Tabela 4: Valores dos deslocamentos obtidos com o Procedimento da NBR6118 e com os ensaios numéricos para $P=3F_r$.

Observando as tabelas 3 e 4, conclui-se pelo conservadorismo do procedimento de cálculo da NBR sendo refletido em diferenças da ordem de 50%. Em geral, observa-se ainda que as diferenças entre os valores dos deslocamentos acentuam conforme a carga aplicada P aumenta. O modelo adotado pela NBR baseado em Branson (1968) aproxima a rigidez da viga

com um todo, acarretando em altos valores de deslocamento. Já o modelo de dano penaliza seletivamente o módulo de elasticidade longitudinal de cada camada composta de concreto e/ou aço ao longo de toda a viga, dando um panorama mais realista da danificação na viga, com isso acarreta em deslocamentos menores que os obtidos com o modelo analítico da NBR6118:2003 (2004). Essa afirmação pode ser verificada nas Tabelas 5 e 6, onde são descritos os valores de rigidez dos protótipos ensaiados calculados analiticamente e numericamente para $P=F_r$ e $P=3F_r$, respectivamente.

VIGA	E _l eq (MN.m ²) NBR	E _l eq (MN.m ²) Num.	Diferença (%)
V31	7.12	8.15	14.50
V32	16.87	19.17	13.61
V33	32.95	36.89	11.95
V34	7.12	8.16	14.64
V35	16.87	19.19	13.71
V36	32.95	29.72	-9.80
V37	7.12	8.16	14.71
V38	16.87	19.17	13.61
V39	32.95	29.98	-9.01
V51	7.12	8.54	20.05
V52	16.87	19.87	17.77
V53	32.95	38.00	15.31
V54	7.12	8.55	20.18
V55	16.87	19.89	17.87
V56	32.95	30.80	-6.54
V57	7.12	8.56	20.26
V58	16.87	19.88	17.86
V59	32.95	31.08	-5.69
V71	7.12	8.94	25.66
V72	16.87	20.58	21.97
V73	32.95	39.11	18.69
V74	7.12	8.95	25.72
V75	16.87	20.59	22.01
V76	32.95	31.94	-3.08
V77	7.12	8.95	25.73
V78	16.87	20.58	22.01
V79	32.95	32.13	-2.49

Tabela 5: Valores da rigidez calculada analiticamente e numericamente para $P=F_r$.

VIGA	E _l eq (M.Nm ²) NBR	E _l eq (M.Nm ²) Num.	Diferença (%)
V31	1.96	3.97	102.12
V32	4.14	7.58	83.12
V33	7.25	11.62	60.36
V34	0.20	4.55	2143.46
V35	4.23	8.05	90.38
V36	7.34	4.93	-32.92
V37	2.18	8.05	269.37
V38	4.49	8.66	92.98
V39	7.61	4.49	-41.00
V51	0.28	5.45	1880.29
V52	5.88	10.65	81.16

V53	10.34	16.23	56.93
V54	0.02	7.45	44037.34
V55	5.96	11.21	88.22
V56	10.43	9.25	-11.37
V57	0.29	8.46	2783.90
V58	6.18	14.63	136.80
V59	10.67	9.84	-7.77
V71	0.34	6.49	1798.42
V72	7.39	12.73	72.24
V73	13.08	19.73	50.82
V74	0.35	7.97	2200.80
V75	7.45	13.86	85.92
V76	13.16	12.87	-2.18
V77	0.36	8.84	2374.10
V78	7.65	18.30	139.29
V79	13.36	13.87	3.80

Tabela 6: Valores da rigidez calculada analiticamente e numericamente para $P=3F_r$.

Na Tabela 7 estão descritos os valores do momento de fissuração fornecidos pelo modelo de dano. Observa-se que a NBR6118:2003 (2004) fornece um único valor de M_r independente do arranjo de armadura disposto na viga. Já nas análises numéricas tal fato não ocorre, havendo uma variação do valor de M_r , o que seria mais natural. Contudo, para fins de cálculo prático os valores de M_r podem ser adotados iguais numa viga com mesma seção bruta de concreto e diferentes arranjos de armadura. Porém, a história de comportamento da viga do início do processo de fissuração até seu colapso, obviamente será influenciado pelo arranjo de armadura, entre outros fatores, como é observado nas figuras 05, 06 e 07.

VIGA	M_r Num.(KN.m)	M_r NBR (KN.m)
V31 - 12x30	5.03	6.08
V51- 12x30	5.15	6.08
V71 - 12x30	5.21	6.08
V34 - 12x30	4.89	6.08
V54 - 12x30	4.91	6.08
V74 - 12x30	4.97	6.08
V37 - 12x30	4.51	6.08
V57 - 12x30	4.57	6.08
V77 - 12x30	4.9	6.08
V32 - 12x40	8.31	10.8
V52 - 12x40	8.52	10.8
V72 - 12x40	8.66	10.8
V35 - 12x40	7.85	10.8
V55 - 12x40	8.05	10.8
V75 - 12x40	8.17	10.8
V38 - 12x40	8.28	10.8
V58 - 12x40	8.1	10.8
V78 - 12x40	8.22	10.8
V33 - 12x50	16.28	21.09
V53 - 12x50	16.71	21.09
V73 - 12x50	17.01	21.09
V36 - 12x50	15.39	21.09

V56 - 12x50	15.79	21.09
V76 - 12x50	16.07	21.09
V39 - 12x50	11.67	21.09
V59 - 12x50	11.95	21.09
V79 - 12x50	13.47	21.09

Tabela 7: Valores do momento de fissuração obtidos com os ensaios numéricos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio das análises desenvolvidas neste trabalho, observou-se que para vão livres menores, os valores das rigidezes obtidos por meio dos processos analítico e numérico são próximos.

Constatou-se que, os deslocamentos obtidos por meio do processo analítico são maiores que os deslocamentos obtidos por meio do processo numérico, possivelmente em função de que o momento de fissuração, utilizado pela norma brasileira, NBR6118:2003 (2004), não considerar a contribuição das barras de aço existentes nas seções transversais das vigas de concreto armado. Contudo, é importante que a norma possua certa reserva de segurança no cálculo de deslocamentos.

Cabe ressaltar que este é um trabalho inicial, porém com resultados que demonstram o conservadorismo da NBR6118:2003 (2004). Em trabalhos futuros pretende-se prosseguir com mais ensaios investigando outras variáveis (condições de vínculo, resistência do concreto, arranjos de armadura, etc) de modo a se fazer um tratamento estatístico para viabilizar a proposição de uma expressão alternativa para o cálculo de deslocamentos.

AGRADECIMENTOS

Os autores desejam agradecer a FUNAPE (Fundação de Apoio à Pesquisa da Universidade Federal de Goiás) e CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro e ao curso de engenharia civil da Universidade Federal de Goiás – Campus Catalão.

REFERENCES

- Álvares, M. S., *Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com emprego do método dos elementos finitos*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas – NBR 6118:2003, Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.
- Branson, D. E., Procedures for computing deflections. *ACI Journal*, 65, New York, September, 1968.
- Curnier, A., He, Q., and Zysset, P., Conewise linear elastic materials. *Journal of Elasticity*, 37: 1-38, 1995.
- La Borderie, C., *Phenomenes unilateraux dans un materiau endommageable: modelisation et application a l'analyse de structures en beton*. Doctoral dissertation, University of Paris, France, 1991.
- Mazars, J., A description of micro and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25: 729-737, 1986.
- Pituba, J. J. C., On the formulation of damage constitutive models for bimodular and anisotropic media. In: *Proc. 3th European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Lisbon, 2006a*.

- Pituba, J. J. C., Formulation of damage models for bimodular and anisotropic media. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, 3:7-29, 2006b.
- Pituba, J. J. C., An anisotropic model of damage and unilateral effect for brittle materials. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*, 4:100-105, 2008a.
- Pituba, J. J. C., Aplicação de um Modelo de Dano no Estudo da Deformabilidade de Vigas em Concreto Armado: Comparação de resultados com Procedimento da NBR 6118. In: *Proc. XXIX Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Maceió, 2008b.
- Pituba, J. J. C., Damage models applied in the numerical analysis of reinforced concrete structures. In: *Proc. XXX Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Búzios, 2009.
- Pituba, J. J. C., Validation of a damage model for the non linear analysis of reinforced concrete structures. *Acta Scientiarum. Technology*, to be published, 2010a.
- Pituba, J. J. C., Avaliação de um modelo anisótropo de dano considerando a perda de resistência devido ao cisalhamento do concreto. In: *Proc. XXXI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Búzios, 2010b.
- Proença, S. P. B., and Pituba, J. J. C., A damage constitutive model accounting for induced anisotropy and bimodular elastic response. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1: 101-117, 2003.