

## VARIABILIDAD DE LAS FRECUENCIAS NATURALES EN PLACAS COMPOSITE CON DISTINTAS CONDICIONES DE BORDE

Patricia M. Ciancio<sup>a</sup> y Diana V. Bambill<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires,  
(UNCPBA), Avda. del Valle 5737, 7400-Olavarría, Argentina, [pciancio@fio.unicen.edu.ar](mailto:pciancio@fio.unicen.edu.ar),  
<http://www.unicen.edu.ar>

<sup>b</sup>Instituto de Mecánica Aplicada (IMA) Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional Del Sur  
(UNS), Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina y Consejo Nacional de Investigaciones  
Científicas y Técnicas, (CONICET), Argentina, [dbambill@criba.edu.ar](mailto:dbambill@criba.edu.ar), [dbambill@uns.edu.ar](mailto:dbambill@uns.edu.ar),  
<http://www.uns.edu.ar>

**Palabras clave:** Vibraciones, Materiales compuestos, Placa rectangular, Formas modales.

**Resumen.** Los materiales compuestos por fibras embebidas en una matriz polimérica son una alternativa empleada en una vasta gama de aplicaciones en las industrias automotriz, naval, civil, entre otras. En el ámbito estructural, caracterizar estos materiales, para una variabilidad de parámetros tales como diferentes densidades de la matriz, contenido de fibras de refuerzo y su orientación, ha permitido determinar su grado de incidencia en las propiedades mecánicas del material compuesto. Cuando esos materiales se utilizan en elementos estructurales tipo placa, esas características influyen en su comportamiento dinámico. En este trabajo, se analiza la incidencia que ejerce el confinamiento de los bordes de placas cuadradas conformadas por una matriz epoxi con fibras de boro, y se estudian las frecuencias y modos naturales de vibración transversal y su variaciones en función del contenido de fibras y su orientación. Se emplea el método de Ritz con “funciones viga” aproximantes como funciones coordenadas. A partir de las propiedades mecánicas del compuesto se determinan las respectivas rigideces flexionales y torsionales que aparecen en el funcional que gobierna las vibraciones transversales de la placa anisótropa.

## 1 INTRODUCCIÓN

La mayoría de los materiales compuestos, o simplemente compuestos, tienen fibras resistentes y fuertes en una matriz de un material más débil y menos resistente. Generalmente el objetivo es lograr propiedades de buena resistencia y bajo peso específico.

Se suele definir el material compuesto como la combinación a escala macroscópica de dos o más materiales con interfases de separación entre ellos para formar un nuevo material. Hay una gran variedad de materiales compuestos y resulta difícil realizar una clasificación general sobre todo teniendo en cuenta que cualquier clasificación si bien ayuda a resaltar aspectos comunes oculta otros.

Estos materiales debido a sus características, son comúnmente utilizados en aplicaciones de ingeniería, formando componentes estructurales en las industrias aeronáutica y aeroespacial, tales como vigas, placas o láminas. En muchos casos es necesario conocer las frecuencias naturales y formas modales de estos elementos. En particular en este estudio se analizan placas de materiales compuestos reforzados con fibras.

Las aproximaciones básicas de la elasticidad se caracterizan por satisfacer en forma más rigurosa las leyes físicas que en la mecánica de materiales. En esta última se hacen ciertas suposiciones simplificadoras sobre el comportamiento mecánico de un material compuesto con el fin de obtener una solución eficaz. Esas suposiciones no pueden ser arbitrarias. Así es que sobre estas bases se predicen las características o propiedades del material compuesto. Por ejemplo, el módulo de elasticidad de un material compuesto debe determinarse en función de las propiedades de las fibras y matriz que lo forman, y en términos de los volúmenes relativos de fibra y matriz. Las fases mantienen sus identidades. Parte del conocimiento del comportamiento de este tipo de materiales se basa en datos experimentales, pero dada la variedad de compuestos distintos, el uso de modelos matemáticos para predecir el comportamiento y la simulación de éstos mediante métodos numéricos es también un camino válido para avanzar en ese conocimiento.

En la literatura, cuando se proporcionan las características mecánicas de los compuestos, como por ejemplo del boro-epoxi, en general, no se especifica ni el contenido de fibra ni su alineación, al menos cuando se analizan problemas del ámbito de las estructuras, (Bachir Bouiadjra et.al. 2008; Cupial, 1997; Laura et.al. 1979; Malekzadeh, 2007, Ciancio et al., 2011).

En este trabajo se analizan las vibraciones libres de placas rectangulares anisótropas con distintas condiciones de borde.

La anisotropía de las placas es particular de cada tipo de material analizado (fibras resistentes embebidas en el material de la matriz). La caracterización de la anisotropía se obtiene en función de la proporción de fibras del compuesto y de su orientación con respecto a los lados de la placa rectangular, así como de las propiedades mecánicas propias de los materiales componentes del compuesto.

En este trabajo se analiza la incidencia en las vibraciones libres de distintos confinamientos que presenta la placa en sus bordes paralelos a los ejes coordenados, para una determinada cantidad de fibras y la forma en que se orientan en la estructura.

Se resuelven ejemplos numéricos utilizando el método de Ritz y un programa comercial de elementos finitos (ALGOR, 2009).

## 2 PLANTEO DEL MÉTODO DE RITZ

La determinación de las frecuencias de placas rectangulares compuestas con distintas condiciones de borde, se obtiene utilizando el método de Ritz. [Figura 1](#). Las condiciones de vinculación de la placa se indican en orden comenzando por la condición del borde  $x=0$ , y continuando en sentido antihorario. Se utiliza la letra E para indicar borde empotrado, las letras SA para el simplemente apoyado y la letra L para la condición de borde libre.

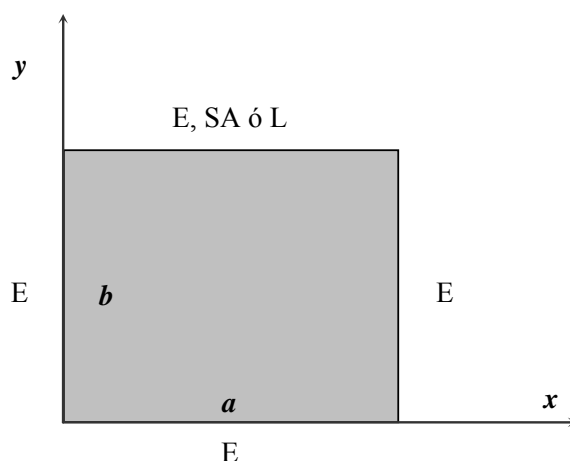


Figura 1: Placas rectangulares de material compuesto: Condiciones de borde.

Se considera que la placa vibrante ejecuta vibraciones libres en el tiempo de la forma:

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t} \quad (1)$$

donde  $W$  es una función continua, que satisface las condiciones de borde de la placa y representa una forma aproximada de deflexión de la placa vibrante.

$$W(x, y) \cong W_a = W_a(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (2)$$

donde los  $b_{mn}$  son constantes y  $X_m(x), Y_n(y)$  son las funciones coordenadas que satisfacen al menos las condiciones de borde esenciales o geométricas en el contorno de la placa.

En este trabajo, la forma de la deflexión de la placa se aproxima con un producto de series truncadas de funciones viga en las direcciones coordenadas  $x$  e  $y$ . En cada caso las funciones viga se eligen en función de las que correspondan a las condiciones de borde de dos bordes enfrentados de la placa rectangular. [Felgar, \(1951\)](#).

La funcional que gobierna el problema de la placa anisótropa vibrante, siguiendo la notación de [Lekhnitskii, \(1968\)](#), es:

$$\begin{aligned}
J_a(W_a) = & \frac{1}{2} \iint_A \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{12} \frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_a}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 W_a}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
& + 4 D_{66} \left( \frac{\partial^2 W_a}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 W_a}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W_a}{\partial x \partial y} \left. \right] dx dy \\
& - \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \iint_A W_a^2 dx dy
\end{aligned} \tag{3}$$

donde  $A$  es el área,  $h$  es el espesor, los  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{66}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{16}$  y  $D_{26}$  son las rigideces,  $\rho$  es la densidad del material y  $\omega$  es la frecuencia circular de vibración transversal.

De acuerdo con el método de Ritz se requiere que:

$$\delta J[W_a] = 0 \tag{4}$$

Y de esta forma se genera un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo en las constantes arbitrarias  $b_{mn}$ , de la condición de no-trivialidad, se obtiene el determinante–ecuación, cuyas raíces son las frecuencias naturales del sistema.

## 2.1 Cálculo de las rigideces de una placa de material compuesto

Las rigideces  $D_{ij}$  de una placa anisótropa, son magnitudes que dependen del material y de la orientación de las fibras respecto de las direcciones de los ejes coordenados elegidos, pues si se cambia de un sistema de coordenadas a otro, los  $D_{ij}$  variarán. Tal es el caso de un material compuesto ortótropo, cuyas rigideces principales son  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  y  $D_k$ .

Si se considera un sistema de coordenadas  $x y$ , donde la dirección principal elástica 1 del material ortótropo está rotada un ángulo cualquiera  $\varphi$  con respecto a  $x$ ; las rigideces flexionales  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ , la rigidez torsional  $D_{66}$  y la rigidez  $D_{12}$  se calculan con las expresiones:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= D_1 \cos^4 \varphi + 2D_3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + D_2 \sin^4 \varphi \\
D_{22} &= D_1 \sin^4 \varphi + 2D_3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + D_2 \cos^4 \varphi \\
D_{66} &= D_k + (D_1 + D_2 - 2D_3) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
D_{12} &= D_2 \nu_{12} + (D_1 + D_2 - 2D_3) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi
\end{aligned} \tag{5}$$

siguiendo la formulación sugerida por [Lekhnitskii, 1968](#).

Las rigideces auxiliares,  $D_{16}$  y  $D_{26}$ , que son nulas en el sistema coordenado de las direcciones elásticas principales, en este sistema son:

$$D_{16} = \frac{1}{2}(D_2 \sin^2 \varphi - D_1 \cos^2 \varphi + D_3 \cos 2\varphi) \sin 2\varphi \quad (6)$$

$$D_{26} = \frac{1}{2}(D_2 \cos^2 \varphi - D_1 \sin^2 \varphi - D_3 \cos 2\varphi) \sin 2\varphi$$

Las propiedades mecánicas y la densidad de los compuestos se obtienen a partir de las expresiones dadas por Tsai, (1964), tal como se determinarían en un trabajo previo, Ciancio et al, (2010).

Las expresiones que relacionan las constantes elásticas del compuesto, con las de la matriz y las fibras son

$$E_1 = k(V_f E_f + V_m E_m) \quad (7)$$

donde  $k$  es el factor de alineación de las fibras y su valor depende del proceso de fabricación del material compuesto.

$$E_2 = \frac{E_m}{V_m + V_f \left( \frac{E_m}{E_f} \right)} \quad (8)$$

$$\nu_{12} = (1-C) \frac{K_f \nu_f (2K_m + G_m) + K_m \nu_m (2K_f + G_m) V_m}{K_f (2K_m + G_m) - G_m (K_f - K_m) V_m} + C \frac{K_m \nu_m (2K_f + G_f) V_m + K_f \nu_f (2K_m + G_f)}{K_f (2K_m + G_m) + G_f (K_m - K_f) V_m} \quad (9)$$

con

$$K_f = \frac{E_f}{2(1-\nu_f)}; \quad G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}; \quad K_m = \frac{E_m}{2(1-\nu_m)}; \quad G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad (10)$$

$$G_{12} = (1-C) G_m \frac{2G_f - (G_f - G_m) V_m}{2G_m + (G_f - G_m) V_m} + C G_f \frac{(G_f + G_m) - (G_f - G_m) V_m}{(G_f + G_m) + (G_f - G_m) V_m} \quad (11)$$

donde:

$E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$  : son los módulos de elasticidad, el coeficiente de Poisson y el módulo transversal en las direcciones principales elásticas del compuesto ortótropo

$E_m, E_f$ : son los módulos de elasticidad de la matriz  $m$  y de la fibra  $f$  del compuesto

$V_m, V_f$ : son los volúmenes relativos de la matriz y de la fibra respecto al compuesto

$\nu_m, \nu_f$ : son los módulos de Poisson de la matriz y de la fibra respectivamente

$G_m, G_f$ : son los módulos de elasticidad transversal de la matriz y de la fibra

$C$ : es el grado de contigüidad entre fibras

La densidad del compuesto se calcula como:

$$\rho_c = \frac{\eta \rho_f + \rho_m}{\eta + 1} \quad (12)$$

donde  $\rho_f$  y  $\rho_m$  son las densidades de fibra y matriz, respectivamente y  $\eta$  la relación de volúmenes:

$$\eta = \frac{V_f}{V_m}; V_c = V_m + V_f \quad (13)$$

y  $V_c$  es el volumen del compuesto.

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se presentan a continuación resultados numéricos obtenidos para placas de materiales compuestos formadas por una matriz epoxi con fibras de boro, utilizando el método de Ritz

Se obtuvieron las rigideces de la placa compuesta que aparecen en el funcional de energía correspondiente a un material anisótropo, expresión 3, utilizando las 5 y 6. Las condiciones de borde son las indicadas en la Figura 1, donde E corresponde a borde empotrado, SA a simplemente apoyado y L a libre.

En la Tabla 1, se presentan las propiedades mecánicas de la resina epoxi y del boro, matriz y fibras del compuesto, respectivamente, y a continuación las propiedades mecánicas del compuesto según dos concentraciones distintas de fibras.

a) Materiales componentes			
Matriz: resina epoxi			[unidades]
$\rho_m$	1540,00		kg/m <sup>3</sup>
$E_m$	3,50		GPa
$G_{12}$	1,32		GPa
$\nu_m$	0,33		
Fibra: boro			[unidades]
$\rho_f$	2450,00		kg/m <sup>3</sup>
$E_f$	420,00		GPa
$G_{12}$	175,00		GPa
$\nu_f$	0,20		
b) Compuesto: Boro-epoxi			
	$\eta$ [%]		[unidades]
	40%	60%	
$\rho$	1800,26	1881,25	kg/m <sup>3</sup>
$E_1$	122,62	159,69	GPa
$E_2$	4,89	5,57	GPa
$G_{12}$	2,35	2,86	GPa
$\nu_{12}$	0,287	0,274	
$\nu_{21}$	0,01142	0,00957	

Tabla 1: Características mecánicas de los materiales.

Se considera que la dirección principal elástica 1 forma un ángulo  $\varphi$  con la dirección coordenada  $x$ , paralela al borde de la placa rectangular.

Las rigideces flexionales y torsionales de una placa de material compuesto ortótropo en las direcciones elásticas principales, Lekhnitskii, (1968), son:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \quad (14)$$

$$D_3 = D_1 \nu_{21} + 2 D_k; \quad D_k = \frac{G_{12} h^3}{12}$$

De acuerdo a la orientación  $\varphi$  de las fibras de boro, se determinan las rigideces  $D_{ij}$  de cada caso particular de material compuesto, utilizando las expresiones 5 y 6.

En la Figura 2 se muestran las placas cuadradas,  $a=b$ , con distinta orientación de las fibras de boro en la matriz epoxi del material compuesto.

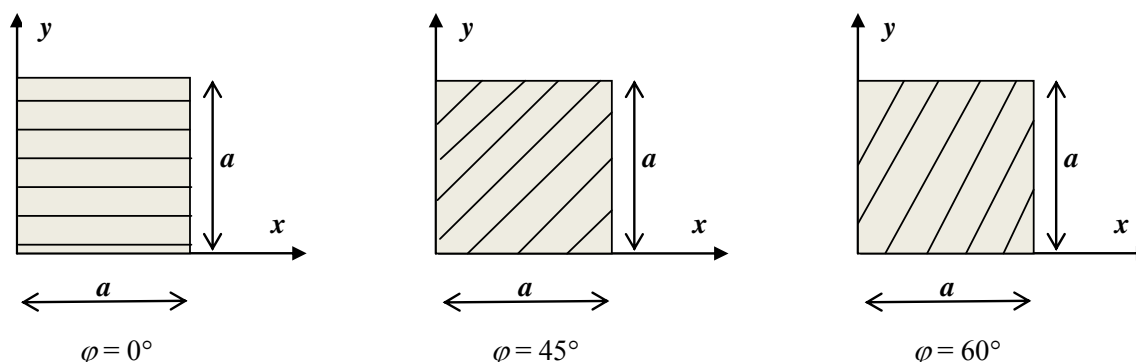


Figura 2: Placas cuadradas de material compuesto formado por una matriz epoxi y fibras de boro dispuestas en tres orientaciones  $\varphi$  diferentes.

Para adoptar el número de funciones viga a considerar en la aproximación de la deflexión de la placa por el método de Ritz, se realizó un análisis de convergencia (Tabla 2) para un compuesto boro-epoxi caracterizado por:  $E_1=209$  GPa,  $E_2=19$  GPa,  $G_{12}=6.4$  GPa,  $\nu_{12}=0.21$ , y  $\varphi=30^\circ$ , para una placa cuadrada con sus bordes empotrados, E-E-E-E. En la tabla se presentan los coeficientes de frecuencia adimensionales:

$$\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D_1} \quad (15)$$

$(M, N)$	$\Omega_1$	$\Delta_{M \times N} \%$	$\Omega_2$	$\Delta_{M \times N} \%$	$\Omega_3$	$\Delta_{M \times N} \%$	$\Omega_4$	$\Delta_{M \times N} \%$	$\Omega_5$	$\Delta_{M \times N} \%$
(6, 6)	19.4122		26.8659		38.5204		49.1619		53.1723	
(8, 8)	19.3721	0.21%	26.7692	0.36%	38.3331	0.49%	48.9492	0.43%	52.8141	0.67%
(10, 10)	19.3566	0.08%	26.7331	0.13%	38.2763	0.15%	48.8744	0.15%	52.7204	0.18%
(12, 12)	19.3495	0.04%	26.7173	0.06%	38.2547	0.06%	48.8414	0.07%	52.6868	0.06%
(15, 15)	19.3448	0.02%	26.7073	0.04%	38.2419	0.03%	48.8198	0.04%	52.6682	0.04%
<b>(20, 20)</b>	<b>19.3420</b>	<b>0.01%</b>	<b>26.7016</b>	<b>0.02%</b>	<b>38.2369</b>	<b>0.01%</b>	<b>48.8066</b>	<b>0.03%</b>	<b>52.6598</b>	<b>0.02%</b>

Tabla 2. Análisis de convergencia de los coeficientes de frecuencia adimensionales: Placa cuadrada E-E-E-E de material compuesto boro-epoxi con fibras orientadas a 30°.

A los fines de la práctica ingenieril, se considera que adoptar  $M \times N = 20 \times 20 = 400$  términos en la función aproximante del desplazamiento, permite la obtención de una precisión adecuada. Tal como puede observarse en la [Tabla 2](#), la diferencia porcentual de los valores de frecuencia  $\Delta_{20 \times 20} \%$  es menor o igual al 0.03%:

$$\Delta_{M \times N} \% = \Delta_{20 \times 20} \% = \frac{(\Omega_1)_{20 \times 20} - (\Omega_1)_{15 \times 15}}{(\Omega_1)_{15 \times 15}} \times 100 \quad (16)$$

En las [Tablas 3](#), [4](#) y [5](#) se presentan las primeras cinco frecuencias naturales de placas cuadradas compuestas,  $\eta = 0,40$ , con tres orientaciones de las fibras de boro, obtenidos por el método de Ritz, ver [Figura 2](#). Cada Tabla corresponde a condiciones de borde diferentes, ver [Figura 1](#). Las frecuencias están dadas en Hertz, y corresponden a una placa cuadrada, con  $a = b = 1$  m, de espesor  $h = 1$  cm.

$\varphi$	Frecuencias naturales [Hz]				
	1	2	3	4	5
0°	51,48	70,96	109,74	166,52	169,97
45°	68,73	109,66	155,64	162,62	208,52
60°	76,48	111,65	162,45	189,45	220,79

Tabla 3: Primeras cinco frecuencias naturales de una placa cuadrada E-E-E-E de boro-epoxi:  $\eta = 0,4$ .

$\varphi$	Frecuencias naturales [Hz]				
	1	2	3	4	5
0°	49,92	65,23	99,21	151,56	169,46
45°	61,17	98,27	142,43	152,11	193,22
60°	60,58	99,79	148,61	159,78	203,68

Tabla 4: Primeras cinco frecuencias naturales de una placa cuadrada E-E-E-SA de boro-epoxi:  $\eta = 0,4$ .



$\varphi$	Frecuencias naturales [Hz]				
	1	2	3	4	5
$0^\circ$	49,26	57,69	75,85	112,27	166,74
$45^\circ$	39,41	66,95	99,95	116,56	145,56
$60^\circ$	32,39	68,93	90,55	111,29	151,01

Tabla 5: Primeras cinco frecuencias naturales de una placa cuadrada E-E-E-L de boro-epoxi:  $\eta = 0,4$ .

En las Tablas siguientes 6 a 10, se muestran las frecuencias naturales y las formas modales de los primeros cinco modos de vibración natural una placa cuadrada compuesta para un contenido de fibra del 60 %, tres orientaciones de las fibras de boro, y los tres casos de condiciones de borde. Las formas modales se determinaron utilizando un programa comercial de elementos finitos ALGOR, (2009) y los valores de las frecuencias se obtubieron con el método de Ritz, indicado como (Ritz) y simultáneamente con ALGOR, indicado como (MEF).

En el método de elementos finitos para modelar las placas se tomaron 400 elementos del tipo composite, con un total de 441 nodos, el tipo de elemento cuenta con tres grados de libertad traslacionales y dos rotacionales en el plano del elemento. Esta densidad de malla se considera suficiente para dibujar las formas modales, si bien se considera aumentar su densidad en la continuación de este trabajo para comparar también los valores de frecuencias.

En los cinco primeros modos naturales de vibración presentados, es interesante observar cómo cambian las formas modales para las placas con fibras orientadas en distinta dirección. En cada uno, las formas se orientan en la dirección de las fibras.

También se puede ver el efecto de la condición del borde en  $y=b$ , que en cada fila de las Tablas se presenta de izquierda a derecha: borde empotrado (donde están impedidos los desplazamientos y giros), simplemente apoyado y borde libre, o sea del borde más restringido al libre.

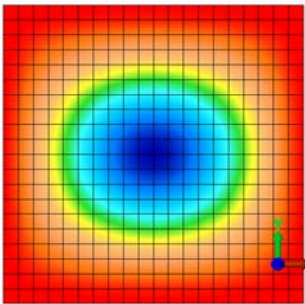
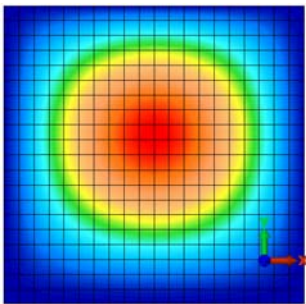
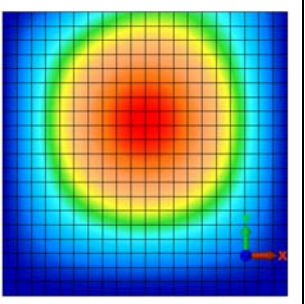
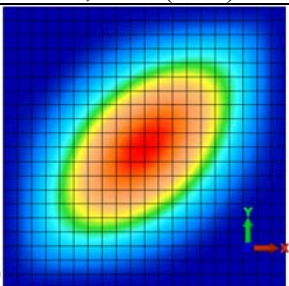
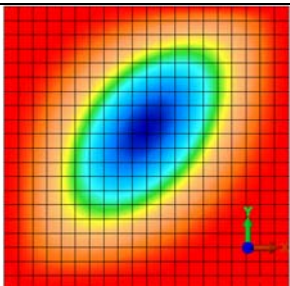
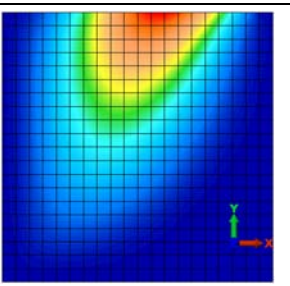
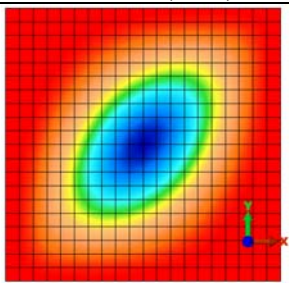
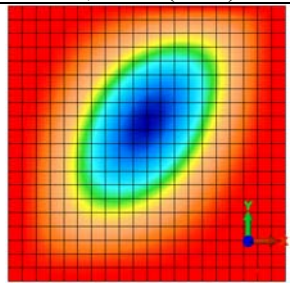
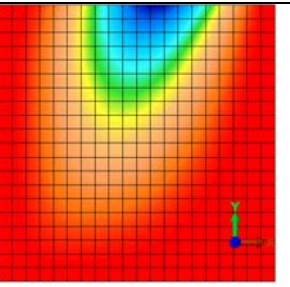
$\varphi$	E-E-E-E	E-E-E-SA	E-E-E-L
$0^\circ$	 <p>56,20 /s (MEF) 54,92 /s (Ritz)</p>	 <p>54,65 /s (MEF) 53,28 /s (Ritz)</p>	 <p>54,06 /s (MEF) 52,65 /s (Ritz)</p>
$45^\circ$	 <p>76,00 /s (MEF) 75,98 /s (Ritz)</p>	 <p>67,17 /s (MEF) 67,65 /s (Ritz)</p>	 <p>43,01 /s (MEF) 41,99 /s (Ritz)</p>
$60^\circ$	 <p>81,77 /s (MEF) 81,85 /s (Ritz)</p>	 <p>66,44 /s (MEF) 63,52 /s (Ritz)</p>	 <p>34,94 /s (MEF) 30,94 /s (Ritz)</p>

Tabla 6: Forma del primer modo natural de la placa cuadrada de material compuesto boro-epoxi.

$$V_f/V_m = 0.60$$

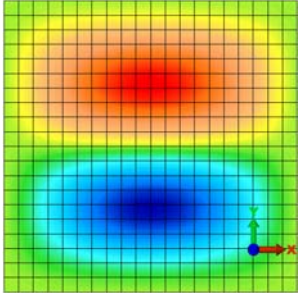
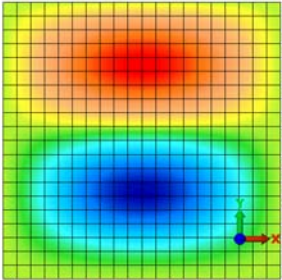
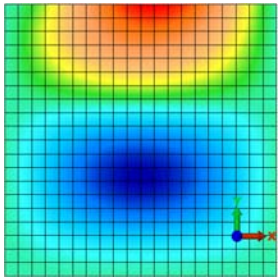
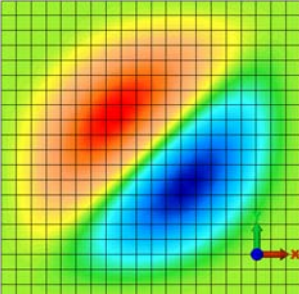
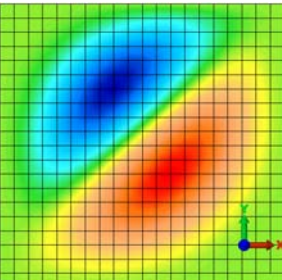
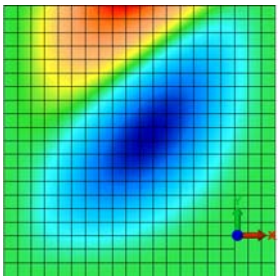
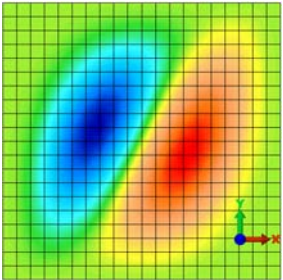
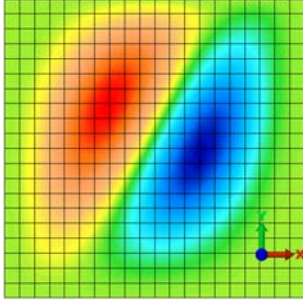
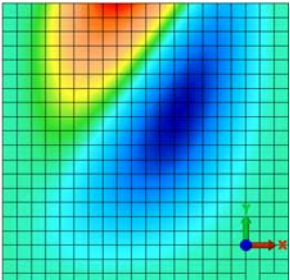
$\varphi$	E-E-E-E	E-E-E-SA	E-E-E-L
0°	 <p>76,03 /s (MEF) 75,02 /s (Ritz)</p>	 <p>70,22 /s (MEF) 69,92 /s (Ritz)</p>	 <p>63,08 /s (MEF) 62,35 /s (Ritz)</p>
45°	 <p>120,33 /s (MEF) 120,26/s (Ritz)</p>	 <p>106,78 /s (MEF) 108,24 /s (Ritz)</p>	 <p>72,82 /s (MEF) 74,72 /s (Ritz)</p>
60°	 <p>112,81 /s (MEF) 112,90/s (Ritz)</p>	 <p>108,09 /s (MEF) 99,78 /s (Ritz)</p>	 <p>74,29 /s (MEF) 67,09 /s (Ritz)</p>

Tabla 7: Forma del segundo modo natural de la placa cuadrada de material compuesto boro-epoxi.

$$V_f/V_m = 0.60$$

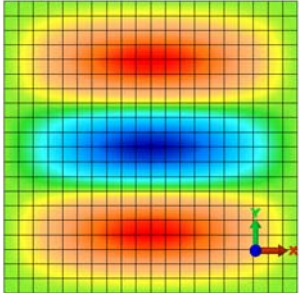
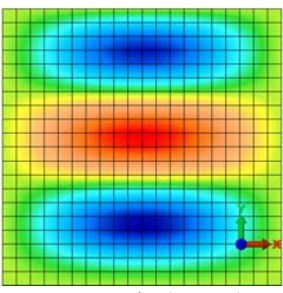
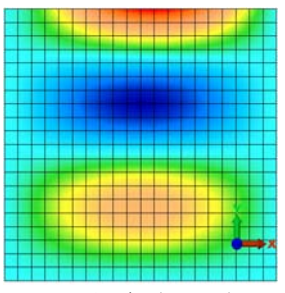
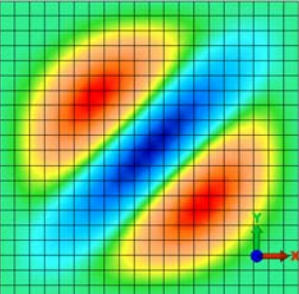
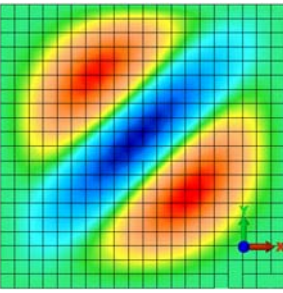
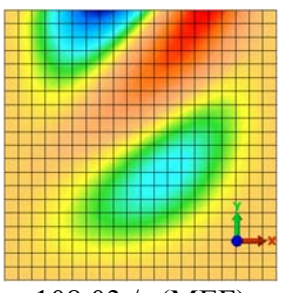
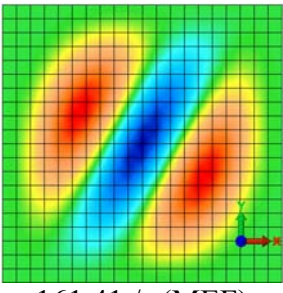
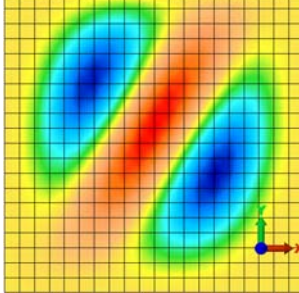
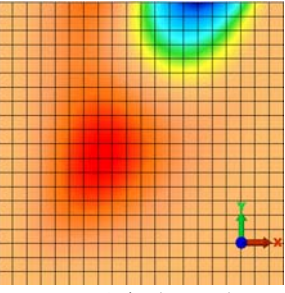
$\varphi$	E-E-E-E	E-E-E-SA	E-E-E-L
$0^\circ$	 <p>116,03 /s (MEF) 116,01 /s (Ritz)</p>	 <p>105,18 /s (MEF) 102,77 /s (Ritz)</p>	 <p>81,67 /s (MEF) 82,82 /s (Ritz)</p>
$45^\circ$	 <p>170,25 /s (MEF) 170,57/s (Ritz)</p>	 <p>153,78 /s (MEF) 156,72 /s (Ritz)</p>	 <p>108,03 /s (MEF) 110,45 /s (Ritz)</p>
$60^\circ$	 <p>161,41 /s (MEF) 161,66/s (Ritz)</p>	 <p>160,15 /s (MEF) 158,45 /s (Ritz)</p>	 <p>98,94 /s (MEF) 93,68 /s (Ritz)</p>

Tabla 8: Forma del tercer modo natural de la placa cuadrada de material compuesto boro-epoxi.  $V_f/V_m = 0.60$

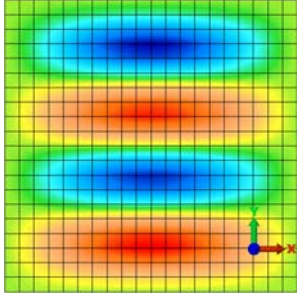
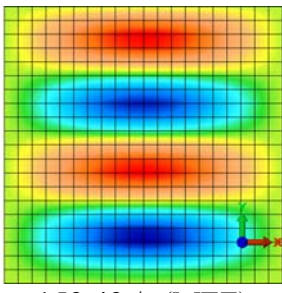
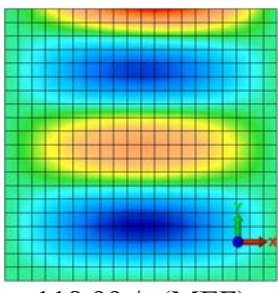
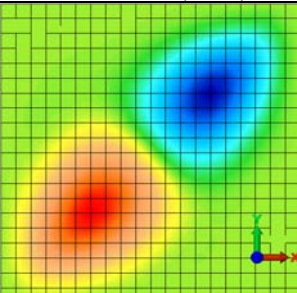
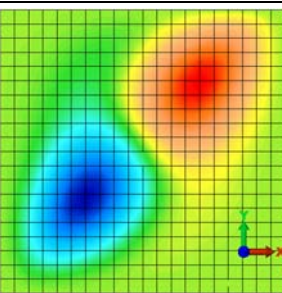
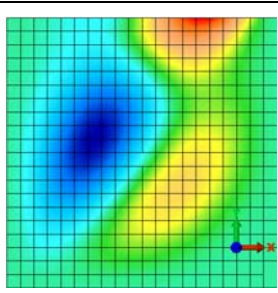
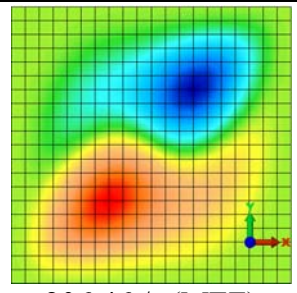
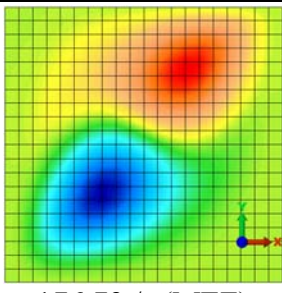
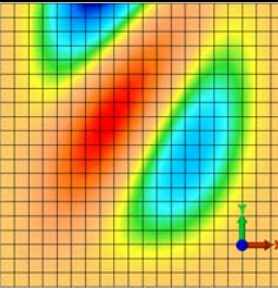
$\varphi$	E-E-E-E	E-E-E-SA	E-E-E-L
0°	 <p>175,00 /s (MEF) 174,88 /s (Ritz)</p>	 <p>159,49 /s (MEF) 159,28 /s (Ritz)</p>	 <p>118,99 /s (MEF) 114,06 /s (Ritz)</p>
45°	 <p>180,83 /s (MEF) 181,00 /s (Ritz)</p>	 <p>167,88 /s (MEF) 168,73 /s (Ritz)</p>	 <p>127,71 /s (MEF) 126,40 /s (Ritz)</p>
60°	 <p>206,46 /s (MEF) 206,38 /s (Ritz)</p>	 <p>176,79 /s (MEF) 173,74 /s (Ritz)</p>	 <p>119,82 /s (MEF) 110,76 /s (Ritz)</p>

Tabla 9: Forma del cuarto modo natural de la placa cuadrada de material compuesto boro-epoxi.

$$V_f/V_m = 0.60$$

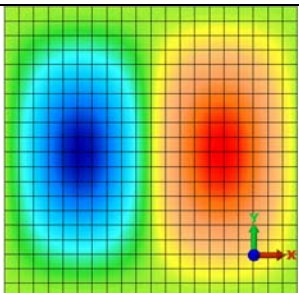
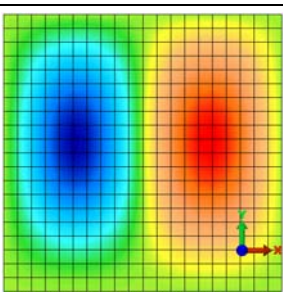
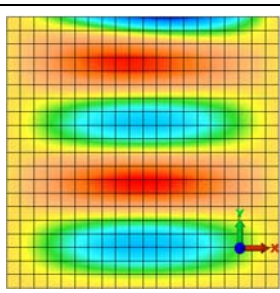
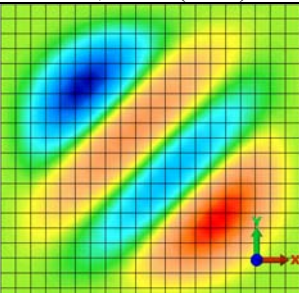
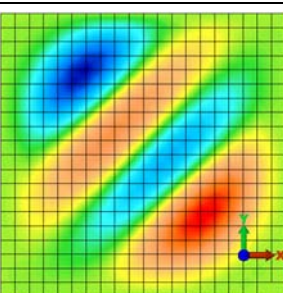
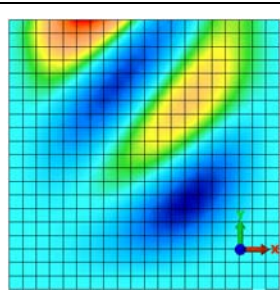
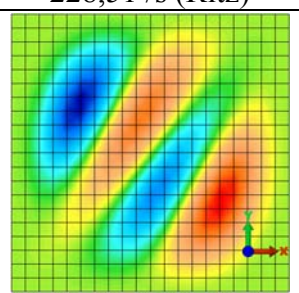
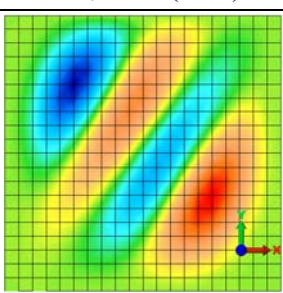
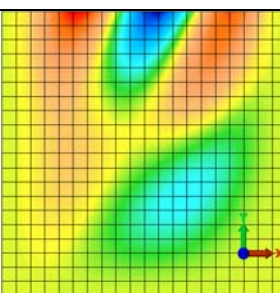
$\varphi$	E-E-E-E	E-E-E-SA	E-E-E-L
$0^\circ$	 187,97 /s (MEF) 187,91 /s (Ritz)	 187,47 /s (MEF) 185,53 /s (Ritz)	 175,59 /s (MEF) 175,60 /s (Ritz)
$45^\circ$	 227,72 /s (MEF) 228,51 /s (Ritz)	 207,65 /s (MEF) 212,72 /s (Ritz)	 156,5 /s (MEF) 163,58 /s (Ritz)
$60^\circ$	 222,06 /s (MEF) 222,64 /s (Ritz)	 218,72 /s (MEF) 215,21 /s (Ritz)	 162,57 /s (MEF) 158,27 /s (Ritz)

Tabla 10: Forma del quinto modo natural de la placa de material compuesto boro-epoxi.  $V_f/V_m = 0.60$

#### 4 CONCLUSIONES

De los ejemplos resueltos se puede decir que al aumentar la relación de fibras  $\eta$  de 0.4 a 0.6 en el material compuesto, en todos los casos se produce una elevación de los valores de las frecuencias naturales.

También, como puede verse en las tablas, para un material con la misma relación  $\eta$  de fibras, las frecuencias tienden a ser más altas a medida que la dirección de las fibras tiene una apertura angular  $\varphi$  mayor con el eje  $x$ , paralelo al lado de la placa:  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ . Sin embargo, hay situaciones en las que esa tendencia no se cumple como para el modo 4 con E-E-E-E,  $\eta = 0.4$  de la [Tabla 3](#); en el modo 1 con E-E-E-SA,  $\eta = 0.4$  de la [Tabla 4](#). En el caso de la placa E-E-E-L,  $\eta = 0.4$ , tampoco ocurre para los modos 1, 3, 4 y 5 ([Tabla 5](#)). En el modo 1 con E-E-E-SA, y E-E-E-L,  $\eta = 0.6$  de la [Tabla 6](#) y el modo 2 con E-E-E-E,  $\eta = 0.6$  de la [Tabla 7](#). En el

modo 3 con E-E-E-E y E-E-E-L,  $\eta = 0.6$ , (Tabla 8). En el cuarto modo con E-E-E-L,  $\eta = 0.6$  de la Tabla 9 y en el modo quinto para E-E-E-E y E-E-E-L,  $\eta = 0.6$  de la Tabla 10. Motivo por el cual no es posible enunciar una tendencia general de comportamiento.

Por último, un cambio de la condición de sustentación en el borde  $y=b$ , que varía entre empotrado, simplemente apoyado y libre, se traduce en una influencia sobre las frecuencias naturales, produciéndose, como era de esperarse, valores mayores para la condición más restrictiva de empotramiento y disminuyendo para la simplemente apoyada y algo más todavía para la condición de borde libre.

Los valores obtenidos con ambas metodologías si bien marcan un acuerdo en la mayoría de los casos, existen algunos valores con diferencias del orden del 10%, por lo que en la continuidad de este estudio se tomará un mayor número de elementos en el método de elementos finitos.

Finalmente puede decirse que para determinar tendencias de comportamiento de las vibraciones libres de placas cuadradas de material compuesto, aún en el caso en que solamente se considere analizar el contenido de fibras de refuerzo y su orientación, en relación a condiciones de borde clásicas, es necesario ampliar la variedad de casos de estudio.

## AGRADECIMIENTO

El presente trabajo fue auspiciado por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, por la Universidad Nacional del Sur, UNS, y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET.

## REFERENCIAS

- ALGOR *software*. Versión 23.01. 2009.
- Bachir Bouiadjra, B., Ouinas, D., Serier, B., Benderdouche, N., Disbonded effects on bonded boron/epoxy composite repair to aluminium plates. *Computational Materials Science*, 42:220-227, 2008.
- Ciancio, P. M., Pico, O. L. y Rossit, C. A., Incidencia de la conformación anisotrópica de placas rectangulares delgadas sobre las frecuencias naturales de vibración. *Mecánica Computacional*, volumen XXIX: 343-351, 2010.
- Ciancio, P. M., Pico, O. L. y Bambill, D. V., Respuesta dinámica de placas cuadradas empotradas conformadas por distintas caracterizaciones de boro-epoxi. Enviado a publicación. 2011.
- Cupial, P., Calculation of the natural frequencies of composite plates by the Rayleigh-Ritz method with orthogonal polynomials. *Journal of Sound and Vibration*, 201(3):385-387, 1997.
- Felgar Jr., R. P., Formulas for integrals containing characteristic functions of a vibrating beam. *The University of Texas Publication*, Circ.Nº 14. 1951.
- Laura, P. A. A., Grossi, R. O., Transverse vibrations of rectangular anisotropic plates with edges elastically restrained against rotation. *Journal of Sound and Vibration*, 64(2):257-267, 1979.
- Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic Plates*. Gordon & Breach, New York, 1968.
- Malekzadeh, P., A differential quadrature nonlinear free vibration analysis of laminated composite skew thin plates. *Thin-Walled Structures*, 45:237-250, 2007.
- Tsai, S. W., *Structural Behavior of Composite Materials*. NASA CR-71, 1964.