

## ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE COMPUESTOS REFORZADOS CON FIBRAS CORTAS EMPLEANDO HOMOGENEIZACIÓN Y TEORÍA DE MEZCLAS

Ricardo D. Quinteros<sup>a</sup>, Liz G. Nallim<sup>a</sup>, Bibiana M. Luccioni<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Facultad de Ingeniería, ICMASa, INQUI (CONICET), Universidad Nacional de Salta (UNSa)  
Avenida Bolivia, 5150, 4400 Salta, Argentina  
e-mail: rdquinteros@conicet.gov.ar, <http://www.unsa.edu.ar>, <http://www.conicet.edu.ar>

<sup>b</sup> CONICET, Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán  
Avenida Roca 1800, 4000 S.M. de Tucumán, Argentina  
e-mail: bluccioni@herrera.unt.edu.ar, <http://www.herrera.unt.edu.ar>

**Palabras clave:** Estructuras Compuestas, Técnicas de Homogeneización, Modelos Constitutivos, Fibras Cortas

**Resumen.** En este trabajo se estudia el comportamiento micromecánico de materiales compuestos reforzados con fibras cortas, de diferentes formas y dimensiones, ubicadas en una orientación preferencial. El análisis se lleva a cabo utilizando una técnica de homogeneización y una teoría de mezclas serie-paralelo. Para la aplicación de la teoría de mezclas generalizada se realiza la calibración y validación de un modelo para compuestos propuesto en trabajos anteriores. Dicho modelo tiene en cuenta la participación en la deformación y tensión del compuesto de cada uno de los componentes en sus direcciones principales de ortotropía. La calibración se lleva a cabo, en el rango elástico, mediante la técnica de homogeneización de Mori-Tanaka empleando los tensores de Eshelby para considerar inclusiones elipsoidales de distintas formas y dimensiones. De esta manera es posible obtener la distribución de tensiones y deformaciones en el interior del compuesto y definir y verificar de manera relativamente simple las hipótesis de la teoría de compuestos estudiada.

En el trabajo se incluyen comparaciones de resultados obtenidos a través del método analítico basado en la determinación del campo elástico por inhomogeneidades de Mori-Tanaka, del modelo basado en la teoría de mezclas serie - paralelo y resultados experimentales. Estos resultados incluyen también la determinación de las propiedades elásticas de compuestos con fibras cortas con una orientación preferencial. Finalmente, se presentan ejemplos de aplicación de la teoría de mezclas calibrada para fibras cortas, mostrando la respuesta no lineal de estos compuestos y su comparación con resultados experimentales.

## 1 INTRODUCCIÓN

El uso de materiales compuestos reforzados con fibras cortas se ha extendido a un amplio rango de aplicaciones. Por ejemplo, es sabido que el comportamiento a tracción de materiales frágiles puede ser ampliamente mejorado mediante la incorporación de fibras cortas de alta resistencia, mejorando tanto la capacidad de deformación del material como la resistencia ante distintos tipos de sollicitaciones que inducen tensiones de tracción, produciendo un aumento en la tenacidad el compuesto. La facilidad de su procesamiento y su bajo costo comparado con los compuestos reforzados por fibras continuas largas, hacen más atractivo el uso de compuestos con fibras cortas arbitrariamente distribuidas u orientadas en forma preferencial.

Numerosos autores han analizado el comportamiento de compuestos reforzados con fibras cortas y han desarrollado modelos para analizar el comportamiento de los mismos. Por ejemplo, [Ding et al \(2002\)](#) propusieron un modelo basado en el empleo de la teoría de mezclas clásica y el método de los elementos finitos para simular el comportamiento en el inicio de la fluencia de laminados con fibras metálicas cortas. [Hine et al \(2002\)](#) analizaron los efectos de la participación volumétrica de las fibras, su relación de aspecto y distribución sobre las propiedades elásticas de laminados, mediante simulación numérica a través de la adaptación de un modelo previamente desarrollado por [Gusev et al \(2000\)](#) para laminados con fibras largas. Otros trabajos de modelación y/o estudio de laminados con fibras cortas son aquellos de [Jiang et al \(1998\)](#), [Li et al \(1999\)](#) y [Hsueh \(2000\)](#), los cuales se basan en el modelo conocido como *shear lag*, propuesto por [Cox \(1952\)](#). El mismo se centra en la transferencia de tensiones axiales entre fibra y matriz a través de tensiones tangenciales en la interfaz. En este trabajo se presenta un modelo basado en el empleo de una Teoría de Mezclas generalizada propuesto por [Luccioni \(2006\)](#). El modelo fue planteado originalmente para fibras largas, pero a través de la adecuada calibración de los parámetros involucrados, puede ser adaptado para su aplicación a compuestos reforzados con fibras cortas de diferentes longitudes orientadas en una dirección preferencial.

## 2 MODELO CONSTITUTIVO

Como se expresó en la sección anterior el modelo presentado en este trabajo se basa en el modelo propuesto por [Luccioni y Oller \(2003\)](#) y [Luccioni \(2006\)](#), para compuestos reforzados con fibras unidireccionales largas. En este modelo se supone que el compuesto puede descomponerse sucesivamente en sub-compuestos, hasta llegar a compuestos simples en los que puedan plantearse hipótesis cinemáticas y de equilibrio entre componentes sencillas. Básicamente, en ese compuesto se debe poder identificar cuáles componentes de deformación son comunes a todas sus constituyentes, lo que normalmente se identifica como comportamiento en paralelo, y cuáles componentes de tensión son comunes a todas sus componentes, lo que normalmente se identifica como comportamiento en serie.

Generalmente, para poder establecer estas hipótesis es necesario descomponer el compuesto en varias etapas. Básicamente, en el caso de un compuesto laminado formado por láminas con fibras unidireccionales se requeriría separar el mismo en láminas y analizar en primer lugar las láminas. Aún el análisis de una lámina con precisión requiere más de una descomposición.

### 2.1 Hipótesis cinemáticas y de equilibrio

Si se analiza un compuesto sencillo se puede identificar en el mismo algunas direcciones en que las distintas componentes tienen la misma deformación (comportamiento en paralelo)

y otras en las que las componentes tienen la misma tensión (comportamiento en serie).

En base a este análisis, se reordenan las componentes de tensión y deformación de las componentes de manera de tener un tensor  $\varepsilon^*$  en el que están aquellas componentes de tensión y deformación que luego serán comunes en el compuesto y en otro tensor  $\sigma^*$  aquellas componentes de tensión o deformación que serán el resultado de la superposición de las de todas las componentes multiplicadas por sus respectivas participaciones de volumen.

Para ordenar de esta manera las componentes se definen los siguientes tensores:

$$\begin{aligned}\alpha_{ijkl}^{\sigma} &= \delta_{ir} \delta_{js} \delta_{kr} \delta_{ls} H(p_{rs}) \\ \alpha_{ijkl}^{\varepsilon} &= \delta_{ik} \delta_{jl} - \alpha_{ijkl}^{\sigma}\end{aligned}\quad (1)$$

H: función escalón

$$p_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si la componente } rs \text{ trabaja en paralelo} \\ 0 & \text{si la componente } rs \text{ trabaja en serie} \end{cases}$$

Las componentes de tensión y de deformación se reordenan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\sigma^* &= \alpha^{\sigma} : \sigma + \alpha^{\varepsilon} : \varepsilon & \sigma &= \alpha^{\sigma} : \sigma^* + \alpha^{\varepsilon} : \varepsilon^* \\ \varepsilon^* &= \alpha^{\varepsilon} : \sigma + \alpha^{\sigma} : \varepsilon & \varepsilon &= \alpha^{\varepsilon} : \sigma^* + \alpha^{\sigma} : \varepsilon^*\end{aligned}\quad \text{y también vale que} \quad (2)$$

El tensor  $\sigma^*$  es tal que, referido a direcciones locales del material (fibra, lámina, etc.) tiene componentes de tensión en correspondencia con aquellas direcciones en las que trabaja en paralelo y deformaciones totales en aquellas direcciones en las que trabaja en serie.

De manera análoga el tensor  $\varepsilon^*$  es tal que, referido a direcciones locales del material (fibra, lámina, etc.), tiene componentes de deformaciones totales en correspondencia con aquellas direcciones en las que trabaja en paralelo y tensión en aquellas direcciones en las que trabaja en serie.

## 2.2 Forma alternativa de escribir las ecuaciones constitutivas de las componentes

Se propone una forma alternativa de expresar las ecuaciones constitutivas elastoplásticas de las componentes, que luego permite encontrar el comportamiento del compuesto en forma sencilla, haciendo hipótesis similares a la de teoría de mezclas clásica (Oller et al, 1996).

La ecuación constitutiva secante del compuesto puede escribirse como sigue:

$$\sigma = C : \varepsilon^e = C : (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3) se puede llegar a la siguiente relación constitutiva secante:

$$\sigma^* = C^* : \varepsilon^* - \sigma^{p*} \quad (4)$$

donde:

$$C^* = (\alpha^{\sigma} : C + \alpha^{\varepsilon}) : (\alpha^{\varepsilon} : C + \alpha^{\sigma})^{-1} \quad (5)$$

$$\sigma^{p*} = (C^* : \alpha^{\sigma} - \alpha^{\varepsilon}) : \varepsilon^p \quad (6)$$

### 2.3 Ecuación constitutiva del compuesto

En primer lugar, se analiza un compuesto simple formado por  $n$  componentes en las que las direcciones principales del material y los tensores  $\alpha^\sigma$  y  $\alpha^\varepsilon$  son idénticos entre componentes. En ese compuesto se verifica que:

$$\varepsilon_c^* = \varepsilon^* \quad (7)$$

donde  $c$  indica una componente cualquiera.

Si se designa con  $k_c$  la proporción de volumen de una componente genérica y se admite además que en aquellas componentes que trabajan en serie, la deformación plástica del compuesto es la suma de las deformaciones plásticas de las componentes multiplicadas por sus respectivas participaciones de volumen, resulta:

$$\sigma^* = C^* : \varepsilon^* - \sigma^{p*} \quad (8)$$

con:

$$C^* = \sum k_c C_c^* \quad \sigma^{p*} = \sum k_c (C_c^* : \alpha^\sigma - \alpha^\varepsilon) : \varepsilon_c^p \quad (9)$$

Utilizando las ecuaciones (2) se puede calcular la tensión como:

$$\sigma = C : \varepsilon - \sigma^p \quad (10)$$

donde:

$$C = (\alpha^\sigma : C^* + \alpha^\varepsilon) : (\alpha^\varepsilon : C^* + \alpha^\sigma)^{-1} \quad (11)$$

$$\sigma^p = -C : \alpha^\varepsilon : \sigma^{p*} + \alpha^\sigma : \sigma^{p*} = (\alpha^\sigma - C : \alpha^\varepsilon) : \sigma^{p*}$$

A los efectos de la implementación numérica en un programa de elementos finitos, resulta conveniente encontrar una relación entre la deformación de cada una de las componentes y la deformación del compuesto. De esta manera, una vez obtenida la deformación de cada componente, se pueden integrar independientemente las ecuaciones constitutivas correspondientes y llevar cuenta de los estados tensionales a nivel micro-mecánico.

Partiendo de la condición (7) y las ecuaciones (2) y (10) se puede escribir:

$$\varepsilon_c = \phi_c : \varepsilon + \sigma : \tilde{\varepsilon}_c^p \quad (12)$$

donde:

$$\phi_c = (\alpha^\varepsilon : C_c^* + \alpha^\sigma) : (\alpha^\varepsilon : C^* + \alpha^\sigma)^{-1} \quad (13)$$

$$\tilde{\varepsilon}_c^p = \phi_c : \alpha^\varepsilon : \sigma^{*p} - \alpha^\varepsilon : \sigma_c^{*p}$$

El tensor elastoplástico tangente se obtiene derivando la ecuación (10)

$$\dot{\sigma} = C : \dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}^p = C^T : \dot{\varepsilon} \quad (14)$$

donde:

$$C^T = C - (\alpha^\sigma - C : \alpha^\varepsilon) : \sum k_c (C_c^* : \alpha^\sigma - \alpha^\varepsilon) : (I - C_c^{-1} : C_c^T) : \phi_c \quad (15)$$

y  $C_c^T$  es el tensor elastoplástico tangente de la componente  $c$ .

Todas las ecuaciones anteriores valen en el sistema de referencia local del compuesto. Para un sistema de referencia cualquiera se deben rotar los tensores correspondientes.

La ecuación constitutiva de un compuesto laminado o de un material compuesto con estructura compleja, donde los tensores  $\alpha^\sigma$  y  $\alpha^\varepsilon$  no son iguales en todas las componentes, puede obtenerse en etapas. Se descompone el compuesto en sub-compuestos más simples, para los cuales se puede encontrar la ecuación constitutiva de la manera descrita, y luego se halla la ecuación del compuesto, componiendo los sub-compuestos de manera similar.

Para obtener las deformaciones de las componentes, se encuentra en primer lugar la de las sub-compuestos y luego, a partir de ellas, las de las componentes mismas.

Por lo tanto, se considera a cada lámina como un compuesto formado por dos subcompuestos que denominaremos  $a$  y  $b$ , los que están formados a su vez, cada uno, por fibra y matriz.

Aplicando la ecuación (5) al subcompuesto  $a$ , se obtienen, para fibra y matriz, las siguientes expresiones:

$$C_{af}^* = (\alpha_a^\sigma : C_f + \alpha_a^\varepsilon) : (\alpha_a^\varepsilon : C_f + \alpha_a^\sigma)^{-1} \quad (16)$$

$$C_{am}^* = (\alpha_a^\sigma : C_m + \alpha_a^\varepsilon) : (\alpha_a^\varepsilon : C_m + \alpha_a^\sigma)^{-1} \quad (17)$$

Análogamente, para el subcompuesto  $b$  se obtiene:

$$C_{bf}^* = (\alpha_b^\sigma : C_f + \alpha_b^\varepsilon) : (\alpha_b^\varepsilon : C_f + \alpha_b^\sigma)^{-1} \quad (18)$$

$$C_{bm}^* = (\alpha_b^\sigma : C_m + \alpha_b^\varepsilon) : (\alpha_b^\varepsilon : C_m + \alpha_b^\sigma)^{-1}, \quad (19)$$

donde  $\alpha_a^\sigma$  y  $\alpha_b^\sigma$  son los tensores que definen el comportamiento serie-paralelo de las componentes de los subcompuestos  $a$  y  $b$ , respectivamente.

Teniendo en cuenta la ecuación (9), se obtiene para cada subcompuesto

$$C_a^* = \sum k_c C_c^* = k_f C_{af}^* + k_m C_{am}^* \quad (20)$$

$$C_b^* = \sum k_c C_c^* = k_f C_{bf}^* + k_m C_{bm}^* \quad (21)$$

Luego los tensores elásticos de cada subcompuesto están dados, respectivamente, por:

$$C_a = (\alpha_a^\sigma : C_a^* + \alpha_a^\varepsilon) : (\alpha_a^\varepsilon : C_a^* + \alpha_a^\sigma)^{-1} \quad (22)$$

$$C_b = (\alpha_b^\sigma : C_b^* + \alpha_b^\varepsilon) : (\alpha_b^\varepsilon : C_b^* + \alpha_b^\sigma)^{-1} \quad (23)$$

Calculando ahora los tensores elásticos acomodados de cada uno de los subcompuestos  $a$  y  $b$  de manera análoga a lo definido a través de la ecuación (1), se obtiene:

$$\bar{C}_a^* = (\alpha^\sigma : C_a + \alpha^\varepsilon) : (\alpha^\varepsilon : C_a + \alpha^\sigma)^{-1} \quad (24)$$

$$\bar{C}_b^* = (\alpha^\sigma : C_b + \alpha^\varepsilon) : (\alpha^\varepsilon : C_b + \alpha^\sigma)^{-1}, \quad (25)$$

donde  $\alpha^\sigma$  representa el tensor que define el comportamiento serie o paralelo de los subcompuestos  $a$  y  $b$ .

Finalmente, componiendo  $a$  y  $b$ , se obtiene

$$C^* = \sum k_c \bar{C}_c^* = k_a \bar{C}_a^* + k_b \bar{C}_b^* \quad (26)$$

donde  $k_a$  y  $k_b$  son las proporciones de participación de cada uno de los subcompuestos  $a$  y  $b$ , respectivamente, con  $k_b = 1 - k_a$ .

A partir de la ecuación (11), se encuentra el tensor constitutivo del compuesto, que está dado por

$$C = (\alpha^\sigma : C^* + \alpha^\varepsilon) : (\alpha^\varepsilon : C^* + \alpha^\sigma)^{-1} \quad (27)$$

### 3 TEORÍA DE ELSHEBY Y MORI-TANAKA

En esta sección se realiza una predicción de las propiedades efectivas de las láminas a partir de las propiedades de las fases componentes utilizando la teoría desarrollada por Eshelby (1957). Para ello se considera a la fibra como una inclusión en un medio homogéneo equivalente, lo que permite resolver el problema de la inhomogeneidad. Además, se considera el efecto de la interacción entre fibras utilizando el método de Mori – Tanaka (1973). De esta forma, se obtiene una mejor caracterización del comportamiento del compuesto para soluciones no diluidas.

Los resultados de Eshelby muestran que si una inclusión elipsoidal homogénea en una matriz infinita sufre una deformación uniforme  $\varepsilon^T$  (denominada autodeformación), se induce un campo de deformación y de tensión uniforme  $\varepsilon^C$ , que está relacionado con la autodeformación mediante la expresión

$$\varepsilon^C = S^E : \varepsilon^T \quad (28)$$

donde  $S^E$  es el tensor de Eshelby y es función del coeficiente de Poisson de la matriz y de las dimensiones de la inclusión. En este trabajo, se utiliza el tensor de Eshelby particularizado para inclusiones cilíndricas de sección circular. Cuando las inclusiones son inhomogéneas, se utiliza el concepto de inclusión homogénea equivalente. La estrategia consiste en reemplazar una inclusión inhomogénea sujeta a una dada autodeformación, por una cierta inclusión homogénea equivalente sobre la que actúa una autodeformación equivalente. Esta autodeformación equivalente se determina de manera tal que los campos de deformación y de tensión obtenidos para las inclusiones inhomogéneas reales y las inclusiones homogéneas equivalentes sean los mismos.

El concepto de inclusión homogénea equivalente puede extenderse al caso en que una deformación mecánica uniforme  $\varepsilon^a$  o una tensión externa  $\sigma^a$  se aplica a una inclusión elástica no homogénea en una matriz infinita. Para resolver el problema de Eshelby se debe satisfacer la condición de igualdad de tensiones y deformaciones en la inclusión real y la inclusión equivalente bajo el campo aplicado  $\varepsilon^a$  (con  $\sigma^a = C_m : \varepsilon^a$ ), que está dada por la siguiente expresión

$$C_f : (\varepsilon^a + \varepsilon^{\text{int}} + \varepsilon^C) = C_m : (\varepsilon^a + \varepsilon^{\text{int}} + \varepsilon^C - \varepsilon^T) \quad (29)$$

donde  $C_f$  y  $C_m$  son los tensores constitutivos de la fibra y matriz respectivamente,  $\varepsilon^{\text{int}}$  es la deformación elástica promedio definida por Mori – Tanaka, que permite tener en cuenta la interacción entre inclusiones y está dada por

$$\varepsilon^{\text{int}} = -k_f (\varepsilon^C - \varepsilon^T) \quad (30)$$

Si se reemplazan las expresiones (28) y (30) en la ecuación (29) se puede obtener la autodeformación equivalente  $\varepsilon^T$ .

Las constantes elásticas efectivas para una material que contiene una dispersión uniforme

de inhomogeneidades elipsoidales pueden determinarse como se describe brevemente a continuación. Se denomina  $E_0$  a la energía elástica específica cuando el espécimen está libre de inhomogeneidades y ciertas fuerzas superficiales producen una tensión uniforme  $\sigma^a$  en él. Si se introducen las inhomogeneidades, manteniendo las tracciones superficiales constantes la energía elástica crece  $-\sum E_{\text{int}}(\sigma^a)$ , que es la suma de las energías de interacción de todas las inhomogeneidades con la tensión particular. Por otra parte, la energía elástica específica de deformación, puede determinarse suponiendo que el material es ortótropo homogéneo con propiedades elásticas efectivas dadas por el tensor constitutivo  $C$ . De manera que se puede escribir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^a C^{-1} \sigma^a &= E_0 - \sum E_{\text{int}}(\sigma^a) \\ &= \frac{1}{2} \sigma^a (C^m)^{-1} \sigma^a + \frac{1}{2} k_f \sigma^a \varepsilon^T \end{aligned} \quad (31)$$

Finalmente, de (31) se puede determinar el tensor constitutivo con las propiedades elásticas efectivas del compuesto.

#### 4 CALIBRACION DEL MODELO PARA COMPUESTOS CON FIBRAS CORTAS Y COMPARACIÓN CON RESULTADOS ELÁSTICOS

El modelo descrito en la sección anterior fue calibrado para su aplicación al análisis del comportamiento de laminados con fibras largas alineadas por Toledo et al (2008). A continuación, se describe la calibración para compuestos con fibras cortas con dirección preferencial. El modelo constitutivo presentado supone que el compuesto puede descomponerse sucesivamente en sub-compuestos, hasta llegar a compuestos simples en los que pueden plantearse hipótesis cinemáticas y de equilibrio entre componentes sencillas. Es decir, se acepta que en el compuesto analizado, el material puede trabajar en serie o en paralelo en correspondencia con cada una de las componentes de tensión o deformación. Para ello es necesario fijar los tensores  $\alpha^\sigma$  y  $\alpha^\varepsilon$  (1). Los elementos de estos tensores se deben establecer según el comportamiento de la componente se acerque al comportamiento en paralelo o en serie.

De esta manera, mediante un análisis elástico lineal, se puede apreciar cómo se transmiten las tensiones en el interior del compuesto con el fin de calibrar los parámetros definidos en el modelo teórico. De esta forma, se determinan los valores más adecuados de los elementos de la diagonal de los tensores  $\alpha^\sigma$  y  $\alpha^\varepsilon$ , de acuerdo a la componente que se analice.

El estudio micromecánico de las propiedades elásticas de una lámina reforzada con fibras cortas ubicadas en una orientación preferencial se realiza aplicando la teoría desarrollada por Eshelby (1957), teniendo en cuenta también los efectos de interacción de Mori Tanaka (1973). En esta etapa se supone un comportamiento elástico lineal, inicialmente libre de tensiones. A nivel de componentes se considera que las fibras están regularmente espaciadas, alineadas y hay perfecta unión fibra - matriz. En cuanto a la matriz, se la considera isótropa y que está libre de agujeros e imperfecciones.

La aplicación del modelo presentado en este trabajo puede hacerse con distintas combinaciones serie-paralelo de los subcompuestos. De todas las posibles alternativas, se presenta la que mejor ajusta el comportamiento, comparado con el método analítico de homogeneización de Mori-Tanaka.

Al tratarse de compuestos reforzados con fibras cortas, el modelo resulta sensible a la relación de aspecto  $l/a$  de las fibras, donde  $l$  es la longitud de la misma y  $a$  es la longitud

característica de su sección transversal. Los tensores  $\alpha^\sigma$  y  $\alpha^\epsilon$  que mejor ajustan el comportamiento elástico son distintos según sea la relación de aspecto mayor o menor que 10. Particularmente, en el caso  $l/a < 10$  es posible encontrar una variación de la participación volumétrica (Ec. 26) de cada subcompuesto ficticio en función a la relación de aspecto mencionada.

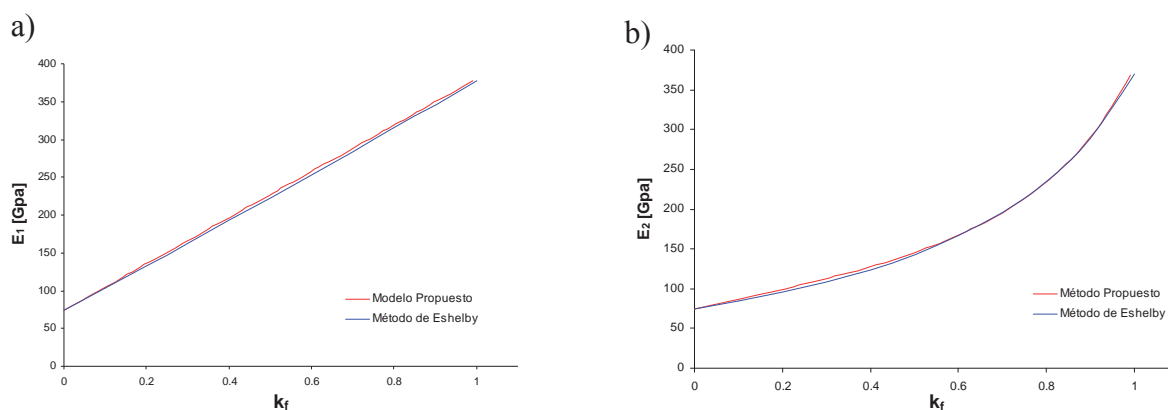
En el caso de  $l/a > 10$  la combinación (Ecs. 24, 25 y 26) que mejor ajusta el comportamiento es la dada por:  $\alpha^\sigma = \text{Diag}[0,0,0,0,0,0]$ ,  $\alpha_a^\sigma = \text{Diag}[1,1,1,1,1,1]$  y  $\alpha_b^\sigma = \text{Diag}[1,0,0,0,0,0]$ , esto es:

$$\alpha^\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_a^\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha_b^\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con  $k_a = 0.25$  y  $k_b = 0.75$ .

En estas últimas expresiones los tensores  $\alpha^\sigma$ ,  $\alpha_a^\sigma$  y  $\alpha_b^\sigma$ , que son tensores de rango 4, se han representado en forma matricial para simplificar su visualización. Esto puede hacerse debido a la simetría de dichos tensores. La equivalencia con el tensor de rango cuatro es similar a la que se usa cuando se escribe el tensor elástico en forma matricial. Los elementos de la diagonal corresponden a las componentes de tensión  $\alpha_{1111}$ ,  $\alpha_{2222}$ ,  $\alpha_{3333}$ ,  $\alpha_{2323}$ ,  $\alpha_{1313}$ ,  $\alpha_{1212}$ , respectivamente.

La Figura 1 (a-f) muestra la variación de los distintos módulos elásticos en función de la proporción de fibras, para un compuesto en el que la relación de aspecto de las fibras es  $l/a = 30$ . Las propiedades elásticas de los componentes (fibra y matriz) son  $E_f = 380 \text{ GPa}$ ,  $E_m = 74 \text{ GPa}$ ,  $\nu_f = 0.27$  y  $\nu_m = 0.30$  (Hsueh, 2000): Se muestran los resultados obtenidos considerando el modelo calibrado y el método de Eshelby (1957) y Mori-Tanaka(1973).





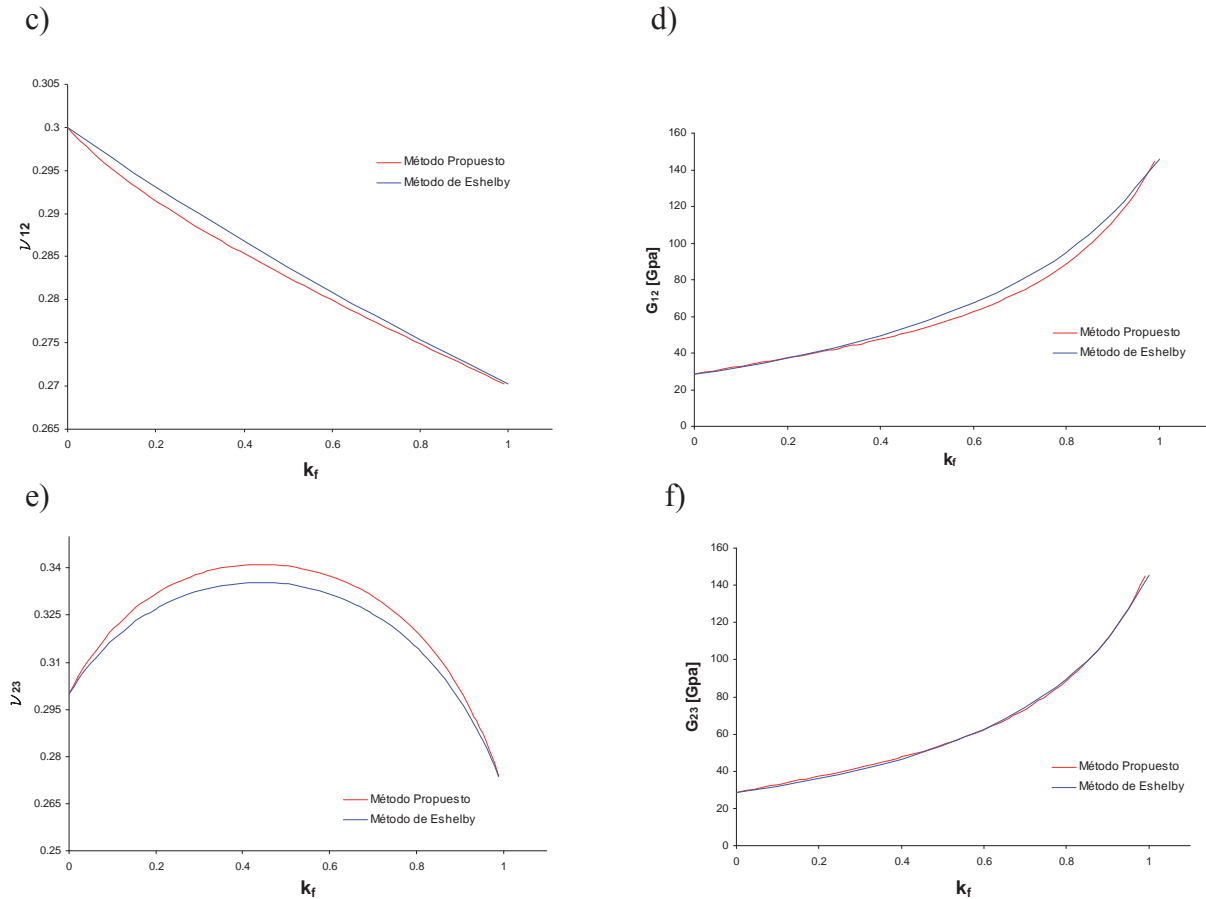


Figura 1. Variación de las propiedades elásticas del compuesto PRD-166/SLS (Hsueh, 2000) en función de la proporción de fibras en la lámina. a)  $E_1$ , b)  $E_2$ , c)  $\nu_{12}$ , d)  $G_{12}$ , e)  $\nu_{23}$  y f)  $G_{23}$

Cuando se trata de un compuesto donde la relación de aspecto  $l/a$  de la fibra es menor a 10, la combinación que mejor ajusta el comportamiento del material en el rango elástico es la formada por:  $\alpha^\sigma = \text{Diag}[0,0,0,0,0,0]$ ,  $\alpha_a^\sigma = \text{Diag}[1,0,0,0,1,0]$  y  $\alpha_b^\sigma = \text{Diag}[0,0,1,0,1,0]$  y como se mencionó anteriormente, la participación volumétrica de cada subcompuesto varía en función de la relación  $l/a$  mediante la siguiente expresión:

$$k_a = -0,000415 \left(\frac{l}{a}\right)^4 + 0,0107 \left(\frac{l}{a}\right)^3 - 0,1027 \left(\frac{l}{a}\right)^2 + 0,4694 \left(\frac{l}{a}\right) - 0,0725 \quad (32)$$

Esta expresión fue obtenida mediante la calibración de las proporciones volumétricas  $k_a$  y  $k_b$  (Ec. 26) manteniendo fija la combinación de los tensores  $\alpha^\sigma$ ,  $\alpha_a^\sigma$  y  $\alpha_b^\sigma$ , variando la relación de aspecto e interpolando los valores obtenidos mediante una función polinómica de cuarto orden. Se puede observar que en la teoría de mezclas modificada (Luccioni, 2006)  $k_a$  y  $k_b$  representan las proporciones de volumen de los subcompuestos en que se descompone el compuesto. En esta aplicación particular,  $k_a$  y  $k_b$  no tienen una interpretación física ya que fueron obtenidas de una calibración con resultados elásticos en la que se consideraron dos subcomponentes ficticios.

La Figura 2.a muestra la variación del módulo elástico longitudinal en función de la proporción de fibras considerando el presente modelo, el método de Mori - Tanaka (1973). En la misma figura se presentan los resultados experimentales obtenidos por Jiang et al (1998) para un compuesto en el que las propiedades elásticas de fibra y matriz son  $E_f = 480\text{GPa}$ ,  $E_m = 78,2\text{ GPa}$ ,  $\nu_f = 0.20$  y  $\nu_m = 0.30$  y relación de aspecto de la fibra es  $l/a = 4$ . En las

restantes (Figura 2.b-f) se representan gráficamente los módulos elásticos restantes en función de la proporción de fibra.

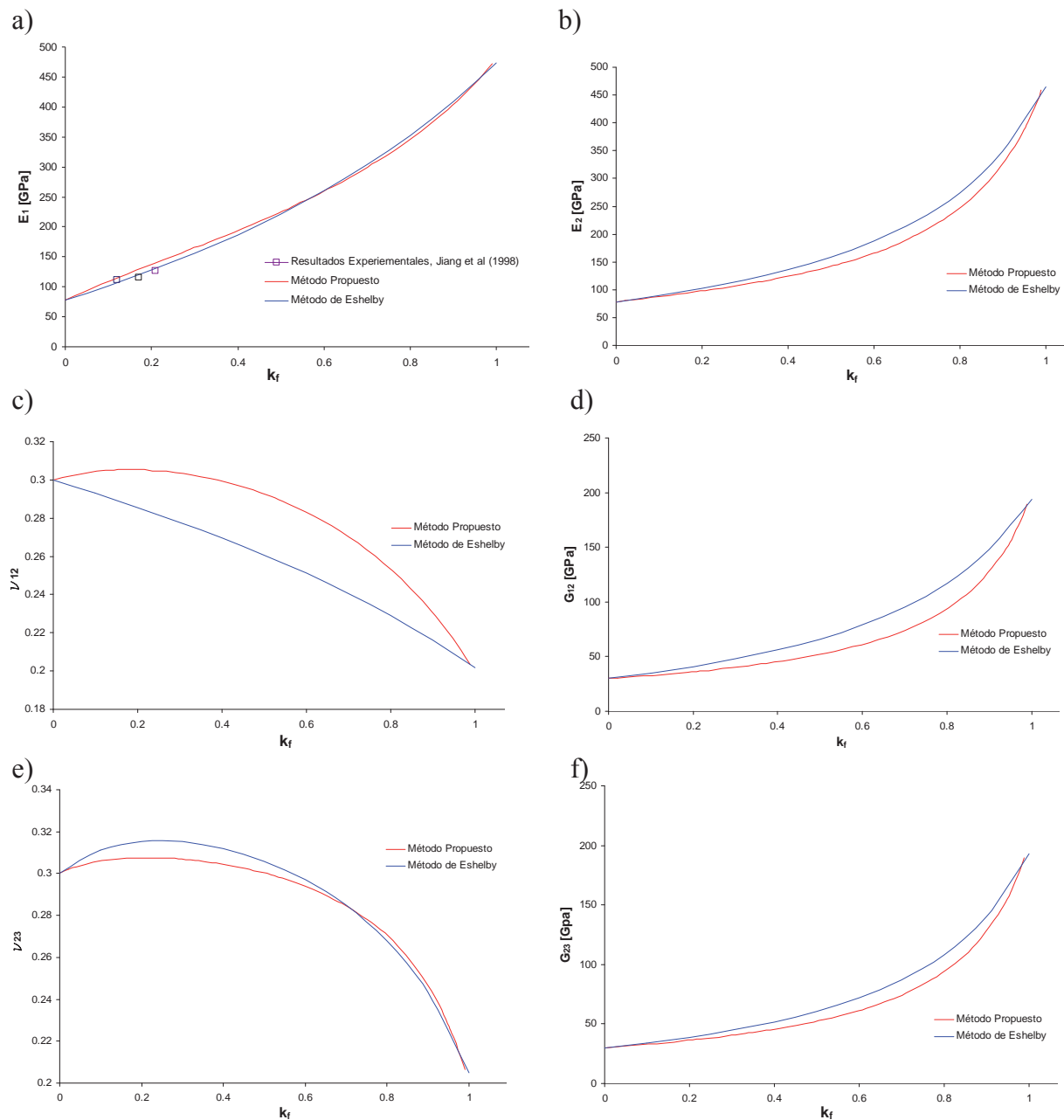


Figura 2. Variación de las propiedades elásticas del compuesto laminado SiC/8090 (Hsueh, 2000) con la proporción de fibras en la lámina. a)  $E_1$ , b)  $E_2$ , c)  $\nu_{12}$ , d)  $G_{12}$ , e)  $\nu_{23}$  y f)  $G_{23}$

A efectos de verificar la calibración adoptada para el modelo, en la Figura 3.a se representa la curva tensión - deformación para el compuesto SiCw/6061Al (Ding et al, 2002). Se muestra la respuesta obtenida tanto en el rango elástico lineal como en el rango inelástico simulando el comportamiento a tracción en la dirección longitudinal de las fibras. Las propiedades de fibra y matriz se obtuvieron del artículo mencionado. Para mayor claridad las mismas se reproducen a continuación: Propiedades elásticas,  $E_f=483\text{GPa}$ ,  $E_m=74\text{GPa}$ ,  $\nu_f=0.17$  y  $\nu_m=0.33$ . Siguiendo la misma referencia se ha adoptado un comportamiento elástico lineal para la fibra y para la matriz un comportamiento elasto-plástico, con función de fluencia de Von

Mises y flujo asociado, elasticidad lineal hasta la tensión de fluencia ( $\sigma_{ym}=357\text{MPa}$ ) y endurecimiento exponencial a partir de la fluencia dado por  $\sigma = \lambda\varepsilon^{0.2}$ . La relación de aspecto de la fibra es  $l/a=5$ . Los resultados se presentan para dos proporciones de fibra  $k_f=0.078$  en la Figura 3.a, mientras que en la Figura 3.b la participación volumétrica de las fibras es  $k_f=0.184$ . Los resultados obtenidos con el modelo calibrado se comparan con los obtenidos por Ding et al (2002), quienes emplearon un modelo basado en el uso de la teoría de mezclas clásica y el método de los elementos finitos. Se observa una muy buena concordancia entre ambos modelos.

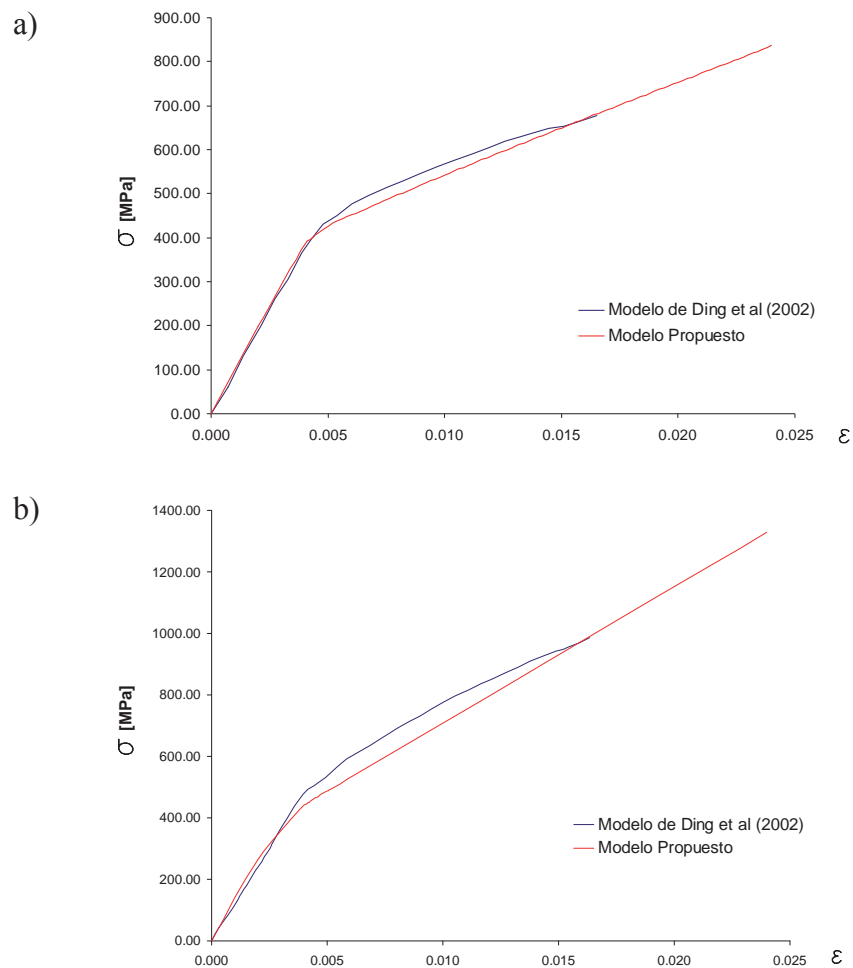


Figura 3. Curva tensión-deformación para el laminado SiCw/6061Al (Ding et al, 2002) con  $l/a=5$  y:  
a)  $k_f=0.078$ . b)  $k_f=0.184$

La Figura 4 representa el comportamiento del mismo compuesto representado en la Figura 3, sometido a tracción en la dirección de las fibras. En este caso la relación de aspecto de las fibras cortas de refuerzo es  $l/a=2$  y con una participación volumétrica de  $k_f=0.184$ . Se observa un buen acuerdo entre las curvas obtenidas por el método presentado y el propuesto por Ding et al (2002), siendo más aproximada para el caso en que la fibra tiene un  $l/a$  mayor.

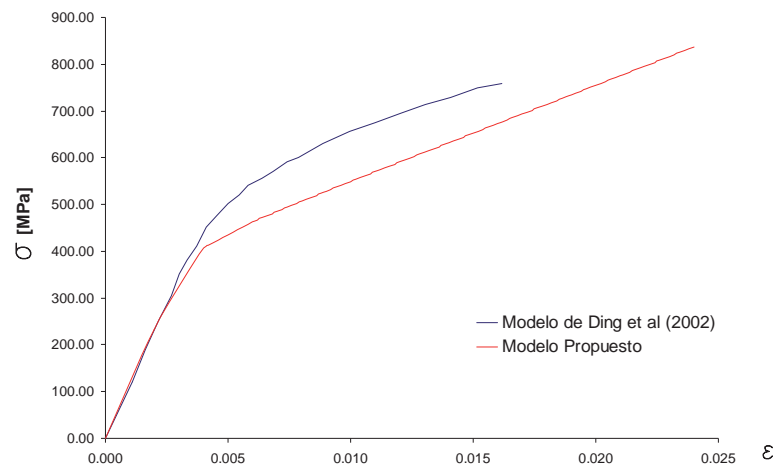


Figura 4. Curva tensión-deformación para el laminado SiCw/6061Al (Ding et al, 2002) con  $l/a = 2$  y  $k_f = 0.184$

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta en primer lugar la adecuación y calibración de un modelo propuesto originalmente para el análisis de compuestos reforzados con fibras unidireccionales largas por Luccioni (2006). El modelo es calibrado para posibilitar su aplicación al estudio de compuestos constituidos por matriz reforzada con fibras cortas. Para lograr el objetivo propuesto se realizó un estudio a nivel elástico, aplicando el método de Eshelby y Mori Tanaka, particularizado a inclusiones inhomogéneas cilíndricas de sección circular. De los resultados obtenidos y mediante la comparación con algunos resultados experimentales se calibraron los parámetros que definen el comportamiento serie-paralelo a través de los tensores  $\alpha$  y las participaciones volumétricas de los subcompuestos.

Se observa que la calibración del modelo permite reproducir satisfactoriamente todos los valores de constantes elásticas del compuesto utilizando combinaciones simples. Es de destacar la sensibilidad del modelo a la relación de aspecto de las fibras cuando ésta es menor a 10, variando de manera substancial los factores  $k_a$  y  $k_b$ .

Finalmente, el modelo calibrado se utilizó para la determinación de la respuesta no lineal de compuestos con fibras cortas unidireccionales. Aún cuando la calibración fue hecha en base al comportamiento elástico, el modelo permite trabajar con componentes elastoplásticas anisótropas. Dicha anisotropía incluye aspectos intrínsecos del material como es el caso de la fibra o algunos propios de la distribución en el compuesto como la menor resistencia a tracción de la matriz en la dirección normal a la fibra para tener en cuenta, en forma simplificada, la debilidad de la interfaz fibra-matriz. Los ejemplos desarrollados muestran que el modelo logra reproducir de manera satisfactoria la respuesta inelástica macroscópica de compuestos reforzados con fibras cortas orientadas en una dirección preferencial.

## 6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico del CONICET, producto del financiamiento del proyecto de investigación PIP CONICET N° 0105/2010. Agradecen también el apoyo del CIUNSa y de la Universidad Nacional Tucumán.

**REFERENCIAS**

- Cox H.L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *Brit J Appl Phy* 3: 72-79, 1952.
- Ding X.D., Jiang Z.H., Sun J., Lian J.S., Xiao L. Stress-strain behaviour in initial yield stage of short fiber reinforced metal matrix composite. *Composites Science and Technology* 62, 841-850, 2002.
- Eshelby, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. London*, 241, 376-396, 1957.
- Gusev AA, Hine PJ, Ward IM. Fiber packing and elastic properties of a transversely random unidirectional glass/epoxy composite. *Composites Science and Technology* 60: 535-41, 2000.
- Hine P. J., Lusti H. R., Gusev A. A. Numerical simulation of the effects of volume fraction, aspect ratio and fibre length distribution on the elastic and thermoelastic properties of short fibre composites. *Composites Science and Technology* 62, 1445-1453, 2002
- Hsueh C. Young's modulus of unidirectional discontinuous fibre composites. *Composites Science and Technology* 60, 2671-2680, 2000.
- Jiang Z., Lian J., Yang D., Dong S. An analytical study of the influence of thermal residual stresses on the elastic and yield behaviors of short fiber-reinforced metal matrix composites. *Materials Science and Engineering A248*, 256-275, 1998.
- Li Z., Mu B., Paul Chang T.Y., Hsu C. Prediction of overall tension behavior of short fibers reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures* 36, 4071-4087, 1999.
- Luccioni B., Oller S. Modelo para compuestos reforzados con fibras. *Mecánica Computacional*, Vol. XXII, ISSN 1666-6070, 2049-2063, 2003.
- Luccioni B. Constitutive model for fibre reinforced composite laminates. *Journal of Applied Mechanics*, 901-910, 2006.
- Mori, T. & Tanaka, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 21, 571-574, 1973.
- Oller S., Oñate E., Miquel J. and Botello S., "A plastic damage constitutive model for composite materials", *Int. J. Solids and Structures*, 33 (17), 2501-2518, 1996.
- Toledo M.W.E., Nallim L.G., Luccioni B.M. A micro-macromechanical approach for composite laminates. *Mechanics of Materials* 40, 885-906, 2008.