

INESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS ESBELTAS CONSTRUIDAS CON MATERIALES DE PROPIEDADES DISTRIBUIDAS FUNCIONALMENTE

Sebastián Domini^{a,b} y Marcelo T. Piovan^a

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca. 11 de Abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, BA, Argentina, mpiovan@frbb.utn.edu.ar <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

^b*Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca. 11 de Abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, BA, Argentina, <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

Palabras Clave: Vigas curvas, materiales funcionales, inestabilidad.

Resumen. En este trabajo se efectúan estudios sobre la inestabilidad estática de estructuras esbeltas construidas con materiales funcionales. Al efectuar una revisión en la literatura científica especializada se puede observar la falta de información referente al estudio de inestabilidad de vigas curvas construidas con materiales funcionales. Este problema fue encarado por muy pocos autores aunque empleando formulaciones que no consideran determinados efectos elásticos no convencionales. Se han reportado diversos estudios referentes al comportamiento estático y dinámico en el plano de curvatura de las vigas precurvadas, sin embargo no se han observado estudios suficientemente completos que contemplen a su vez el movimiento fuera del plano y el acoplamiento entre ambos asociado a las propiedades materiales, variables en el dominio. El objetivo de este trabajo incluye dos puntos. En primer lugar se desea desarrollar un modelo de estudio para la inestabilidad estática de vigas curvas de materiales no homogéneos, a partir de una teoría linealizada conteniendo movimientos en el plano y fuera del plano. El segundo punto reside en estudiar y caracterizar el problema de inestabilidad para vigas curvas construidas con materiales de distribución funcional arbitraria entre cerámicos y metales. El modelo se desarrolla empleando un campo de desplazamiento que incluye rotaciones finitas semitangenciales. Los estudios se efectúan dentro del contexto del método de elementos finitos empleando herramientas basadas en elementos isoparamétricos de 4 y 5 nodos. Se analizan diferentes casos de distribución funcional de propiedades junto con variación de los parámetros geométricos, entendiéndose por ello, no simetría, acoplamiento geométrico y acoplamiento elástico presentes en el modelo

1. INTRODUCCION

Los materiales no homogéneos, cuyas propiedades elásticas y másicas pueden variar en alguna dirección especificada, han emergido como una atractiva opción para solucionar problemas de gradientes de tensiones (tangenciales y normales) que suelen aparecer en estructuras construidas en capas de dos o más materiales diferentes (por ejemplo, metales y cerámicos). Se ha observado que algunas configuraciones laminadas pueden tener altos gradientes de tensiones que eventualmente podrían conducir a la separación de las capas (llamado debonding en inglés) o a la presencia de fisuras o de falla general.

El concepto de material con propiedades distribuidas funcionalmente en una determinada dirección fue primeramente explorado en los años setenta para diseñar barreras térmicas efectivas para los álabes de turbinas. Posteriormente, en los años ochenta se acuñó el nombre de materiales distribuidos funcionalmente o más simplemente materiales funcionales (functionally graded materials en inglés), en base a un proceso de fabricación desarrollado originalmente en Japón. Posteriormente se ha suscitado un gran interés en los usos y aplicaciones ingenieriles de este tipo de materiales, especialmente en estructuras de vehículos militares, actuadores aeroespaciales, sensores especiales para usos industriales y médicos, etc. En los últimos diez años muchos investigadores se han concentrado en efectuar estudios referentes a estructuras construidas con materiales funcionales, empleando modelos de cáscaras y placas, como también modelos de sólidos. En los trabajos de [Reddy y Chin \(1998\)](#), [Reddy \(2000\)](#), [Praveen et al. \(1999\)](#), [Kitipornchai et al. \(2004\)](#), [Hosseini Kordkheili y Naghdabadi \(2007\)](#) entre otros, se pueden apreciar algunos estudios relevantes en la mecánica de cáscaras y placas no homogéneas y sólidos con propiedades distribuidas funcionalmente.

Algunas investigaciones relevantes, en el marco de modelación de vigas rectas o estructuras esbeltas con propiedades distribuidas funcionalmente, se pueden encontrar en los trabajos de [Chakraborty et al. \(2003\)](#), [Goupee y Vel \(2006\)](#), [Ding et al. \(2007\)](#) and [Lü et al. \(2008\)](#), entre otros contemporáneos. En estos artículos se han empleado diversas leyes de distribución de las propiedades en las secciones transversales de las vigas. Estas leyes pueden ser potenciales, exponenciales, polinómicas, etc. Estos artículos se han empleado enfoques bidimensionales y tridimensionales para representar la mecánica de las estructuras. Por otro lado, se debe destacar la escasez de investigaciones sobre la mecánica de vigas curvas construidas con materiales funcionales. Así pues [Dryden \(2007\)](#) llevó a cabo un estudio sobre la distribución de estados tensionales en vigas naturalmente curvadas empleando la hipótesis de estados planos de tensión. [Malekzadeh \(2009\)](#) analizó el comportamiento dinámico de arcos en su propio plano empleando formulaciones bidimensionales. [Malekzadeh et al. \(2010\)](#) desarrollaron un modelo unidimensional para analizar las vibraciones fuera del plano de vigas curvas de materiales funcionales considerando efectos termoelásticos. [Piovan et al. \(2008\)](#) desarrollaron un modelo unidimensional de viga curva recurriendo al principio variacional de Hellinger-Reissner. [Filipich y Piovan \(2010\)](#) dedujeron un modelo de arcos gruesos empleando el enfoque de resistencia de materiales. Aunque, se debe acotar, que estos últimos dos trabajos se restringieron al estudio del comportamiento en el plano. [Piovan y Domini \(2010\)](#) desarrollaron un modelo para analizar el problema de vibraciones acopladas en el plano y fuera del plano de vigas curvas construidas con materiales funcionales y contemplando flexibilidad por corte. Aparentemente [Shafiee et al. \(2006\)](#) fueron los primeros en desarrollar una teoría para analizar los problemas de inestabilidad de vigas curvas de materiales funcionales. Sin embargo, el modelo de [Shafiee et al. \(2006\)](#) no contempla la flexibilidad por corte, la cual es de suma importancia en determinadas relaciones de esbeltez.

El objetivo de este trabajo se concentra en el desarrollo de un modelo unidimensional de vigas curvas de materiales funcionales que sea de utilidad para calcular las cargas de pandeo. El modelo es concebido de manera tal que se puedan incorporar en una forma unificada los movimientos en el plano y fuera del plano y los acomplamientos debidos a efectos constitutivos y termoelásticos. Con el objeto de evitar confusiones, los conceptos de movimiento en el plano y fuera del plano están vinculados al plano que contiene el eje de curvatura de la viga. La flexibilidad por corte se incluye con los aportes flexionales y por torsión no uniforme. Efectos de alabeo también se tienen en cuenta. Estos aspectos son de suma importancia en la mecánica de vigas curvas con determinado tipo de secciones (p.e. secciones abiertas de paredes delgadas). El modelo se desarrolla a partir del principio de trabajos virtuales linealizado, empleando en ello un campo de desplazamiento que incorpora rotaciones finitas en el sentido semitangencial introducido por Argyris y colaboradores en los comienzos de los años ochenta. El modelo consiste en un conjunto de siete ecuaciones diferenciales elásticamente acopladas. Sin embargo, dependiendo del tipo de distribución funcional de las propiedades y las características geométricas de la sección transversal, el sistema se puede desacoplar en dos o más sub-sistemas. El modelo se discretiza por medio de elementos finitos isoparamétricos que incorporan estrategias de integración reducida para evitar posibles problemas de bloqueo por corte, frecuentes en las formulaciones que incorporan flexibilidad por corte. Finalmente se efectúan algunos estudios paramétricos para caracterizar las cargas de pandeo lateral de este tipo de estructuras, bajo patrones de sollicitación variados y leyes de distribución de material genéricas.

2. DESARROLLO DEL MODELO

En la Fig. 1 se muestra un diagrama de la viga curva de material funcional con sección genérica. Se puede observar el sistema principal de referenciación, punto **C**, que está ubicado en el centro geométrico de la sección transversal. El eje x es tangente a la circunferencia que forman los centros geométricos de la viga curva, en tanto que los ejes y y z , contenidos en la sección transversal, no son necesariamente ejes principales. La teoría de vigas curvas se basa en las siguientes suposiciones:

- 1 El contorno de la sección transversal es rígido en su propio plano.
- 2 La función de alabeo se define con respecto al punto **C**.
- 3 Las propiedades materiales pueden variar con una función arbitraria dentro de la sección transversal y se emplea la hipótesis de isotropía transversal.
- 4 El tensor de tensiones, las fuerzas volumétricas y superficiales se representan por componentes iniciales e incrementales.
- 5 El campo de desplazamiento se describe mediante componentes lineales y de segundo orden caracterizadas según la ley de rotaciones semi-tangencial.

2.1. Formulación variacional

La expresión general del principio de trabajos virtuales para un cuerpo que presenta tensiones iniciales puede escribirse de la siguiente manera (Washizu, 1968):

$$\int_V \sigma_{ij}^f \delta e_{ij} dV - \int_V \bar{X}_i^f \delta \bar{u}_i^f dV - \int_S \bar{T}_i^f \delta \bar{u}_i^f dS = 0, \quad (1)$$

donde \bar{u}_i^f es el vector de desplazamientos, e_{ij} es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange, σ_{ij}^f es el segundo tensor de Piola-Kirchhof, \bar{X}_i^f es el vector de fuerzas volumétricas,

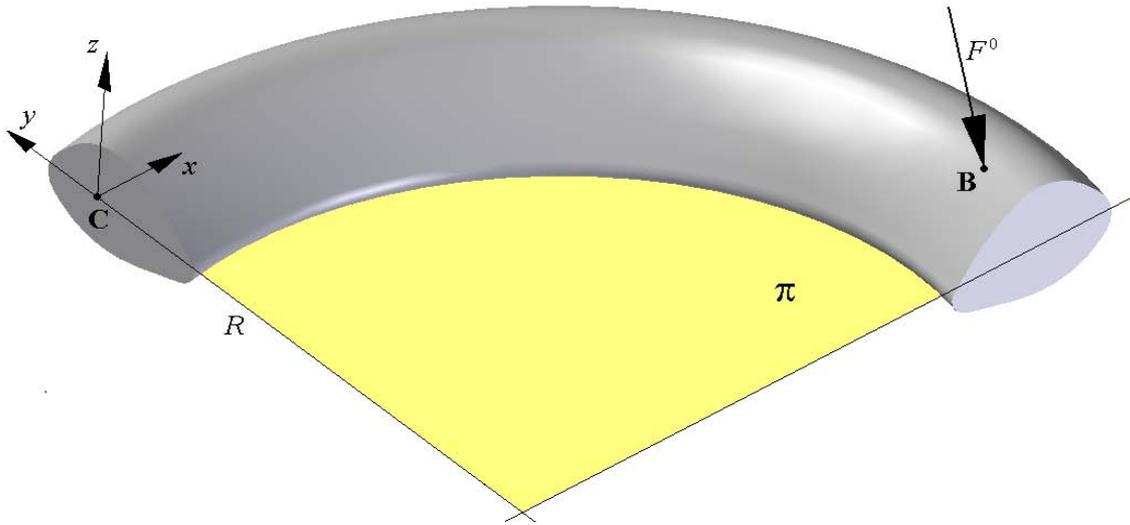


Figura 1: Esquema de la viga

y \bar{T}_i^f es el vector de fuerzas de superficie. σ_{ij}^f , \bar{X}_i^f y \bar{T}_i^f se definen como la suma de sus componentes incrementales (σ_{ij} , \bar{X}_i and \bar{T}_i) e iniciales (σ_{ij}^0 , \bar{X}_i^0 and \bar{T}_i^0). Los desplazamientos \bar{u}_i^f se definen como la suma de \bar{u}_i^L y \bar{u}_i^{NL} , lo que significa componentes de primer y segundo orden (es decir lineal y no lineal), respectivamente. V es el dominio volumétrico S es el dominio superficial.

Así pues, empleando las hipótesis 3) a 5) en la Ec. (1) se puede obtener el principio general linealizado de trabajos virtuales para una viga bajo la presencia de un estado arbitrario de tensiones iniciales, el cual se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_T = & \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^L dV + \int_V \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^{NL} dV - \int_S \bar{T}_i^0 \delta u_i^{NL} dS - \\ & - \int_V \bar{X}_i^0 \delta u_i^{NL} dV - \int_V \bar{X}_i \delta u_i^L dV - \int_S \bar{T}_i \delta u_i^L dS = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathcal{W}_T^0 = \int_V \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^L dV - \int_V \bar{X}_i^0 \delta u_i dV - \int_S \bar{T}_i^0 \delta u_i dS = 0, \quad (3)$$

La Ec. (2) está condicionada al cumplimiento de la condición dada por la Ec. (3), la cual implica la condición de autoequilibrio de las tensiones iniciales con las fuerzas iniciales volumétricas y superficiales. El primer término de la Ec. (2) constituye el trabajo virtual debido a las fuerzas internas, el segundo término constituye el trabajo virtual debido a las tensiones iniciales, el tercer y cuarto términos corresponden al trabajo virtual de las fuerzas volumétricas y superficiales iniciales debidos a los desplazamientos de segundo orden, el quinto y sexto términos corresponden al trabajo virtual de fuerzas volumétricas y superficiales incrementales debidos a los desplazamientos incrementales. ε_{ij}^L son las partes lineales de los componentes del tensor de deformaciones, en tanto que ε_{ij}^{NL} son las partes no lineales de los mismos. Las mismas se expresan a continuación:

$$\varepsilon_{ij}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j^L}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^L}{\partial x_j} \right), \varepsilon_{ij}^{NL} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j^{NL}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^{NL}}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^L}{\partial x_i} \frac{\partial u_h^L}{\partial x_j} \right). \quad (4)$$

Los terminos de orden superior en los componentes del tensor de deformaciones de Green-Lagrange se desprecian (Piovan y Cortínez, 2007; Kim et al., 2005).

2.2. Relaciones cinemáticas

Teniendo en cuenta las hipótesis 1), 2) y 5) es posible desarrollar el campo de desplazamiento, para un punto arbitrario de la viga curva, que incluye componentes lineales y no lineales (en los términos de los parámetros de rotación). Estas relaciones cinemáticas se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} u_x^L \\ u_y^L \\ u_z^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{xc} - \omega \Phi_W \\ u_{yc} \\ u_{zc} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Phi_3 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & 0 & -\Phi_1 \\ -\Phi_2 & \Phi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x^{NL} \\ u_y^{NL} \\ u_z^{NL} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\Phi_3^2 - \Phi_2^2 & \Phi_1 \Phi_2 & \Phi_1 \Phi_3 \\ \Phi_1 \Phi_2 & -\Phi_1^2 - \Phi_3^2 & \Phi_2 \Phi_3 \\ \Phi_1 \Phi_3 & \Phi_2 \Phi_3 & -\Phi_1^2 - \Phi_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

donde, ω es la función de alabeo de la viga, Φ_W , Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 se definen en función de los parámetros de rotación y alabeo de acuerdo con las siguientes expresiones

$$\Phi_1 = \phi_x, \quad \Phi_2 = \theta_y, \quad \Phi_3 = \theta_z - \frac{u_{xc}}{R}, \quad \Phi_W = \theta_x + \frac{\theta_y}{R} \quad (7)$$

En las anteriores expresiones, u_{xc} , u_{yc} , u_{zc} corresponden a los desplazamientos del centro de referencia; ϕ_x es el ángulo de rotación torsional; θ_y y θ_z son los parámetros rotacionales de flexión, y finalmente θ_x es una medida de la intensidad de alabeo a lo largo del eje curvo de la viga.

La función de alabeo de la viga curva se puede aproximar (Yang y Kuo, 1987) de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\omega = \bar{\omega} \mathcal{F}, \quad \text{con} \quad \mathcal{F} = \frac{R}{R + y}, \quad (8)$$

donde, $\bar{\omega}$ es la función de alabeo para una viga recta con las mismas características seccionales de la viga curva. Esta función es caso dependiente de la ley de distribución de las propiedades elásticas (por ejemplo, la variación del módulo de elasticidad transversal) y se puede resolver a partir de los criterios elaborados por Lekhnitskii (1981), y extendidos en el trabajo de Piovani y Domini (2010).

Si el módulo de elasticidad transversal está distribuido según una expresión general, la función de alabeo $\bar{\omega}$ se debe calcular con métodos numéricos. Sin embargo bajo ciertas condiciones particulares y tipos de distribución de las propiedades elásticas en el dominio de la sección transversal, $\bar{\omega}$ se puede deducir con una forma analítica (Lekhnitskii, 1981).

Las componentes más representativas del tensor de deformaciones vienen expresadas a continuación:

$$\varepsilon_{xx}^L = \left(\frac{\partial u_x^L}{\partial x} + \frac{u_y^L}{R} \right) \mathcal{F}, \quad 2\varepsilon_{xy}^L = \left(\frac{\partial u_y^L}{\partial x} - \frac{u_x^L}{R} \right) \mathcal{F} + \frac{\partial u_x^L}{\partial y}, \quad 2\varepsilon_{xz}^L = \frac{\partial u_z^L}{\partial x} \mathcal{F} + \frac{\partial u_x^L}{\partial z}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{xx}^{NL} = \left(\frac{\partial u_x^{NL}}{\partial x} + \frac{u_y^{NL}}{R} \right) \mathcal{F} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x^L}{\partial x} + \frac{u_y^L}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y^L}{\partial x} - \frac{u_x^L}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^L}{\partial x} \right)^2 \right] \mathcal{F}^2, \quad (10)$$

$$2\varepsilon_{xy}^{NL} = \left(\frac{\partial u_y^{NL}}{\partial x} - \frac{u_x^{NL}}{R} \right) \mathcal{F} + \frac{\partial u_x^{NL}}{\partial y} + \left[\frac{\partial u_x^L}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x^L}{\partial x} + \frac{u_y^L}{R} \right) + \frac{\partial u_y^L}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y^L}{\partial x} - \frac{u_x^L}{R} \right) + \left(\frac{\partial u_z^L}{\partial y} \frac{\partial u_z^L}{\partial x} \right) \right] \mathcal{F}, \quad (11)$$

$$2\varepsilon_{xz}^{NL} = \left(\frac{\partial u_z^{NL}}{\partial x} \mathcal{F} + \frac{\partial u_x^{NL}}{\partial z} \right) + \left[\frac{\partial u_x^L}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x^L}{\partial x} + \frac{u_y^L}{R} \right) + \frac{\partial u_y^L}{\partial z} \left(\frac{\partial u_y^L}{\partial x} - \frac{u_x^L}{R} \right) + \left(\frac{\partial u_z^L}{\partial z} \frac{\partial u_z^L}{\partial x} \right) \right] \mathcal{F}, \quad (12)$$

Ahora bien, reemplazando Eqs. (5)-(7) en las Ecs (9)-(12) y despreciando los términos de orden superior, se pueden hallar los términos lineales y no lineales de las componentes del tensor de deformación, los cuales se pueden ver en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^L &= [\varepsilon_{D1} + z\varepsilon_{D2} - y\varepsilon_{D3} - \omega\varepsilon_{D4}] \mathcal{F}, \\ 2\varepsilon_{xy}^L &= \left[\varepsilon_{D5} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \varepsilon_{D7} - \left(z + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \varepsilon_{D8} \right] \mathcal{F}, \\ 2\varepsilon_{xz}^L &= \left[\varepsilon_{D6} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \varepsilon_{D7} + \left(y - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) \varepsilon_{D8} \right] \mathcal{F}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{NL} &= \frac{\mathcal{F}}{2} \left[y(\Phi_1' \Phi_2 + \Phi_1 \Phi_2') + z(\Phi_1' \Phi_3 + \Phi_1 \Phi_3') - \frac{y(\Phi_1^2 + \Phi_3^2)}{R} + \frac{z\Phi_2\Phi_3}{R} \right] + \\ &\frac{\mathcal{F}^2}{2} \left[(\varepsilon_{D1} + z\varepsilon_{D2} - y\varepsilon_{D3} - \omega\varepsilon_{D4})^2 + \left(\varepsilon_{D6} + y\varepsilon_{D8} - \frac{y+R}{R} \Phi_2 \right)^2 \right] \\ &\frac{\mathcal{F}^2}{2} \left[\left(\varepsilon_{D5} - z\varepsilon_{D8} + \frac{y+R}{R} \Phi_3 + \frac{\omega\Phi_W}{R} \right)^2 \right], \\ 2\varepsilon_{xy}^{NL} &= \mathcal{F} \left[(-\Phi_2' \Phi_3 + \Phi_2 \Phi_3') \frac{z}{2} - \frac{\Phi_1 \Phi_2}{2} + \frac{\Phi_1 \Phi_3 z}{2R} - \Phi_3 \varepsilon_{D1} + \Phi_3 \Phi_W' \omega \right] + \\ &+ \mathcal{F} \left[\Phi_1 \varepsilon_{D6} - \Phi_W \frac{\partial \omega}{\partial y} (\varepsilon_{D1} + z\varepsilon_{D2} - y\varepsilon_{D3} - \omega\varepsilon_{D4}) \right], \\ 2\varepsilon_{xz}^{NL} &= \mathcal{F} \left[(\Phi_2' \Phi_3 - \Phi_2 \Phi_3') \frac{y}{2} - \frac{\Phi_1 \Phi_3}{2} - \frac{\Phi_1 \Phi_3 y}{2R} + \Phi_2 (\varepsilon_{D1} - \Phi_W' \omega) \right] + \\ &+ \mathcal{F} \left[-\Phi_1 \varepsilon_{D5} - \Phi_W \frac{\partial \omega}{\partial z} (\varepsilon_{D1} + z\varepsilon_{D2} - y\varepsilon_{D3} - \omega\varepsilon_{D4}) - \Phi_1 \Phi_W \frac{\omega}{R} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

En las Ecs. (13)-(14) se han empleado las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1} &= u'_{xc} + \frac{u_{yc}}{R}, \varepsilon_{D2} = \theta'_y - \frac{\phi_x}{R}, \varepsilon_{D3} = \theta'_z - \frac{u'_{xc}}{R}, \varepsilon_{D4} = \theta'_x + \frac{\theta'_y}{R}, \\ \varepsilon_{D5} &= u'_{yc} - \theta_z, \varepsilon_{D6} = u'_{zc} + \theta_y, \varepsilon_{D7} = \phi'_x - \theta_x, \varepsilon_{D8} = \phi'_x + \frac{\theta_y}{R}, \end{aligned} \quad (15)$$

Las primas empleadas en las Ecs. (13)-(15) implican derivación con respecto a la variable x . Las entidades definidas en la Ec. (15) deben interpretarse como deformaciones generalizadas. En efecto, ε_{D1} corresponde a la deformación axial-circunferencial, ε_{D2} y ε_{D3} corresponden a las deformaciones flexionales, ε_{D4} está vinculada a la deformación por alabeo, ε_{D5} y ε_{D6} corresponden a las deformaciones por corte flexional, mientras que ε_{D7} está asociada con la deformación por corte torsional debido al alabeo no uniforme, y finalmente ε_{D8} está vinculada con la deformación por torsión pura.

2.3. Ecuaciones de movimiento

Para hallar las ecuaciones de movimiento, la expresión del principio de trabajos virtuales dada en Ec. (2) se condensa en la siguiente forma:

$$\delta\mathcal{T}_U + \delta\mathcal{T}_{G1} + \delta\mathcal{T}_{G2} + \delta\mathcal{T}_{EF} = 0 \quad (16)$$

donde, $\delta\mathcal{T}_U$, $\delta\mathcal{T}_{G1}$, $\delta\mathcal{T}_{G2}$ y $\delta\mathcal{T}_{EF}$ son los trabajos virtuales de las fuerzas internas, los trabajos virtuales de las tensiones iniciales, los trabajos virtuales de las fuerzas iniciales y los trabajos virtuales de las fuerzas externas incrementales, respectivamente. Estos términos se representan de la siguiente forma:

$$\delta\mathcal{T}_U = \int_L [Q_x \delta\varepsilon_{D1} + M_y \delta\varepsilon_{D2} + M_z \delta\varepsilon_{D3} + B \delta\varepsilon_{D4}] dx + \int_L [Q_y \delta\varepsilon_{D5} + Q_z \delta\varepsilon_{D6} + T_w \delta\varepsilon_{D7} + T_{sv} \delta\varepsilon_{D8}] dx, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{T}_{G1} = & \delta \int_L \left[\frac{M_z^0}{2} \left(\frac{\Phi_1^2 + \Phi_3^2}{R} - \Phi_1' \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_2' \right) \right] dx + \\ & \delta \int_L \left[\frac{M_y^0}{2} \left(\frac{\Phi_2 \Phi_3}{R} + \Phi_1' \Phi_3 + \Phi_1 \Phi_3' \right) \right] dx + \\ & \frac{\delta}{2} \int_L [(\bar{\mathbf{d}}_a)^T \mathbf{B}_a^0 \bar{\mathbf{d}}_a + (\bar{\mathbf{d}}_b)^T \mathbf{B}_b^0 \bar{\mathbf{d}}_b + (\bar{\mathbf{d}}_c)^T \mathbf{B}_c^0 \bar{\mathbf{d}}_c] dx + \\ & \delta \int_L \left[\frac{M_x^0}{2} \left(\Phi_2' \Phi_3 - \Phi_2 \Phi_3' - \frac{\Phi_1 \Phi_3}{R} \right) \right] dx + \\ & \delta \int_L \left[Q_y^0 \left(\Phi_1 \varepsilon_{D6} - \Phi_3 \varepsilon_{D1} - \frac{\Phi_1 \Phi_2}{2} \right) \right] dx + \\ & \delta \int_L \left[Q_z^0 \left(\Phi_2 \varepsilon_{D1} - \Phi_1 \varepsilon_{D5} - \frac{\Phi_1 \Phi_3}{2} \right) \right] dx + \\ & \delta \int_L \left[Q_{zw}^0 \left(\Phi_2 \Phi_W' + \frac{\Phi_1 \Phi_W}{R} \right) - Q_{yw}^0 (\Phi_3 \Phi_W') \right] dx + \\ & \delta \int_L [T_w^0 \Phi_W \varepsilon_{D1} + T_{wz}^0 \Phi_W \varepsilon_{D2} + T_{wy}^0 \Phi_W \varepsilon_{D3} + T_{ww}^0 \Phi_W \varepsilon_{D4}] dx, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\delta\mathcal{T}_{G2} = - \int_L [\bar{\mathbf{X}}_1^0 \delta u_{xc} + \bar{\mathbf{X}}_3^0 \delta \theta_z + \bar{\mathbf{X}}_5^0 \delta \theta_y + \bar{\mathbf{X}}_6^0 \delta \phi_x] dx \quad (19)$$

$$\delta T_{EF} = - \int_L [\mathcal{P}_1 \delta u_{xc} + \mathcal{P}_2 \delta u_{yc} + \mathcal{P}_3 \delta \theta_z + \mathcal{P}_4 \delta u_{zc} + \mathcal{P}_5 \delta \theta_y + \mathcal{P}_6 \delta \phi_x + \mathcal{P}_7 \delta \theta_x] dx \quad (20)$$

En la Ec. (17) las fuerzas internas Q_x , M_y , M_z , y B corresponden a la fuerza axial, momento flector en la dirección y , momento flector en la dirección z y bimomento, respectivamente; mientras que Q_y , Q_z , T_w , y T_{sv} son la fuerza cortante en la dirección y , la fuerza cortante en la dirección z , el momento lexo-torsor y el momento de torsión pura, respectivamente. Tales fuerzas internas se pueden escribir en términos de las resultantes de tensión en el área como:

$$\begin{aligned} \{Q_x, M_y, M_z, B\} &= \int_A \sigma_{xx} \{1, z, -y, -\omega\} dydz, \\ \{Q_y, Q_z\} &= \int_A \{\sigma_{xy}, \sigma_{xz}\} dydz, \\ T_w &= \int_A \left(\sigma_{xy} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + \sigma_{xz} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) dydz, \\ T_{sv} &= \int_A \left[-\sigma_{xy} \left(z + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) + \sigma_{xz} \left(y - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) \right] dydz. \end{aligned} \quad (21)$$

Los entidades Q_x^0 , M_y^0 , M_z^0 , B^0 , Q_y^0 , Q_z^0 , T_w^0 , T_{sv}^0 y $M_x^0 (=T_{sv}^0 + T_w^0)$, que se emplean en la Ec. (18), corresponden a las fuerzas internas iniciales definidas de la misma manera que en la Ec. (21) pero con respecto al estado de tensiones iniciales, es decir substituyendo σ_{ij} por σ_{ij}^0 . Por otro lado $Q_{y\omega}^0$, $Q_{z\omega}^0$, T_{wy}^0 , T_{wz}^0 , $T_{w\omega}^0$ son fuerzas iniciales generalizadas vinculadas a las tensiones tangenciales iniciales. Las mismas se definen a continuación:

$$\begin{aligned} \{T_w^0, T_{wz}^0, T_{wy}^0, T_{w\omega}^0\} &= \int_A \left(\sigma_{xy}^0 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + \sigma_{xz}^0 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) \{1, z, -y, -\omega\} dydz \\ \{Q_{y\omega}^0, Q_{z\omega}^0\} &= \int_A \omega \{\sigma_{xy}^0, \sigma_{xz}^0\} dydz \end{aligned} \quad (22)$$

Además, las matrices \mathbf{B}_a^0 , \mathbf{B}_b^0 y \mathbf{B}_c^0 contienen resultantes generalizadas de tensión normal inicial. Estas matrices y los vectores $\bar{\mathbf{d}}_a$, $\bar{\mathbf{d}}_b$, y $\bar{\mathbf{d}}_c$ se definen como sigue:

$$\mathbf{B}_a^0 = \int_A \sigma_{xx}^0 \mathcal{F}(\bar{\mathbf{g}}^a)^T \bar{\mathbf{g}}^a dydz, \quad \bar{\mathbf{g}}^a = \{1, z, -y, -\omega\} \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_b^0 = \int_A \sigma_{xx}^0 \mathcal{F}(\bar{\mathbf{g}}^b)^T \bar{\mathbf{g}}^b dydz, \quad \bar{\mathbf{g}}^b = \left\{ 1, y, -\frac{R+y}{R} \right\} \quad (24)$$

$$\mathbf{B}_c^0 = \int_A \sigma_{xx}^0 \mathcal{F}(\bar{\mathbf{g}}^c)^T \bar{\mathbf{g}}^c dydz, \quad \bar{\mathbf{g}}^c = \left\{ 1, -z, \frac{R+y}{R}, \frac{\omega}{R} \right\} \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{d}}_a = \{\varepsilon_{D1}, \varepsilon_{D2}, \varepsilon_{D3}, \varepsilon_{D4}\}^T, \quad \bar{\mathbf{d}}_b = \{\varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D8}, \Phi_2\}^T, \quad \bar{\mathbf{d}}_c = \{\varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D8}, \Phi_3, \Phi_W\}^T \quad (26)$$

En la Ec. (19) las funciones $\bar{\mathbf{X}}_j^0$, $j = 1, 3, 5, 6$ surgen de las fuerzas volumétricas iniciales y se calculan de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{X}}_1^0 &= -\frac{N_1^0}{R^2}u_{xc} + \frac{N_1^0}{R}\theta_z + \frac{N_3^0 + N_4^0}{2R}\theta_y - \frac{N_6^0}{2R}\phi_x \\ \bar{\mathbf{X}}_3^0 &= \frac{N_1^0}{R}u_{xc} - N_1^0\theta_z - \frac{N_3^0 + N_4^0}{2}\theta_y + \frac{N_6^0}{2}\phi_x \\ \bar{\mathbf{X}}_5^0 &= \frac{N_3^0 + N_4^0}{2R}u_{xc} - \frac{N_3^0 + N_4^0}{2}\theta_z - N_2^0\theta_y - \frac{N_5^0}{2}\phi_x \\ \bar{\mathbf{X}}_6^0 &= -\frac{N_6^0}{2R}u_{xc} + \frac{N_6^0}{2}\theta_z - \frac{N_5^0}{2}\theta_y - (N_1^0 + N_2^0)\phi_x\end{aligned}\quad (27)$$

siendo

$$\begin{aligned}\{N_1^0, N_2^0, N_3^0\} &= \int_A \{y\bar{X}_y^0, z\bar{X}_z^0, y\bar{X}_z^0\} \frac{dydz}{\mathcal{F}} \\ \{N_4^0, N_5^0, N_6^0\} &= \int_A \{z\bar{X}_y^0, y\bar{X}_x^0, z\bar{X}_x^0\} \frac{dydz}{\mathcal{F}}\end{aligned}\quad (28)$$

Las expresiones dadas en la Ec. (27) se pueden rededujir para considerar el caso de una fuerza $\bar{F}^0 = \{F_x^0, F_y^0, F_z^0\}$ aplicada fuera del eje de referencia, en el punto $\mathbf{B} = \{x_B, y_B, z_B\}$ según como se ve en la Fig. 1. De manera que la Ec. (27) queda como:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{X}}_1^0 &= -\frac{y_B\bar{F}_y^0}{R^2}u_{xc} + \frac{y_B\bar{F}_y^0}{R}\theta_z + \frac{z_B\bar{F}_y^0 + y_B\bar{F}_z^0}{2R}\theta_y - \frac{z_B\bar{F}_x^0}{2R}\phi_x \\ \bar{\mathbf{X}}_3^0 &= \frac{y_B\bar{F}_y^0}{R}u_{xc} - y_B\bar{F}_y^0\theta_z - \frac{z_B\bar{F}_y^0 + y_B\bar{F}_z^0}{2}\theta_y + \frac{z_B\bar{F}_x^0}{2}\phi_x \\ \bar{\mathbf{X}}_5^0 &= \frac{z_B\bar{F}_y^0 + y_B\bar{F}_z^0}{2R}u_{xc} - \frac{z_B\bar{F}_y^0 + y_B\bar{F}_z^0}{2}\theta_z - y_B\bar{F}_y^0\theta_y - \frac{y_B\bar{F}_x^0}{2}\phi_x \\ \bar{\mathbf{X}}_6^0 &= -\frac{z_B\bar{F}_x^0}{2R}u_{xc} + \frac{z_B\bar{F}_x^0}{2}\theta_z - \frac{y_B\bar{F}_x^0}{2}\theta_y - (y_B\bar{F}_y^0 + z_B\bar{F}_z^0)\phi_x\end{aligned}\quad (29)$$

En este caso las expresiones de la Ec. (29) se reemplazan en la Ec. (19) para obtener el trabajo virtual de la fuerza inicial, aplicada en \mathbf{B} , debido a los desplazamientos de segundo orden. Es claro que tendrán tantos términos similares a la Ec. (29) como fuerzas no aplicadas sobre el eje curvo existan.

Las fuerzas externas incrementales distribuidas \mathcal{P}_j , $j = 1, \dots, 7$ e introducidas en la Ec. (20) se pueden escribir en términos de las fuerzas volumétricas generalizadas (\bar{X}_x , \bar{X}_y y \bar{X}_z), como:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_7\} &= \int_A \bar{X}_x \left\{ \frac{y+R}{R}, z - \frac{\omega}{R}, -y, -\omega \right\} \frac{dydz}{\mathcal{F}}, \\ \{\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_6\} &= \int_A \{ \bar{X}_y, \bar{X}_z, \bar{X}_zy - \bar{X}_yz \} \frac{dydz}{\mathcal{F}}.\end{aligned}\quad (30)$$

2.4. Ecuaciones constitutivas en términos de componentes de deformación

Las relaciones entre tensiones y deformaciones están vinculadas con la distribución funcional de los constituyentes metálicos y cerámicos en la sección transversal. En general, para materiales funcionales, las relaciones entre tensiones y deformaciones se pueden expresar de la siguiente manera (Malekzadeh et al., 2010):

$$\sigma_{xx} = E_{xx}(y, z)\varepsilon_{xx}^L, \quad \sigma_{xy} = G_{xy}(y, z)2\varepsilon_{xy}^L, \quad \sigma_{xz} = G_{xz}(y, z)2\varepsilon_{xz}^L, \quad (31)$$

siendo, $E_{xx}(y, z)$ el módulo de elasticidad longitudinal, mientras que $G_{xy}(y, z)$ y $G_{xz}(y, z)$ son los módulos de elasticidad transversales en las direcciones y y z , respectivamente. Se debe mencionar que $G_{xy}(y, z)$ y $G_{xz}(y, z)$ pueden verse afectados por coeficientes de corrección (κ_{xy} , κ_{xz}) para contemplar el efecto de la distribución de las tensiones tangenciales en la sección transversal, tal como se sigue en la teoría de vigas de Timoshenko (vía enfoque Colignon-Jouravski) u otras teorías basadas en la formulación con deformación cortante de primer orden (Malekzadeh et al., 2010). En algunos trabajos recientes (Filipich y Piovan, 2010; Piovan et al., 2008) se han efectuado algunos aportes para calcular consistentemente los mencionados coeficientes.

Se debe destacar que las propiedades elásticas son función de la temperatura de acuerdo con la siguiente expresión (Reddy y Chin, 1998):

$$m_p = p_0 (c_0 T^{-1} + 1 + c_1 T + c_2 T^2 + c_3 T^3) \quad (32)$$

donde m_p es una propiedad en general (esto es: el módulo de elasticidad longitudinal o transversal o el coeficiente de Poisson, etc.), T es la temperatura absoluta medida en $^{\circ}K$ y los coeficientes c_i son únicos para un determinado tipo de material (cerámico o metálico) y se calculan por medio de procedimientos de ajuste estadístico de respuestas experimentales (Praveen et al., 1999). En suma, las propiedades de un material distribuido funcionalmente se pueden representar en términos de la geometría y de la temperatura, entendiendo por hipótesis una condición de temperatura estable (no variable con el tiempo).

Ahora bien, sustituyendo la Ec. (13) en la Ec. (31) y luego en la Ec. (21), las fuerzas internas se pueden representar, en términos de las deformaciones generalizadas, según las siguientes expresiones:

$$\bar{\mathbf{Q}}_N = \begin{Bmatrix} Q_x \\ M_y \\ M_z \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^A & J_{12}^A & J_{13}^A & J_{14}^A \\ & J_{22}^A & J_{23}^A & J_{24}^A \\ & & J_{33}^A & J_{34}^A \\ sim & & & J_{44}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{D1} \\ \varepsilon_{D2} \\ \varepsilon_{D3} \\ \varepsilon_{D4} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^A \bar{\mathbf{D}}_N \quad (33)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_C = \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ T_w \\ T_{sv} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^C & J_{12}^C & J_{13}^C & J_{14}^C \\ & J_{22}^C & J_{23}^C & J_{24}^C \\ & & J_{33}^C & J_{34}^C \\ sim & & & J_{44}^C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{D5} \\ \varepsilon_{D6} \\ \varepsilon_{D7} \\ \varepsilon_{D8} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^C \bar{\mathbf{D}}_C \quad (34)$$

donde:

$$J_{ik}^A = \int_A E_{xx} \bar{\mathbf{g}}_i^d \bar{\mathbf{g}}_k^d \mathcal{F} dydz, \quad i, k = 1, 2, 3, 4 \quad (35)$$

$$J_{hl}^C = \int_A [G_{xy} \bar{\mathbf{g}}_h^e \bar{\mathbf{g}}_l^e + G_{xz} \bar{\mathbf{g}}_h^f \bar{\mathbf{g}}_l^f] \mathcal{F} dydz, \quad h, l = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}^d &= \{1, z, -y, -\omega\}, \\ \bar{\mathbf{g}}^e &= \left\{1, 0, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}, -z - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\right\}, \\ \bar{\mathbf{g}}^f &= \left\{0, 1, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z}, y - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z}\right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Las Ecs. (33)-(34) permiten calcular las fuerzas en términos de las deformaciones generalizadas ε_{Di} , $i = 1, \dots, 8$. Además, se pueden emplear las mencionadas expresiones para calcular

las fuerzas asociadas a las tensiones iniciales, si los vectores $\bar{\mathbf{D}}_N$ y $\bar{\mathbf{D}}_C$ de deformaciones incrementales generalizadas normales y cortantes se substituyen por $\bar{\mathbf{D}}_N^0$ y $\bar{\mathbf{D}}_C^0$, es decir, por los homónimos vectores de deformaciones iniciales generalizadas.

3. FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS

Con el objeto de resolver los problemas de inestabilidad estática de vigas curvas de materiales funcionales se implementa la solución aproximada del modelo matemático mediante un elemento finito isoparamétrico unidimensional de cinco nodos como el de la Fig. 2, siendo $\bar{x} = x/l_e$, $\bar{x} \in [0, 1]$ la coordenada intrínseca del elemento, mientras que l_e es la longitud circunferencial del elemento. Así pues el vector de variables cinemáticas nodales del elemento, $\bar{\mathbf{U}}_e$, puede expresarse en la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{U}}_e = \{ \bar{\mathbf{U}}_e^{(1)}, \dots, \bar{\mathbf{U}}_e^{(5)} \} \tag{37}$$

siendo:

$$\bar{\mathbf{U}}_e^{(j)} = \{ u_{xcj}, u_{ycj}, \theta_{zj}, u_{zcj}, \theta_{yj}, \phi_{xj}, \theta_{xj} \}, \quad j = 1, \dots, 5 \tag{38}$$

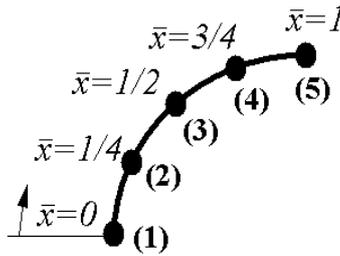


Figura 2: Descripción del elemento finito curvo.

Luego, cada una de variables u_{xc} , u_{yc} , θ_z , u_{zc} , θ_y , ϕ_x y θ_x se puede interpolar recurriendo a la siguiente forma matricial compacta:

$$U_i = \mathbb{F}_i \bar{\mathbf{U}}_e, \quad i = 1, \dots, 7 \tag{39}$$

en la cual la matriz \mathbb{F} $[7 \times 35]$ contiene las funciones de forma $f_j(\bar{x})$, $j = 1, \dots, 5$, para elementos isoparamétricos unidimensionales de orden cuártico (Bathe, 1982). Así pues, con \mathbb{F}_i , $i = 1, \dots, 7$ se identifican los vectores fila de \mathbb{F} . Cada una de las variables U_i , $i = 1, \dots, 7$ se interpola empleando los mismos polinomios de cuarto orden apropiadamente intercalados en la matriz \mathbb{F} . A partir de las explicaciones previas, se puede inferir que $U_1 = u_{xc}$, $U_2 = u_{yc}$, $U_3 = \theta_z$, $U_4 = u_{zc}$, $U_5 = \theta_y$, $U_6 = \phi_x$ y $U_7 = \theta_x$.

Ahora bien, reemplazando Ec. (37) en Eq. (16) y aplicando los procedimientos convencionales del método de elementos finitos, se puede llegar a la siguiente ecuación general para la resolución del problema de inestabilidad estática:

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_G) \bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{0}} \tag{40}$$

donde \mathbf{K} y \mathbf{K}_G son las matrices globales de rigidez elástica y geométrica respectivamente, mientras que λ es el autovalor correspondiente a la sollicitación de pandeo.

La matriz de rigidez elastica del elemento \mathbf{K}_e se halla discretizando la Eq. (17) como:

$$\mathbf{K}_e = \int_{l_e} (\mathbf{F}_{DN}^T \mathbf{J}^A \mathbf{F}_{DN} + \mathbf{F}_{DC}^T \mathbf{J}^C \mathbf{F}_{DC}) l_e d\bar{x} \quad (41)$$

siendo \mathbf{J}^A y \mathbf{J}^C las dadas en las Ecs. (33) y (34), mientras que \mathbf{F}_{DN} y \mathbf{F}_{DC} son calculados como:

$$\mathbf{F}_{DN} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_1}{d\bar{x}} + \frac{\mathbb{F}_2}{R} \\ \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_5}{d\bar{x}} - \frac{\mathbb{F}_6}{R} \\ \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_3}{d\bar{x}} - \frac{1}{R} \frac{d\mathbb{F}_1}{d\bar{x}} \\ \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_7}{d\bar{x}} - \frac{\mathbb{F}_5}{R} \\ \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_7}{d\bar{x}} + \frac{\mathbb{F}_5}{R} \end{array} \right\}, \mathbf{F}_{DC} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_2}{d\bar{x}} - \mathbb{F}_3 \\ \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_4}{d\bar{x}} + \mathbb{F}_5 \\ \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_6}{d\bar{x}} - \mathbb{F}_7 \\ \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_6}{d\bar{x}} + \frac{\mathbb{F}_5}{R} \end{array} \right\} \quad (42)$$

La matriz de rigidez geométrica se obtiene a partir de conocer el estado de tensiones iniciales correspondientes a una determinada sollicitación inicial. Estas tensiones iniciales se calculan resolviendo la Ec. (43), la cual corresponde a la implementación en elementos finitos de la ecuación de auto-equilibrio de las tensiones iniciales y fuerzas superficiales y volumétricas dada por la Ec. (3).

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{W}}^0 = \bar{\mathbf{P}}^0, \quad (43)$$

En la Eq. (43), $\bar{\mathbf{W}}^0$ y $\bar{\mathbf{P}}^0$ son el vector global de desplazamientos nodales iniciales y el vector global de cargas iniciales, respectivamente.

La matriz de rigidez geometrica ($\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_{G1} + \mathbf{K}_{G2}$) cuenta con dos términos, una matriz \mathbf{K}_{G1} que surge de la Eq. (18) y se obtiene ensamblando la matriz de rigidez geométrica elemental dada en la Ec. (44) y la otra matriz \mathbf{K}_{G2} que surge de la Eq. (19) integrada en los elementos o nodos donde estén aplicadas las cargas iniciales dadas por las Ecs. (27) o (29), respectivamente. El cálculo de esta matriz \mathbf{K}_{G2} se muestra en la Ec. (45).

$$\mathbf{K}_{G1} = \int_{l_e} (\mathbf{F}_{DN}^T \mathbf{E}_{11}^0 \mathbf{F}_{DN} + \mathbf{F}_{DN}^T \mathbf{E}_{13}^0 \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_P^T \mathbf{E}_{31}^0 \mathbf{F}_{DN} + \mathbf{F}_{DC}^T \mathbf{E}_{22}^0 \mathbf{F}_{DC} + \mathbf{F}_P^T \mathbf{E}_{33}^0 \mathbf{F}_P) l_e d\bar{x} + \int_{l_e} (\mathbf{F}_{P1}^T \mathbf{E}_{43}^0 \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_P^T \mathbf{E}_{34}^0 \mathbf{F}_{P1} + \mathbf{F}_{DC}^T \mathbf{E}_{23}^0 \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_P^T \mathbf{E}_{32}^0 \mathbf{F}_{DC}) l_e d\bar{x}, \quad (44)$$

$$\mathbf{K}_{G2} = \int \mathbf{F}_F^T \mathbf{R}_B \mathbf{F}_F l_e d\bar{x}, \quad (45)$$

En las Ecs. (44) y (45) se han definido los siguientes vectores y matrices:

$$\mathbf{F}_P = \begin{Bmatrix} \mathbb{F}_6 \\ \mathbb{F}_5 \\ \mathbb{F}_3 - \frac{\mathbb{F}_1}{R} \\ \mathbb{F}_7 + \frac{\mathbb{F}_5}{R} \end{Bmatrix}, \mathbf{F}_{P1} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_6}{d\bar{x}} \\ \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_5}{d\bar{x}} \\ \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_3}{d\bar{x}} - \frac{1}{l_e R} \frac{d\mathbb{F}_1}{d\bar{x}} \\ \frac{1}{l_e} \frac{d\mathbb{F}_7}{d\bar{x}} + \frac{1}{l_e R} \frac{d\mathbb{F}_5}{d\bar{x}} \end{Bmatrix}, \mathbf{F}_F = \begin{Bmatrix} \mathbb{F}_1 \\ \mathbb{F}_3 \\ \mathbb{F}_5 \\ \mathbb{F}_6 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{E}_{11}^0 = \mathbf{B}_a^0, \quad \mathbf{E}_{13}^0 = \begin{bmatrix} 0 & Q_z^0 & -Q_y^0 & T_w^0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{wz}^0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{wy}^0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{w\omega}^0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{E}_{22}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{b11}^0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_{b12}^0 \\ 0 & \mathbf{B}_{c11}^0 & 0 & \mathbf{B}_{c12}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{b12}^0 & \mathbf{B}_{c12}^0 & 0 & \mathbf{B}_{b22}^0 + \mathbf{B}_{c22}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{23}^0 = \begin{bmatrix} -Q_z^0 & \mathbf{B}_{b13}^0 & 0 & 0 \\ Q_y^0 & 0 & \mathbf{B}_{c13}^0 & \mathbf{B}_{c14}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{b23}^0 & \mathbf{B}_{c23}^0 & \mathbf{B}_{c24}^0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{E}_{33}^0 = \begin{bmatrix} M_z^0/R & -Q_y^0/2 & -(M_x^0/2R + Q_z^0/2) & Q_{zw}^0/R \\ & \mathbf{B}_{b33}^0 & M_y^0/2R & 0 \\ & & M_z^0/R + \mathbf{B}_{c33}^0 & \mathbf{B}_{c34}^0 \\ sim & & & \mathbf{B}_{c44}^0 \end{bmatrix}, \quad E_{34}^0 = \begin{bmatrix} 0 & -M_z^0/2 & M_y^0/2 & 0 \\ -M_x^0/2 & 0 & -M_x^0/2 & Q_{zw}^0 \\ M_y^0/2 & M_x^0/2 & 0 & -Q_{yw}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{E}_{31}^0 = (\mathbf{E}_{13}^0)^T, \quad \mathbf{E}_{32}^0 = (\mathbf{E}_{23}^0)^T, \quad \mathbf{E}_{43}^0 = (\mathbf{E}_{34}^0)^T \quad (50)$$

$$\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} -\frac{N_1^0}{R^2} & \frac{N_1^0}{R} & \frac{N_3^0 + N_4^0}{2R} & -\frac{N_6^0}{2R} \\ & -N_1^0 & -\frac{N_3^0 + N_4^0}{2} & \frac{N_6^0}{2} \\ & & -N_2^0 & -\frac{N_5^0}{2} \\ sim & & & -(N_1^0 + N_2^0) \end{bmatrix} \quad (51)$$

Para calcular las Ec. (47)-(50) se deben emplear las Ec. (22)-(25) involucrando a su vez los desplazamientos iniciales $\bar{\mathbf{W}}^0$ calculados según la Ec (43). Además las resultantes generalizadas de tensiones iniciales, \mathbf{B}_{aij}^0 , \mathbf{B}_{aij}^0 , \mathbf{B}_{aij}^0 , T_{wy}^0 , T_{wz}^0 , $T_{w\omega}^0$, Q_{zw}^0 y Q_{yw}^0 se calculan empleando las

Ecs. (22)-(25). En el caso de tratarse de una carga inicial aplicada en un nodo \mathbf{B} , la matriz \mathbf{K}_{G2} queda expresada como:

$$\mathbf{K}_{G2} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \frac{y_B \bar{F}_y^0}{R^2} & 0 & -\frac{y_B \bar{F}_y^0}{R} & 0 & -\frac{z_B \bar{F}_y^0 + y_B \bar{F}_z^0}{2R} & \frac{z_B \bar{F}_x^0}{2R} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & -\frac{y_B \bar{F}_y^0}{R} & 0 & y_B \bar{F}_y^0 & 0 & \frac{z_B \bar{F}_y^0 + y_B \bar{F}_z^0}{2} & -\frac{z_B \bar{F}_x^0}{2} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & -\frac{z_B \bar{F}_y^0 + y_B \bar{F}_z^0}{2R} & 0 & \frac{z_B \bar{F}_y^0 + y_B \bar{F}_z^0}{2} & 0 & y_B \bar{F}_y^0 & \frac{y_B \bar{F}_x^0}{2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \frac{z_B \bar{F}_x^0}{2R} & 0 & -\frac{z_B \bar{F}_x^0}{2} & 0 & \frac{y_B \bar{F}_x^0}{2} & (y_B \bar{F}_y^0 + z_B \bar{F}_z^0) & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (52)$$

Queda claro que se ensamblarán tantas matrices dadas por la Ec. (52) como cargas iniciales aplicadas en nodos haya en el modelo de elementos finitos.

En las integrales descriptas en las Ecs. (42), (44) y (45) se ha empleado un esquema de integración reducida Piovan y Cortínez (2007) con el fin de evitar bloqueos por corte y/o membranales.

4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En los ejemplos numéricos a presentar en esta sección se emplean materiales metálicos y cerámicos cuyas propiedades se muestran en la Tabla 1 para una temperatura de $300 \text{ }^\circ\text{K}$. Por otro lado en la Tabla 2 se indican las propiedades de una aleación de Titanio y una cerámica de óxido de zirconio junto con los coeficientes para determinar la variación de las propiedades con la temperatura según la Ec. (32).

Properties	Steel	Al_2O_3	Al	SiC
$E[\text{Pa}]$	$210,00 \times 10^9$	$393,00 \times 10^9$	$67,0 \times 10^9$	$314,00 \times 10^9$
$G[\text{Pa}]$	$80,77 \times 10^9$	$157,30 \times 10^9$	$25,2 \times 10^9$	$137,00 \times 10^9$
ν	0.30	0.25	0.33	0.17

Tabla 1: Propiedades del acero, Alumina (Al_2O_3), Aluminio (Al) y carburo de silicio (SiC) a $T = 300^\circ\text{K}$

Se empleará una viga curva de sección maciza rectangular de dimensiones $h = 0,05 \text{ m}$ en el sentido radial y $b = 0,01 \text{ m}$ en el sentido vertical. Las propiedades elásticas se pueden distribuir en alguna de las siguientes formas funcionales:

$$p_{fgm} = p_m + (p_c - p_m) \left| \frac{2z}{b} \right|^n, \quad o \quad p_{fgm} = p_m + (p_c - p_m) \left| \frac{2y}{h} \right|^n, \quad (53)$$

Properties	Material	m_{p_0}	c_0	c_1	c_2	c_3
$E[\text{Pa}]$	<i>Ti6Al4V</i>	$122,7 \times 10^9$	0	$-4,605 \times 10^{-4}$	0	0
	<i>ZrO₂</i>	$132,2 \times 10^9$	0	$-3,805 \times 10^{-4}$	$-6,127 \times 10^{-8}$	0
ν	<i>Ti6Al4V</i>	0,2888	0	$1,108 \times 10^{-4}$	0	0
	<i>ZrO₂</i>	0,3330	0	0	0	0
$\kappa[\text{W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}]$	<i>Ti6Al4V</i>	6,10	0	0	0	0
	<i>ZrO₂</i>	1,78	0	0	0	0

Tabla 2: Coeficientes para la dependencia térmica de las propiedades de *ZrO₂* y *Ti6Al4V*

$$p_{fgm} = p_m + (p_c - p_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{b} \right)^n, \quad o \quad p_{fgm} = p_m + (p_c - p_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{h} \right)^n, \quad (54)$$

$$p_{fgm} = p_c e^{[-\Lambda_p (\frac{1}{2} - \frac{z}{b})]}, \quad o \quad p_{fgm} = p_c e^{[-\Lambda_p (\frac{1}{2} - \frac{y}{h})]}, \quad (55)$$

siendo:

$$\Lambda_p = Ln \left[\frac{p_c}{p_m} \right]. \quad (56)$$

En las expresiones anteriores p_{fgm} indica una propiedad generica (módulo de elasticidad longitudinal, transversal, etc.) con distribución funcional, en tanto que p_c y p_m identifican a la homónima propiedad para las fases cerámica y metálica respectivamente.

4.1. Convergencia y validación

En esta sección se efectúan algunos cálculos para evaluar la calidad del elemento y su convergencia a la solución estipulada de autovalores. A su vez se contempla la evaluación de la calidad del modelo confrontándolo con enfoques tridimensionales (por elementos finitos) o con modelos de otros autores.

Así pues, en la Fig. 3 se puede observar la convergencia del elemento finito para casos de arco de 180° y 90° con un radio $R = 1,0 \text{ m}$ para ambos casos y con una ley de distribución de propiedades dada por la primera de Ec. (53) con un exponente $n = 1$. El arco se encuentra empotrado en ambos extremos y soporta una carga Q_y^0 dirigida hacia el centro de curvatura y aplicada en $x = L/2$. Nótese que con 4 elementos la convergencia está garantizada a menos de un 0.5 %.

En la Tabla 3 se muestra una comparación entre las cargas de pandeo calculadas con el presente modelo unidimensional y modelos tridimensionales del programa comercial Cosmos/M. Se emplearon 6 elementos finitos de viga curva y modelos de más de 2500 elementos hexaédricos de 8 nodos en el programa Cosmos/M, contemplando una ley de distribución como la de la Ec. (53) con un exponente $n = 100$, que en términos pragmáticos equivaldría a una viga construida completamente de material metálico. El radio medio en ambos casos fue $R = 0,5 \text{ m}$, las condiciones de borde empotradas en ambos extremos y la sollicitación es una carga Q_y^0 dirigida hacia el centro de curvatura y aplicada en $x = L/2$. Como se puede apreciar existe una

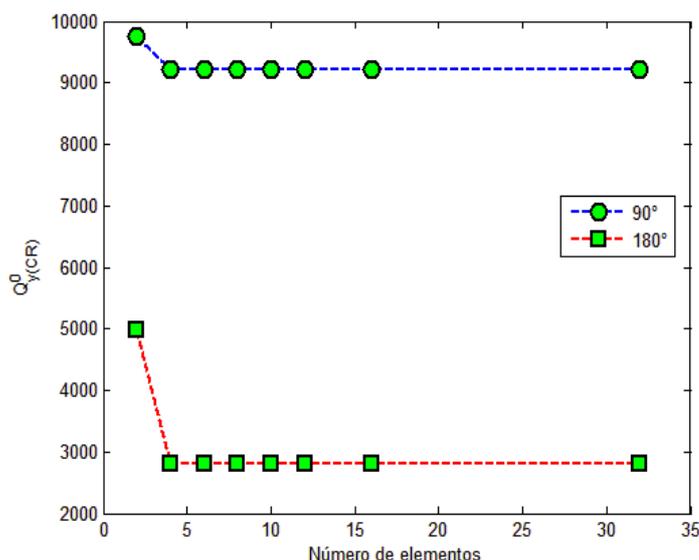


Figura 3: Convergencia de la solución para dos casos de vigas curvas

	arco 180		arco 90	
Enfoque	1D	3D	1D	3D
modo 1	11217	11268	38246	38600
modo 2	44524	44559	101670	101500
modo 3	65117	64715	165950	167255

Tabla 3: Comparación entre el presente modelo 1D con enfoques 3D de elementos finitos

muy buena concordancia entre el modelo unidimensional de elementos finitos y los modelos tridimensionales de mayor jerarquía.

4.2. Análisis paramétrico para diferentes distribuciones funcionales

En esta sección se evalúa la variación de las cargas de pandeo para arcos bajo distintas condiciones de borde y distintos tipos de distribuciones funcionales. Así pues, se considerarán dos condiciones de borde con su respectiva condición de carga. El primer caso es una viga curva doblemente empotrada con una carga radial Q_y^0 aplicada en $x = L/2$ y dirigida hacia el centro de curvatura. El segundo caso es una viga curva en voladizo con una carga de similares características a la del anterior caso pero aplicada en el extremo libre.

En las Figs. 4 y 5 se muestran las variaciones de las cargas de pandeo para la condición biempotrada y en voladizo respectivamente. Se muestra en ambos casos la variación con respecto al exponente n de la ley de distribución en la dirección y dada en la Ec. (54). Nótese que en el caso donde se mantiene fija la longitud del eje de la viga, en la medida que más se curva existe un mínimo en la curva de variación de la carga de pandeo para una forma de distribución dada con el exponente n . El ángulo de abertura de donde se produce el mínimo depende de la geometría de la viga y principalmente de las condiciones de borde, según como se aprecia en las Figuras 4(a) y 5(a).

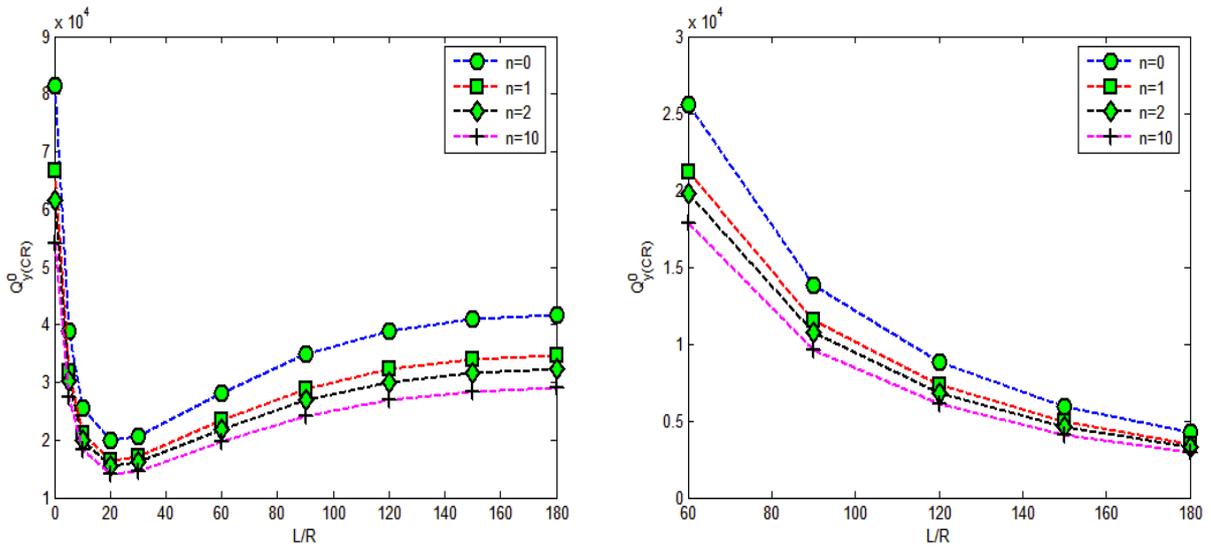


Figura 4: Variación de la carga de pandeo con el ángulo de abertura en una viga curva biempotrada. (a) para L constante (b) para R constante.

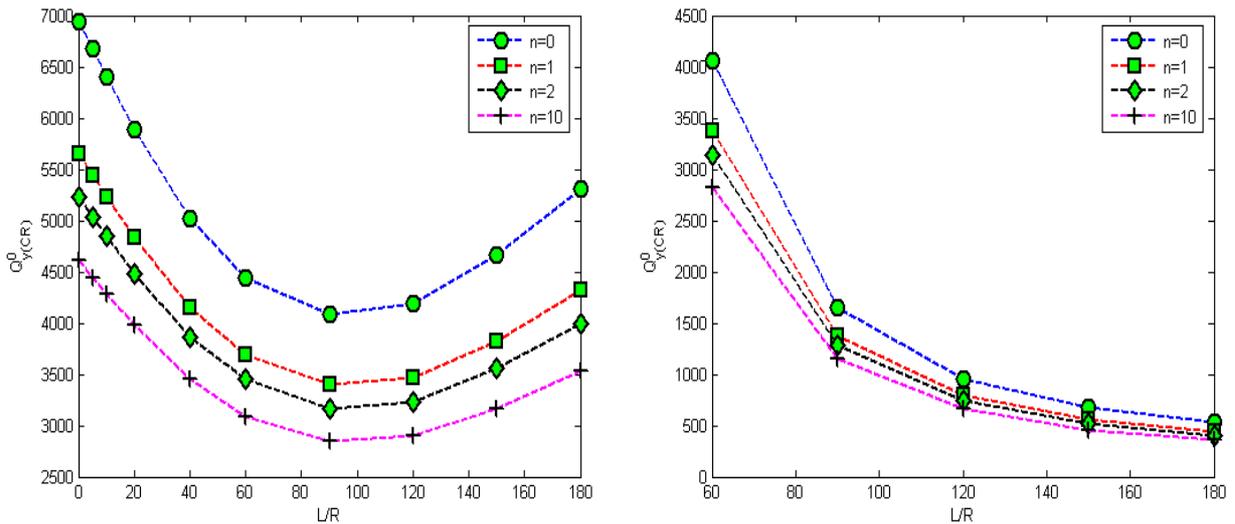


Figura 5: Variación de la carga de pandeo con el ángulo de abertura en una viga curva en voladizo. (a) para L constante (b) para R constante.

En la Fig. 6 se muestra la variación de la carga de pandeo con el ángulo de abertura, manteniendo fija la longitud del eje curvado de la viga en $L = 1 \text{ m}$ para la condición de borde biempotrada. Se muestra a su vez el efecto de emplear las distribuciones de propiedades funcionales dadas en la Ec. (54), con $n = 2$ (identificadas como 'poty' y 'potz' en la Fig. 6) y por la Ec. (55) (identificadas como 'expy' y 'expz' en la Fig. 6). Nótese que la carga de pandeo no es sustancialmente sensible con respecto a la distribución funcional de las propiedades elásticas.

En la Fig. 7 se muestra la variación de las cargas de pandeo con respecto al ángulo de abertura. Se trata de una viga curva con longitud del eje de centro fija y con una condición de borde empotrada-libre con una carga Q_y^0 , con una distribución de propiedades elásticas en la dirección y dada por la Ec. (54), con $n = 1$. Las cargas que se muestran en la figura, identifican a los autovalores que surgen cuando la carga radial está dirigida hacia el centro de curvatura

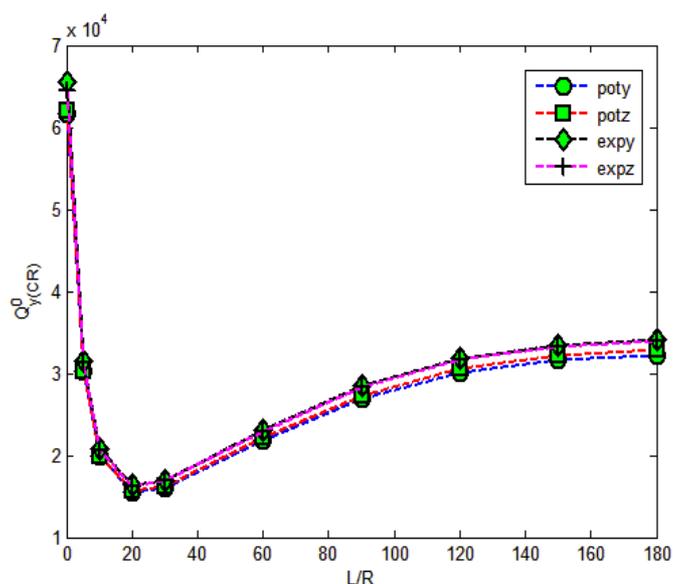


Figura 6: Variación de la carga de pandeo con respecto al ángulo de abertura, para diversas leyes de distribución funcional de las propiedades elásticas.

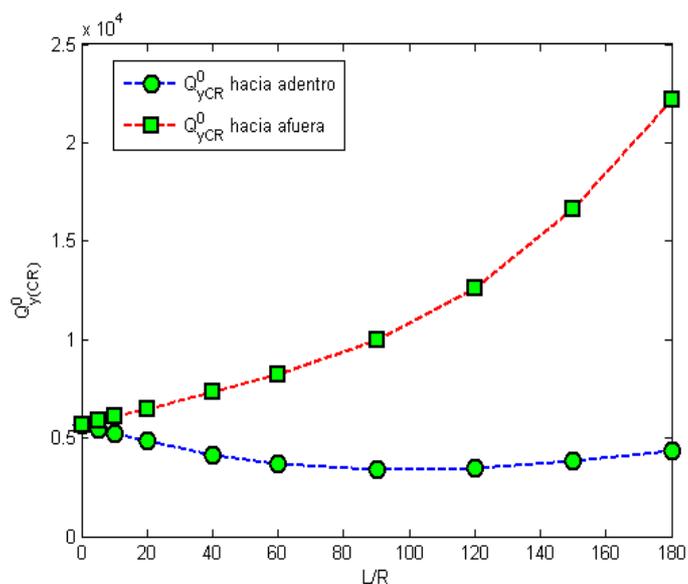


Figura 7: Variación de la carga de pandeo con respecto al ángulo de abertura. Carga radial aplicada en el extremo libre.

($Sign\|Q_y^0\| < 0$) y hacia fuera del centro de curvatura ($Sign\|Q_y^0\| > 0$), respectivamente.

En la Fig. 8 se presenta la variación de la carga de pandeo respecto al ángulo de abertura para una viga curva en voladizo con carga en el extremo libre. Se evalúan tres condiciones de temperatura: a $100\text{ }^\circ K$, $300\text{ }^\circ K$ y $500\text{ }^\circ K$. La longitud de la viga curva se considera fija en el valor de $L = 1\text{ m}$ y posee una distribución de propiedades elásticas dada por la primera de las Ec. (53). Se puede apreciar que el aumento de la temperatura hace disminuir la carga de pandeo o vuelco de la viga curva debido a la disminución de las propiedades elásticas del material funcional según se puede inferir de la Ec. (32) y de la Tabla 2.

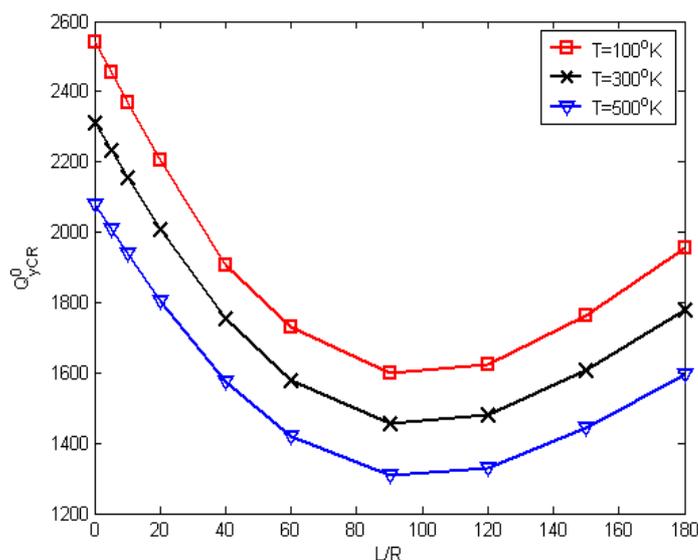


Figura 8: Variación de la carga de pandeo con respecto al ángulo de abertura, para diferentes valores de temperatura global.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha introducido un modelo para el cálculo de cargas de pandeo y de inestabilidad estática para arcos y vigas curvas construidas con materiales que poseen propiedades distribuidas funcionalmente. El modelo matemático se ha deducido a partir de un enfoque linealizado del principio de trabajos virtuales. En su formulación se ha empleado un campo de desplazamientos con componentes lineales y componentes de segundo orden en las rotaciones definidas en un sentido semitangencial. Esta concepción es de fundamental importancia para el correcto cálculo de las cargas de pandeo de vigas curvas de materiales funcionales (o cualquier otro caso de materiales). Se ha desarrollado un elemento finito iso-paramétrico de cinco nodos con el cual se han calculado cargas de pandeo en distintas configuraciones geométricas y con diferentes leyes de distribución de propiedades como también variaciones de temperatura. Se ha podido observar que las diversas distribuciones funcionales no afectan sensiblemente la carga de pandeo.

REFERENCIAS

- Bathe K. *Finite Element procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- Chakraborty A., Gopalakrishnan S., y Reddy J. A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45:519–539, 2003.
- Ding H., Huang D., y Chen W. Elasticity solutions for plane anisotropic functionally graded beams. *International Journal of Solids and Structures*, 44:176–196, 2007.
- Dryden J. Bending of inhomogeneous curved bars. *International Journal of Solids and Structures*, 44:4158–4166, 2007.
- Filipich C. y Piovan M. The dynamics of thick curved beams constructed with functionally graded materials. *Mechanics Research Communications*, 37:565–570, 2010.
- Goupee A. y Vel S. Optimization of natural frequencies of bidirectional functionally graded

- beams. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 32(6):473–484, 2006.
- Hosseini Kordkheili S. y Naghdabadi R. Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk. *Composite Structures*, 79:508–516, 2007.
- Kim M., Kim S., y Kim N. Spatial stability of shear deformable curved beams with non-symmetric thin walled sections. i: Stability formulation and closed form solutions. *Computers and Structures*, 83:2525–2541, 2005.
- Kitipornchai S., Yang J., y Liew K. Semi-analytical solution for nonlinear vibration of laminated fgm plates with geometric imperfections. *International Journal of Solids and Structures*, 41(9):2235–2257, 2004.
- Lekhnitskii S. *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Mir Publishers, Moscow, 1981.
- Lü C., Chen W., Xu R., y Lim C. Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams. *International Journal of Solids and Structures*, 45:258–275, 2008.
- Malekzadeh P. Two-dimensional in-plane free vibrations of functionally graded circular arches with temperature-dependent properties. *Composite Structures*, 91(1):38–47, 2009.
- Malekzadeh P., Golbahar Haghighi M., y Atashi M. Out-of-plane free vibration of functionally graded circular curved beams in thermal environment. *Composite Structures*, 92:541–552, 2010.
- Piovan M. y Cortínez V. Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability. *Thin-Walled Structures*, 45:759–789, 2007.
- Piovan M. y Domini S. A model for in-plane and out-of plane vibrations of non-homogeneous non-uniform curved beams. *Mecánica Computacional*, 29:1535–1554, 2010.
- Piovan M., Filipich C., y Ramirez J. A model for shear deformable curved beam made of functionally graded materials. *Mecánica Computacional*, 27:2053–2067, 2008.
- Praveen G., Chin C., y Reddy J. Thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal cylinder. *Journal of Engineering Mechanics*, 125:1259–1267, 1999.
- Reddy J. Analysis of functionally graded plates. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 47:663–684, 2000.
- Reddy J. y Chin C. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses*, 26(1):593–626, 1998.
- Shafiee H., Naei M., y Eslami M. In-plane and out-of-plane buckling of arches made of fgm. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48:907–915, 2006.
- Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, 1968.
- Yang Y. y Kuo S. Effects of curvature on stability of curved beams. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 113(6):1185–1202, 1987.