

EFFECTO DEL TAMAÑO DE MALLA EN LA MODELACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO LATERAL DE PILOTES MEDIANTE ELEMENTOS DE BARRA EMBEBIDOS EN SÓLIDOS

Diego F. Turello^a, Federico Pinto^b

^a*Estudiante Doctoral. F.C.E.F.yN., Universidad Nacional de Córdoba. diegoturello@gmail.com.ar*

^b*Departamento de Estructura, F.C.E.F.yN., Universidad Nacional de Córdoba. Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina. fpinto@efn.uncor.edu*

Palabras Claves: Pilote, elementos embebidos, lateral, interacción suelo estructura.

Resumen. La modelación del problema de interacción suelo-pilote debido a cargas laterales mediante métodos numéricos requiere de la modelación de dos subdominios: suelo y pilote. Debido a las distintas escalas del problema, y a fines de optimizar el proceso de modelación, resulta atractiva la idea de modelar el pilote mediante elementos de barra. Esto ha dado origen a diversas metodologías, algunas basadas en Métodos de Elementos de Contorno en las que se discretiza la superficie de interacción, y más recientemente al concepto de elementos de vigas embebidos, los cuales interactúan directamente con los elementos de sólidos circundantes en el contexto del Método de Elementos Finitos. Los elementos embebidos han adquirido notable popularidad en los últimos años debido a su gran atractivo computacional, y debido a su disponibilidad en programas comerciales. Sin embargo, dado que éstos no consideran en forma explícita la superficie de interacción, existen ciertas incertidumbres respecto a la exactitud de los resultados obtenidos. En este trabajo se consideran las distintas alternativas de modelación existentes y se realiza un estudio de los efectos del tamaño de malla en los resultados obtenidos mediante elementos de viga embebidos en sólidos, a fines de desarrollar conclusiones respecto a las posibilidades de modelación numérica para este tipo de problemas.

1 INTRODUCCION

Los problemas geotécnicos que involucran pilotes sometidos a cargas laterales son frecuentemente encontrados en la práctica ingenieril, e involucran obras típicas como obras de defensa portuaria, defensa contra impacto de embarcaciones en puentes, fuerzas de tiro en estructuras atirantadas, etc., donde la característica común de todos estos problemas es la forma en que se aplican y transmiten las cargas.

Estos problemas están gobernados por fenómenos de interacción suelo – estructura, siendo los mismos complejos de resolver, debido a que se trata en este caso del comportamiento de un elemento de formulación unidimensional (pilote) y un medio de naturaleza tridimensional (suelo). De esta manera, generalmente se recurre a modelos simplificados de análisis, como pueden ser, soluciones de viga sobre fundación elástica, métodos de curvas de transferencia de carga, métodos de equilibrio límite, entre otros (por ejemplo, Polam y colaboradores, 1998), siendo los resultados obtenidos mediante estas técnicas limitados por la simplificada representación de la interacción tridimensional en el entorno del pilote que se intenta modelar, lo que genera la necesidad de desarrollar nuevas técnicas de estudio.

La técnica de Elementos Finitos si bien se aplica a la resolución de estos problemas, lleva consigo un costo computacional elevado si se pretende modelar mediante elementos sólidos el suelo y pilote, dado que en general resultan modelos tridimensionales con un gran número de grados de libertad ya que el tamaño de malla se ve influenciado por el tamaño de los pilotes a modelar mediante elementos finitos. Estas limitaciones han sido evitadas mediante modelos de elemento de contorno (por ejemplo, Pinto y Prato, 2006), los cuales—sin embargo—poseen ciertas limitaciones para casos en los que se quieren modelar no linealidades.

Recientemente se han propuesto elementos de barra embebidos (Sadek y Shahrour, 2004) en los cuales el suelo es representado mediante elementos sólidos y los pilotes mediante modelos de vigas embebidos. Para el caso de estos elementos, sin embargo, debe prestarse atención a la hora de ensamblar la contribución de los elementos de vigas en el problema de sólidos, debido a la diferencia de significado entre las variables nodales como consecuencia de las diferentes cinemáticas. Cabe destacar que los elementos embebidos propuestos por Sadek y Shahrour (2004) no consideran la transferencia de cargas entre suelo y pilote a través de una superficie de interacción en forma explícita, y degeneran en un simple ensamble de una matriz de rigidez de viga con una de sólido para el caso en que el eje del pilote coincida con una arista del elemento de sólido.

En el presente trabajo se estudia el efecto del tamaño de malla para el caso de un pilote vertical embebido en un elemento de sólido sin superficie de interacción explícita, a fines de observar cómo se ve afectada la rigidez estructural del mismo con el refinamiento de malla y la posible falta de convergencia a una solución de referencia para un caso testigo.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE ESTUDIO

Para estudiar el problema de pilotes cargados lateralmente, se analiza el caso de un pilote vertical de longitud suficiente para evitar tener un comportamiento de pilote corto, dispuesto en un medio elástico, isótropo, homogéneo y lineal, solicitado lateralmente por una carga puntual horizontal en la superficie.

El problema tiene un plano de simetría, el que contiene la carga horizontal y el pilote y un plano de anti-simetría, el que contiene al pilote y es perpendicular a la carga. En la [Figura 1](#) se muestran estos planos de simetría y anti-simetría, así como también la terna de ejes elegidos y su numeración. Debido a esto y el hecho de que el suelo y pilote es representado por modelos elásticos, isótropos, homogéneos y lineales es que se puede modelar solo un cuarto de la

geometría total aplicando un cuarto de la carga real y colocando los vínculos correspondientes para modelar simetría. Sobre el plano de simetría se colocan vínculos que restringen el desplazamiento normal al plano de simetría pero permiten los desplazamientos en el plano de simetría. En el plano de anti-simetría se colocan vínculos que restringen los desplazamientos en sentido vertical y horizontal según el plano de anti-simetría, permitiendo solo el desplazamiento horizontal normal al plano de anti-simetría

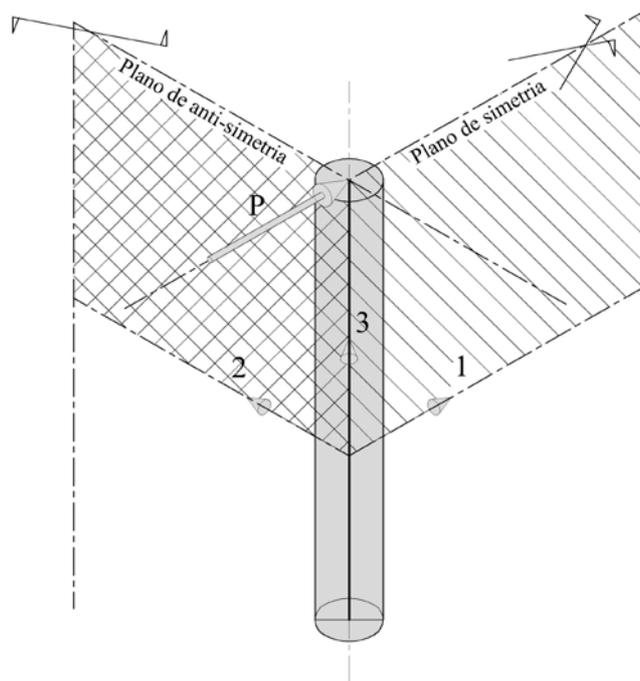


Figura 1: Planos de simetría y anti-simetría en el modelo y convención de ejes utilizada.

El tamaño del medio sólido se eligió de manera que los bordes no influyeran en la respuesta del pilote, para lo que se adoptó una distancia de 5 veces la longitud característica, L_c .

El modelo de sólido queda determinado por los parámetros E_s, ν_s , siendo el módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson, respectivamente. Se adopta para los pilotes la teoría de vigas clásica, siendo los parámetros necesarios $E_p, \nu_p, I_1, I_2, I_3$, siendo el módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson e inercias según los ejes 1, 2 y 3 respectivamente.

3 MODELADO MEDIANTE ELEMENTOS DE VIGAS Y SÓLIDOS CLASICOS.

En este modelo se utilizan elementos de sólidos y de vigas clásicos. El ensamble del problema se realiza de forma que los grados de libertad (gdl) traslacionales de vigas se ensamblan en los gdl traslacionales de sólidos correspondientes, quedando los gdl rotacionales de vigas como incógnitas extras del problema de sólidos. Este modelo sería equivalente a un elemento embebido como el propuesto por Sadek y Shahrour (2004) para el caso en que el eje del pilote coincida con la arista vertical del elemento.

Los elementos de viga constan de una matriz de rigidez que representa fuerzas (y momentos) puntuales que debido a la forma de ensamblar el problema quedan aplicadas en los nudos del elemento de sólido al que se vinculan. Estas fuerzas, al estar concentradas en los nudos del sólido, no dependen del tamaño que tenga el sólido en el sentido perpendicular al

elemento de viga, por lo que al disminuir su tamaño, no disminuyen las fuerzas aplicadas en los nudos, lo que lleva a tensiones infinitas en el límite cuando el tamaño de malla tiende a cero. El hecho de que las fuerzas representadas en la matriz de rigidez afecten sólo los nudos donde se encuentra el eje de la viga es un problema y se debe a la aproximación de que la superficie de interacción es el eje de la viga.

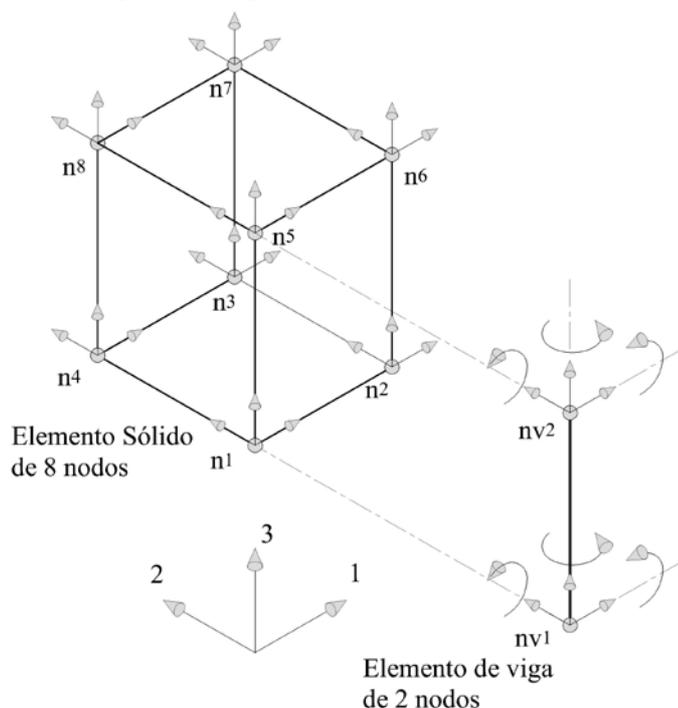


Figura 2: Elementos de sólidos y vigas utilizados

Para discretizar el dominio sólido se eligen elementos tipo brick de 8 nodos con 3 grados de libertad (gdl) por nodo, con funciones de formas estándar. Para estos elementos se subintegró los términos correspondientes al corte en la evaluación de la matriz de rigidez a fin de evitar el bloqueo de corte.

Para discretizar los pilotes se eligen elementos de vigas estándar, con 2 nodos y 6 gdl por nodo, con funciones de interpolación cúbicas para giros y desplazamientos normales al eje de la viga y funciones de interpolación lineales para los desplazamientos y giros según el eje de la viga. En la Figura 2 se muestran un esquema de los elementos finitos utilizados y la asociación entre los gdl traslacionales de vigas y de sólidos.

3.1 Estudio paramétrico

Con el objeto de estudiar la influencia del tamaño de malla en este problema, se realizó un estudio paramétrico de la influencia de las principales variables sobre la respuesta del modelo de elementos finitos.

Se eligieron los valores mostrados en las Eq. (1) para los parámetros de los elementos de sólidos y para los elementos de vigas. Para el sólido se eligieron valores de E_s que representan un suelo firme, uno intermedio y otro blando en relación al E_p adoptado. Los diámetros adoptados intentan reflejar la variación entre un pilote muy flexible a uno muy rígido.

$$\begin{aligned}
 E_s &= (470,0 \quad 117,5 \quad 23,5) \text{ Mpa} \\
 \nu_s &= (0,00 \quad 0,25 \quad 0,49) \\
 E_p &= (23.500) \text{ Mpa} \\
 \nu_p &= (0,20) \\
 D_p &= (0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8) \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Además de estas variables, se varía el tamaño de los elementos de sólidos, eligiéndose tamaños de malla que van desde mallas finas a gruesas como se muestra en las Eq (2).

$$Lm = \left(\frac{Lc}{5} \quad \frac{Lc}{4} \quad \frac{Lc}{3} \quad \frac{Lc}{2} \quad Lc \quad 2Lc \right)
 \tag{2}$$

Para cada una de las combinaciones se analiza un problema donde se aplica una carga horizontal de 200 kN en la superficie del pilote.

Para cada caso se comparó el valor de desplazamiento máximo en la cabeza del pilote obtenido de la modelación contra los valores calculados siguiendo las expresiones propuestas por Randolph (1981).

3.2 Análisis de resultados

Del análisis de los datos obtenidos de los diferentes modelos, se ve que el problema tiene una fuerte dependencia del tamaño de malla, ya que los desplazamientos en la cabeza del pilote crecen indefinidamente con la disminución del tamaño de los elementos de sólido (Lm), no observándose una convergencia monotónica a un valor cercano a la solución de Randolph, la que se toma como referencia en este trabajo. Si se grafica el error relativo (e) que comete la solución numérica contra la solución analítica de Randolph, se observa empíricamente que existe un valor de Lm donde el error relativo se anula. Este tamaño de malla se define como el tamaño de malla óptimo (Lop) (ver Figura 3). Este tamaño óptimo varía linealmente con la longitud característica del problema. En la Figura 4 se muestra la variación del tamaño óptimo vs. la longitud característica del problema para el caso de $E_s = 470,0 \text{ Mpa}$ y los distintos ν_s utilizados en el estudio.

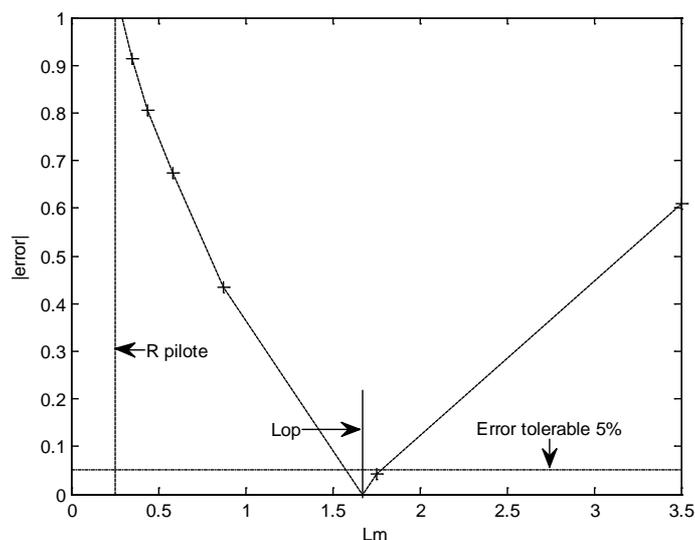


Figura 3: Forma típica de la curva e vs. Lm .

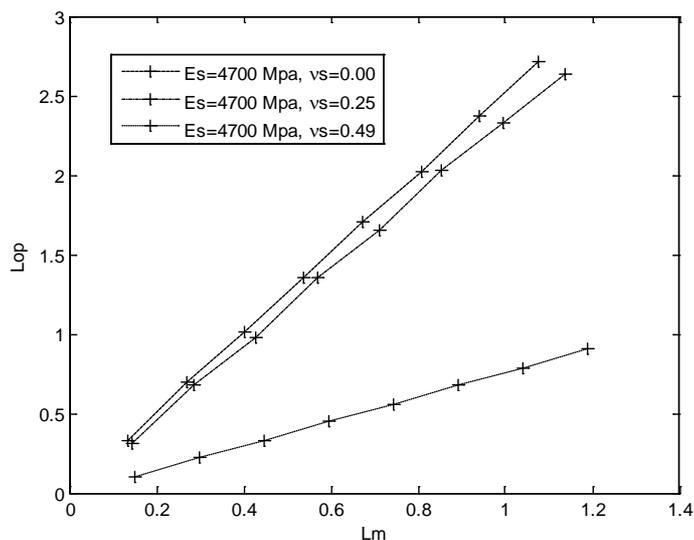


Figura 4: Variación de L_{op} vs L_c para $E_s=4700$ Mpa.

Para los otros casos se obtienen gráficos similares, verificándose siempre la relación lineal entre tamaño óptimo y longitud característica, lo que nos permite escribir las Eq.(3).

$$L_{op} = a L_c \quad (3)$$

$$a = f(E_s, \nu_s, D_p)$$

Para determinar la forma de a , se estudia la variación de a con respecto a los diferentes parámetros como se indica en las Eq. (4), de lo que se desprende que a es independiente del diámetro del pilote y la variación en E_s y ν_s es cuadrática.

$$a = g(E_s), a = h(\nu_s), a = r(D_p) \quad (4)$$

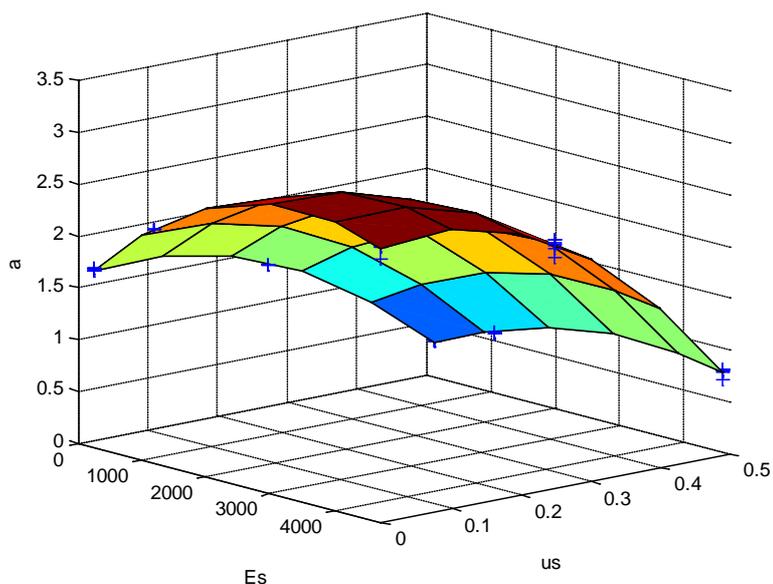


Figura 5: Superficie de ajuste de los datos numéricos.

Este parámetro a , puede ser ajustado a fin de producir una estimación del tamaño de malla necesario para que la respuesta en el modelo de elementos finitos se mantenga cerca de la respuesta esperada en función de la solución de Randolph.

A fines de realizar un ajuste numérico experimental se eligió una función de la forma que se muestra en la Eq.(5). Se calcularon los coeficientes de la ecuación por medio de la técnica de regresión no lineal de mínimos cuadrados, resultando de esta manera la superficie de ajuste que se muestra en la Figura 5. En la Figura 6 se muestra la correlación entre la estimación del tamaño de malla óptimo calculado contra el tamaño óptimo real y se ve que el ajuste entre ambas es bueno.

$$a(Es, vs) = C_1 vs^2 + C_2 vs + C_3 + C_4 Es^2 + C_5 Es + C_6 vs Es + C_7 vs^2 Es + C_8 vs Es^2 \quad (5)$$

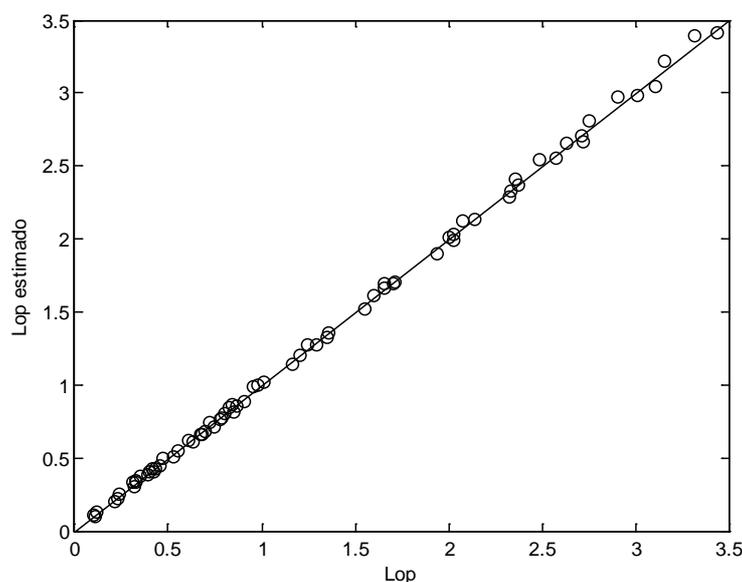


Figura 6: Correlación entre Lop estimado vs Lop de los diferentes casos.

Regresiones de este tipo pueden ser utilizadas a fines prácticos con el objeto de definir mallas que permitan obtener valores de rigidez lateral similares a los obtenidos mediante la solución de Randolph. Sin embargo, este ajuste empírico no soluciona la limitación inherente de esta técnica de modelación, la cual carece de una definición explícita de la superficie de interacción, la cual permita distribuir las fuerzas de contacto suelo-pilote de manera que no se produzcan concentraciones de tensión que eviten la convergencia a la solución de referencia.

4 MODELADO MEDIANTE ELEMENTOS DE VIGA EMBEBIDOS CON SUPERFICIE DE INTERACCIÓN

A fines de evitar la falta de convergencia para tamaños de malla decrecientes observados en los modelos de elementos de viga convencionales embebidos en sólidos, se desarrolló un elemento de viga embebido con fuerzas de contorno definidas en una superficie de interacción finita. Se propone formular la matriz de rigidez de la viga en términos de todos los grados de libertad del elemento de sólido, y no sólo los que definen al eje de la viga, para lo cual se explicita la superficie de interacción (Ω) entre el elemento de sólido y el elemento de viga de manera que la transferencia de carga se realice a través de esta superficie, como se muestra en la Figura 7.

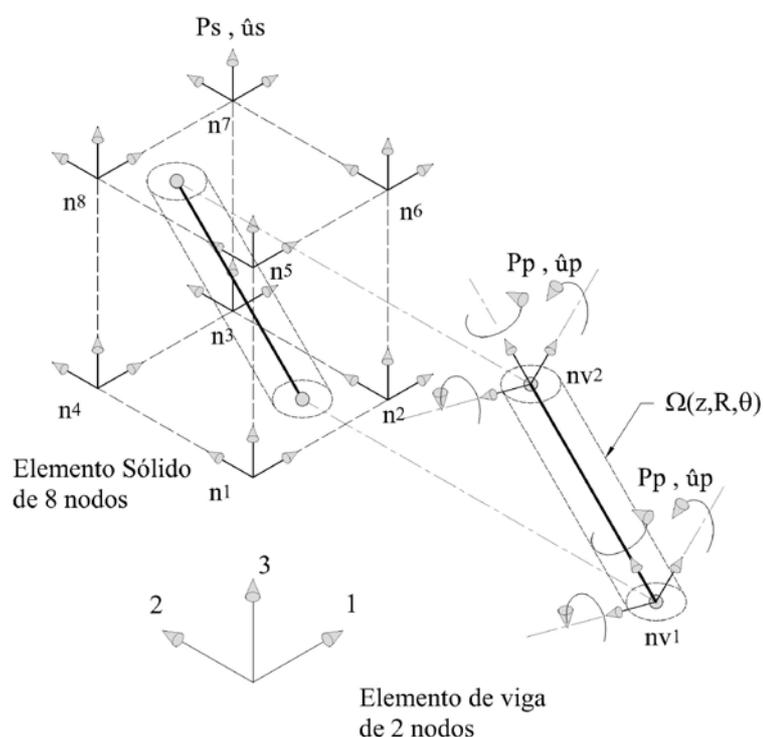


Figura 7: Elemento embebido de viga en sólido. Definición de grados de libertad y fuerzas nodales.

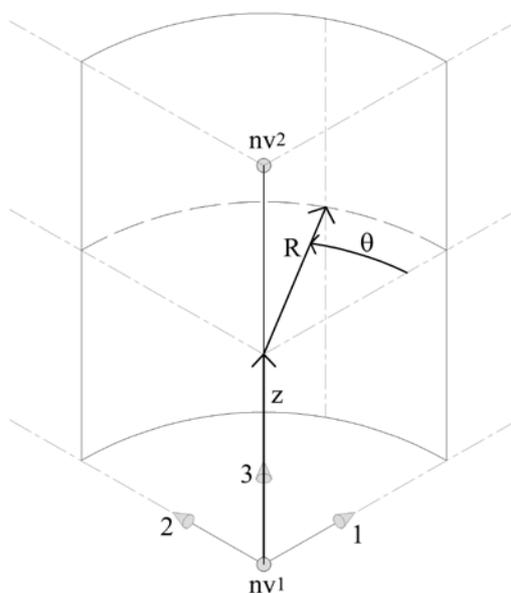


Figura 8: Parametrización de la superficie de interacción $\Omega(z, R, \theta)$

La metodología implementada se basa en determinar el trabajo virtual de las fuerzas en la superficie de interacción para calcular la reacción de la carga distribuida en la superficie de interacción en los nodos del elemento de sólido. La reacción de la carga es igual a los elementos de la matriz de rigidez en términos de grados de libertad de sólido debido a desplazamientos de los grados de libertad de la viga. A fines de obtener los términos en función de grados de libertad equivalentes de desplazamiento de sólido, se aproxima el campo

de deformaciones de la viga mediante la interpolación de desplazamientos de sólido. Esto se logra estableciendo una equivalencia entre el trabajo del campo de desplazamiento del elemento sólido y el de la viga, considerando un campo de fuerzas virtuales correspondientes a la superficie de interacción.

4.1 Parametrización de la superficie de interacción.

Dado que se considera un pilote de sección circular, se utilizan las variables z, R, θ , para parametrizar la superficie de interacción; siendo z la distancia sobre el eje de la viga, R el radio del pilote, y θ el ángulo desde el eje 1 medido en sentido antihorario sobre el plano 1-2 (Figura 8).

4.2 Formulación del elemento de pilote embebido

Se define la interpolación mostrada en la Eq.(6) para los desplazamientos en la superficie de interacción en función de los desplazamientos nodales de sólido \hat{u}_s , donde las N_{iu}^s son las funciones de interpolación lineales clásicas.

$$u_s = \mathbf{N}_u^s \hat{u}_s \quad (6)$$

Se definen las interpolaciones mostradas en las Eq.(7) para los desplazamientos y fuerzas de interacción en la superficie de interacción en función de los desplazamientos nodales de vigas \hat{u}_p , y las fuerzas distribuidas evaluadas en los nodos de vigas \hat{f}_p . Para los desplazamientos se utilizan funciones de interpolación cúbicas (en función de desplazamientos y giros) para la flexión y lineales para la torsión y la deformación axial. Para las fuerzas se utilizan las funciones de interpolación lineales.

$$\begin{aligned} u_p &= \mathbf{H}_u^p \hat{u}_p \\ f_p &= \mathbf{H}_f^p \hat{f}_p \end{aligned} \quad (7)$$

La ecuación de equilibrio de la viga es la que se muestra en la Eq.(8).

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p \hat{u}_p &= P_p \\ P_p &= \mathbf{B} \hat{f}_p \\ \text{con} & \\ \mathbf{B} &= \int_{\Omega} \mathbf{H}_u^p{}^T \mathbf{H}_f^p d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

Dado que la interpolación de desplazamientos del pilote se realiza en función de 12 gdl y la interpolación de fuerzas se realiza en función de 12 fuerzas distribuidas (tres por nudo en cada dirección traslacional y tres momentos distribuidos por nudo que generan fuerzas de variación lineal sobre el perímetro y circunferenciales para el caso de torsión), la matriz \mathbf{B} resulta de 12x12. De esta manera, la matriz \mathbf{B} resulta cuadrada e inversible y su inversa se puede calcular analíticamente.

Planteando la igualdad del trabajo virtual realizado en la superficie Ω por el sistema de fuerzas distribuidas y las cargas nodales equivalentes, ante un desplazamiento virtual de la superficie de interacción, y haciendo uso de la Eq.(8) se llega a expresar el vector de cargas nodales equivalentes de sólidos en función de los desplazamientos nodales de vigas, como se muestra en la Eq.(9), donde la matriz \mathbf{A} resulta en general rectangular.

$$P_s = \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}_p \hat{u}_p$$

con

$$(9)$$

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^{sT} \mathbf{H}_f^p d\Omega$$

Similarmente, planteando la igualdad de trabajo virtual realizado en la superficie Ω , desarrollado por un sistema de fuerzas distribuidas arbitrario, cuando la superficie se interpola en función de los desplazamientos nodales de vigas y de sólidos respectivamente, es que se llega a escribir la Eq.(10).

$$\mathbf{A}^T \hat{u}_s = \mathbf{B}^T \hat{u}_p \quad (10)$$

Despejando los desplazamientos nodales de vigas en función de los de sólidos y reemplazando en la Eq.(9) se llega a expresar la matriz de rigidez equivalente de viga en función de los grados de libertad de sólidos como se muestra en las Eq.(11).

$$P_s = \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}_p \hat{u}_p = \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}_p \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T \hat{u}_s$$

$$P_s = \mathbf{K}_p^s \hat{u}_s \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_p^s = \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}_p \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T$$

Esta matriz de rigidez equivalente es simétrica ya que hereda la simetría de la matriz de rigidez de vigas y representa las fuerzas nodales equivalentes en grados de libertad del sólido en función de los desplazamientos nodales equivalentes de vigas expresados en grados de libertad de sólidos. Esta matriz es ensamblada directamente con la matriz de rigidez de sólido clásica para obtener la matriz de rigidez total del elemento de pilote embebido.

5 COMPARACION CON EL ELEMENTO ESTÁNDAR

A modo de ejemplo se presenta el caso de un pilote de $D=0,50$ m, $E_p=23.500$ Mpa, $\nu_s=0,20$, con módulos $E_s=470,0$ Mpa y $E_s=23,5$ Mpa, $\nu_s=0,25$.

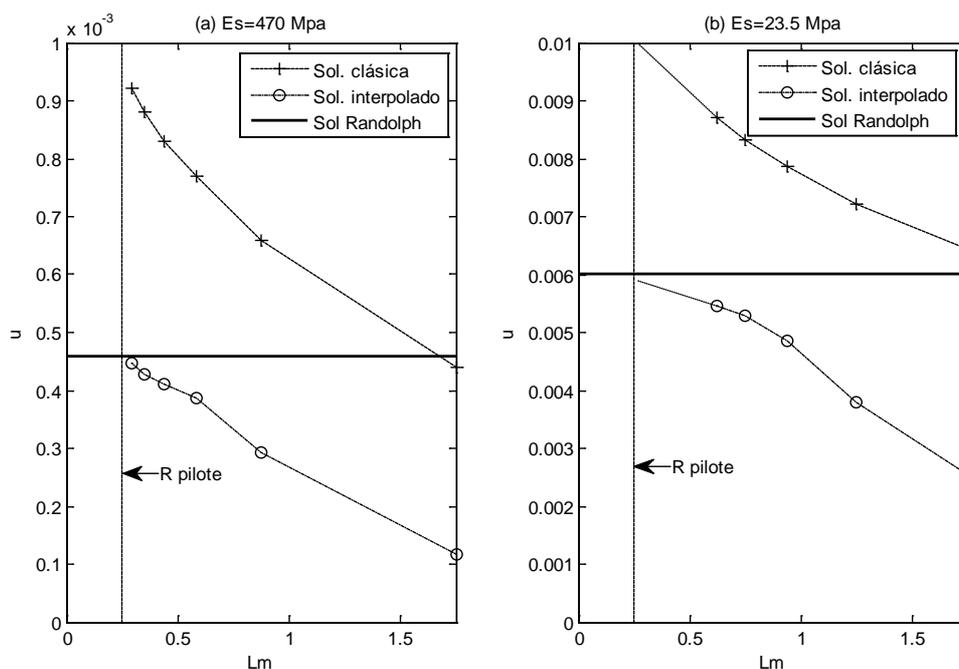


Figura 9: Desplazamiento máximo vs. Tamaño de malla. (a) para $E_s=470$ Mpa. (b) para $E_s=23.5$ Mpa.

En la Figura 9 se muestra el desplazamiento máximo en la cabeza del pilote en función del tamaño de malla, para el caso modelado con elemento embebido, donde se interpola en la superficie de interacción Ω , y para el caso modelado clásicamente, los que se contrastan con la solución de Randolph.

Puede verse que el elemento embebido converge a la solución de Randolph cuando el tamaño de malla disminuye y se acerca al valor del radio del pilote.

En la Figura 10 se muestra el error cometido contra la solución de Randolph por las dos aproximaciones, donde se ve que el error relativo tiende a cero cuando el tamaño de malla disminuye.

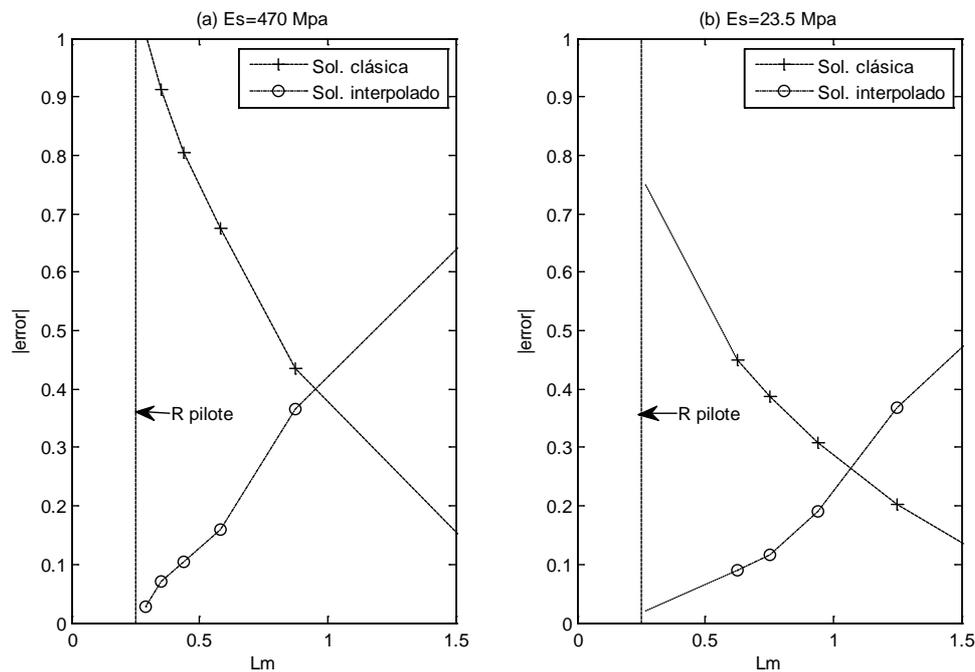


Figura 10: Error vs. Tamaño de malla. (a) para $E_s=470$ Mpa. (b) para $E_s=23.5$ Mpa.

6 CONCLUSIONES

Se realizó un estudio paramétrico del problema de un pilote vertical dispuesto en un medio elástico, isotrópico, lineal y homogéneo de donde se puede ver que cuando el modelo se ensambla vinculando directamente los grados de libertad traslacionales de vigas en los grados traslacionales de sólidos, el problema presenta una fuerte dependencia del tamaño de malla utilizado, no convergiendo a los valores indicados por la solución de Randolph, adoptada aquí como solución de contraste. Esta no convergencia, se debe a que se está adoptando que la superficie de interacción entre el sólido y la viga es solo el eje de la misma, lo que hace que las cargas de la viga solo se transmitan a los nodos de sólidos donde se vinculan y que el valor de las cargas aplicadas al sólido no dependa del tamaño del elemento de sólido en sentido transversal al eje de la viga. Ante este comportamiento y con el fin de contar con una regla práctica para el mallado, se realiza un análisis para determinar los tamaños de malla que mantienen la respuesta del modelo cercana a la solución de Randolph, obteniéndose una expresión analítica que permite estimar a priori el tamaño de malla para una serie de parámetros dados de un problema,

Para solucionar el problema de la no convergencia, se propone un elemento de viga embebido en un sólido que sea capaz de modelar explícitamente el tamaño de la superficie de interacción entre sólidos y pilotes. De esta manera se consigue expresar la matriz de rigidez de la viga en función de todos los grados de libertad del sólido y que las cargas que transmite la viga al sólido se repartan en todos los nudos del sólido y no solo en donde se vincula la viga. Con esta nueva formulación, el problema converge a la solución de Randolph cuando el tamaño de malla tiende al radio del pilote. Esta matriz de rigidez resulta simétrica debido a que hereda la simetría de la matriz de rigidez de vigas.

REFERENCIAS

- Pinto, F., Prato, C. A. Three Dimensional Indirect Boundary Element Method Formulation for Dynamic Analysis of Frames Buried in Semi-infinite Elastic Media. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 132, No. 9, September 2006, pp. 967-978. 2006
- PoLam I., Kapuskar M., and Chaudhuri D. Modeling of Pile Footings and Drilled Shafts for Seismic Design. *Technical Report MCEER-98-0018*. Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo. 1998
- Randolph, M. F. The response of flexible piles to lateral loading. *Geotechnique*, 31(2), 247-259. 1981
- Sadek M. and Shahrour I. A three dimensional embedded beam element for reinforced geomaterials. *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28, 931-946. 2004