

ELEMENTOS FINITOS MITC PARA CÁSCARAS SOMETIDAS A GRANDES DEFORMACIONES ELÁSTICAS

Víctor Fachinotti, Alejandro E. Albanesi y Alfredo E. Huespe

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC), Universidad Nacional del Litoral (UNL)/ Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Predio CCT-CONICET Santa Fe, Ruta 168, Paraje El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina, vfachino@intec.unl.edu.ar, aalbanes@santafe-conicet.gov.ar, ahuespe@intec.unl.edu.ar, <http://www.cimec.org.ar>

Palabras Clave: Cáscaras, MITC, Método de los Elementos Finitos, grandes deformaciones, Elasticidad.

Resumen. El objetivo de este trabajo es desarrollar elementos finitos para cáscaras sometidas a grandes deformaciones en el rango elástico. Se parte de los elementos cuadrangulares MITC n (MITC por interpolación mixta de componentes tensoriales, n por el número de nodos del elemento). Se formulan específicamente los elementos MITC4 (K.-J. Bathe y E. N. Dvorkin, Int. J. Num. Meth. Engng., 22:697-722 (1986)), MITC9 y MITC16 (M. L. Bucelem y K.-J. Bathe, Int. J. Num. Meth. Engng., 36:3729-3754 (1993)).

Estos elementos son enriquecidos tratando las rotaciones de la manera propuesta por J. C. Simo et al., Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 79:21-70 (1990). Esto garantiza que la restricción de inextensibilidad en la dirección normal a la cáscara se satisfaga exactamente.

Finalmente, se estudia la flexión de una viga en voladizo, estableciéndose curvas de convergencia para ese problema en función del tamaño de la malla para los tres elementos MITC n planteados. Se observan tasas de convergencia similares, lo que alienta la elección del elemento MITC4, de precisión satisfactoria y menor costo computacional. Se requiere mayor estudio para extender esa conclusión a piezas de distinta geometría y/o sujetas a distintas condiciones de borde.

1. INTRODUCCIÓN

Las cáscaras son estructuras laminares curvas. Los modelos del comportamiento de cáscaras se agrupan en dos categorías: 1) modelos basados en el continuo o de “sólido degenerado” (Bathe y Dvorkin, 1986; Bucalem y Bathe, 1993), y 2) modelos basados en la teoría de cáscaras o de “resultante de tensiones” (Simo et al., 1990). La formulación de sólido degenerado parte de un elemento sólido tridimensional que atraviesa la cáscara. Dos de sus caras, las que yacen sobre las superficies de la cáscara, son colapsadas sobre la superficie media, y se adopta una hipótesis consistente con la teoría de cáscaras para definir la variación del desplazamiento en dirección perpendicular a la superficie media. Este es el enfoque adoptado aquí ya que nos permite reutilizar las leyes constitutivas disponibles en módulos programados previamente para representar el comportamiento de sólidos tridimensionales sujetos a grandes deformaciones en el rango elástico (Fachinotti et al., 2008).

2. CINEMÁTICA DE LA CÁSCARA

De acuerdo a la teoría de cáscaras de Mindlin-Reissner, una sección plana normal a la superficie media A^0 en la configuración descargada B^0 permanece plana tras la deformación, pero no necesariamente normal a la superficie media A en la configuración deformada B , debido a los efectos de la deformación transversal por corte. La posición de cualquier punto $\mathbf{X} \in B^0$ puede escribirse como

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \bar{\mathbf{X}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \frac{h}{2} \mathbf{T}(\xi_1, \xi_2) \quad (1)$$

donde $\bar{\mathbf{X}} \in A^0$, \mathbf{T} es el vector normal (unitario) a A^0 , h es el espesor de la cáscara y $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ son las coordenadas naturales, $-1 \leq \xi_1 \leq 1$. En vista de la hipótesis precedente, tras la deformación el punto $\mathbf{X} \in B^0$ ocupa la posición

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \bar{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \frac{h}{2} \mathbf{t}(\xi_1, \xi_2) \quad (2)$$

donde $\bar{\mathbf{x}} \in A$ y \mathbf{t} es el vector unitario conocido como director, ya no perpendicular a A a causa del corte.

2.1. Interpolación isoparamétrica de la geometría de la cáscara

Usaremos el método de los elementos finitos (MEF) con \mathbf{X} y \mathbf{x} interpolados isoparamétricamente:

$$\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^N \phi^k(\xi_1, \xi_2) \bar{\mathbf{X}}^k + \frac{\xi_3}{2} \phi^k(\xi_1, \xi_2) h^k \mathbf{T}^k \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^N \phi^k(\xi_1, \xi_2) \bar{\mathbf{x}}^k + \frac{\xi_3}{2} \phi^k(\xi_1, \xi_2) h^k \mathbf{t}^k \quad (4)$$

donde $\bar{\mathbf{X}}^k \in A^0$ (o $\bar{\mathbf{x}}^k \in A$) denota la posición del nodo $k = 1, 2, \dots, N$ sobre la superficie media indeformada (o deformada), \mathbf{T}^k (o \mathbf{t}^k) es el versor director en la configuración indeformada (o deformada) en el nodo k , h^k es el espesor de la cáscara en el nodo k , y $\phi^k = \phi^k(\xi_1, \xi_2)$ es la función de forma asociada al nodo k , tal que $\phi^k(\xi_1^j, \xi_2^j) = \delta_{jk}$ para todo nodo $j = 1, 2, \dots, N$ de coordenadas naturales (ξ_1^j, ξ_2^j) .

2.2. Grandes deformaciones

Elegimos como medida de la deformación en $\mathbf{X} \in B^0$ el tensor de deformación de Green-Lagrange

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j)}_{E_{ij}} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (5)$$

donde $E_{ij} = E_{ji}$ son las componentes covariantes de \mathbf{E} , $\{\mathbf{g}_i\}$ y $\{\mathbf{G}_i\}$ son las llamadas bases convectivas en B y B^0 , respectivamente, y $\{\mathbf{G}^i\}$ es la base dual de $\{\mathbf{G}_i\}$, todas ellas definidas por

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i} \equiv \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi_i} \equiv \mathbf{X}_i, \quad [\mathbf{G}^1 \mid \mathbf{G}^2 \mid \mathbf{G}^3] = [\mathbf{G}_1 \mid \mathbf{G}_2 \mid \mathbf{G}_3]^{-T} \quad (6)$$

Nótese que $\mathbf{g}_3 = ht/2$ y $\mathbf{G}_3 = h\mathbf{T}/2$ no dependen de ξ_3 , manteniéndose constantes en el espesor.

2.3. Interpolación de las componentes covariantes de deformación

El cálculo “directo” de la deformación usando la ecuación (5) con las posiciones \mathbf{X} y \mathbf{x} interpoladas según las ecuaciones (3) y (4) da resultados satisfactorios cuando se usan elementos de alto orden; en caso contrario, la rigidez de los elementos aumenta espuriamente a medida que la relación espesor/longitud de la cáscara decrece. Este defecto es el bien conocido “bloqueo por corte”, y afecta la predicción de tensiones aún en elementos cúbicos, especialmente si están distorsionados (Bucalem y Bathe, 1993).

Una solución al “bloqueo por corte” consiste en la utilización de elementos finitos mixtos apropiados, eligiéndose para este trabajo los elementos MITC n (MITC por interpolación mixta de componentes tensoriales, n por el número de nodos del elemento) propuestos por Bathe y Dvorkin (1986) y Bucalem y Bathe (1993).

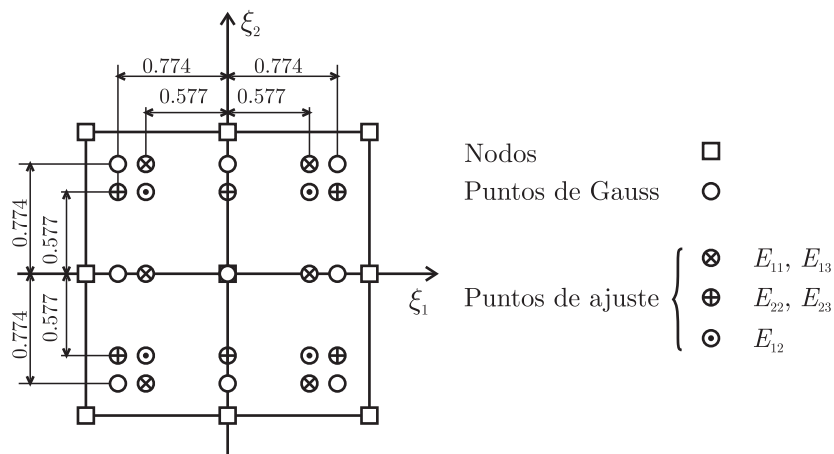


Figura 1: Ubicación de los nodos, los puntos de Gauss y los puntos de ajuste para las distintas componentes de deformación en el elemento finito de cáscara MITC9 (Bucalem y Bathe, 1993).

En general, en elementos MITC n cada componente covariante de la deformación es interpolada de forma individual. Para ello, adoptamos un conjunto de n_{ij} puntos de “ajuste” asociado

a cada componente de deformación E_{ij} (la Figura 1 muestra los correspondientes al elemento cuadrangular de 9 nodos MITC9). Definimos ahora las componentes “asumidas” de deformación \bar{E}_{ij} , tales que se “ajusten” a las componentes “directas” E_{ij} en los puntos de “ajuste” K de coordenadas naturales $(\xi_1^K, \xi_2^K, \xi_3^K)$:

$$\bar{E}_{ij}(\xi_1^K, \xi_2^K, \xi_3^K) \equiv E_{ij}(\xi_1^K, \xi_2^K, \xi_3^K), \quad K = 1, 2, \dots, n_{ij} \quad (7)$$

Usando los puntos de ajuste asociados a cada componente E_{ij} , podemos construir la función de interpolación polinómica $\varphi_{ij}^K(\xi_1, \xi_2)$ asociada al punto de ajuste K , tal que $\varphi_{ij}^K(\xi_1^L, \xi_2^L) = \delta_{KL}$.

Luego, la relación entre las deformaciones “directas” E_{ij} y las “asumidas” \bar{E}_{ij} puede expresarse como

$$\bar{E}_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{K=1}^{n_{ij}} \varphi_{ij}^K(\xi_1, \xi_2) E_{ij}(\xi_1^K, \xi_2^K, \xi_3) \quad (8)$$

Como ejemplo, en la Figura 1 se puede ver que para el elemento MITC9, dada la distribución de los puntos de ajuste asociados a cada componente de deformación, φ_{11}^K y φ_{13}^K son polinomios lineales en ξ_1 y cuadráticos en ξ_2 , φ_{22}^K y φ_{23}^K son polinomios cuadráticos en ξ_1 y lineales en ξ_2 , y φ_{12}^K son polinomios lineales en ξ_1 y ξ_2 .

3. EQUILIBRIO DE CÁSCARAS FRENTE A GRANDES DEFORMACIONES

En formulación Lagrangiana total, el equilibrio estático de una cáscara puede plantearse en la forma del principio de los trabajos virtuales

$$\int_{B^0} S^{ij} \delta E_{ij} dV = \delta W^{\text{ext}} \quad (9)$$

donde el término de la izquierda representa el trabajo interno, con S^{ij} como las componentes contravariantes (esto es, referidas a la base $\{\mathbf{G}_i\}$) del segundo tensor de tensión de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , y δE_{ij} como variaciones cinemáticamente admisibles de las componentes covariantes (esto es, respecto de la base $\{\mathbf{G}^i\}$) del tensor de deformación de Green-Lagrange \mathbf{E} ; el término de la derecha, δW^{ext} , es el trabajo virtual de las cargas externas en la configuración indeformada, que supondremos dato.

Ahora bien, sea que despreciemos E_{33} (Bischoff y Ramm, 1997; Areias et al., 2005) o S^{33} (Dvorkin et al., 1995), la contribución $S^{33} \delta E_{33}$ es supuesta nula.

Viendo las ecuaciones (5) y (6), las variaciones de las componentes covariantes de deformación resultan

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{x}_{,j} + \mathbf{x}_{,i} \cdot \delta \mathbf{x}_{,j}) \quad (10)$$

Interpolada la posición $\mathbf{x} \in B$ según la ecuación (4), tenemos:

$$\mathbf{x}_{,\alpha} = \sum_k \phi_{,\alpha}^k \bar{\mathbf{x}}^k + \frac{\xi_3}{2} \sum_k \phi_{,\alpha}^k h^k \mathbf{t}^k, \quad \alpha = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

$$\delta \mathbf{x}_{,\alpha} = \sum_k \phi_{,\alpha}^k \delta \bar{\mathbf{x}}^k + \frac{\xi_3}{2} \sum_k \phi_{,\alpha}^k h^k \delta \mathbf{t}^k \quad (12)$$

$$\mathbf{x}_{,3} = \frac{1}{2} \sum_k \phi^k h^k \mathbf{t}^k \quad (13)$$

$$\delta \mathbf{x}_{,3} = \frac{1}{2} \sum_k \phi^k h^k \delta \mathbf{t}^k \quad (14)$$

Introduciendo las ecuaciones (11) a (14) en la ecuación (10), llegamos:

$$\delta E_{ij} = \sum_k B_{ijl}^k \delta \bar{x}_l^k + \sum_k \tilde{B}_{ijl}^k \delta t_l^k, \quad i, j, l = 1, 2, 3 \quad (15)$$

con

$$B_{\alpha\beta l}^k = \frac{1}{2} x_{l,\alpha} \phi_{,\beta}^k = B_{\beta\alpha l}^k, \quad B_{3\beta l}^k = \frac{1}{2} x_{l,3} \phi_{,\beta}^k = B_{\beta 3 l}^k \quad (16)$$

$$\tilde{B}_{\alpha\beta l}^k = \xi_3 \frac{h^k}{4} x_{l,\alpha} \phi_{,\beta}^k = \tilde{B}_{\beta\alpha l}^k, \quad \tilde{B}_{3\beta l}^k = \frac{h^k}{4} (\xi_3 x_{l,3} \phi_{,\beta}^k + x_{l,\beta} \phi^k) = \tilde{B}_{\beta 3 l}^k \quad (17)$$

donde $\alpha, \beta = 1, 2, l = 1, 2, 3, k = 1, 2, \dots, N$ y no se suma en k . Vale recordar que el valor de δE_{33} no contribuye al trabajo virtual interno.

Como las deformaciones “directas” E_{ij} han de remplazarse por las “asumidas” \bar{E}_{ij} definidas por la ecuación (8) a fin de evitar el bloqueo por corte, debemos proceder de igual manera con sus variaciones. A partir de la la ecuación (8) las variaciones “asumidas” quedan definidas por

$$\delta \bar{E}_{ij} = \sum_k \underbrace{\sum_K \varphi_{ij}^K B_{ijl}^k |_K}_{\bar{B}_{ijl}^k} \delta \bar{x}_l^k + \sum_k \underbrace{\sum_K \varphi_{ij}^K \tilde{B}_{ijl}^k |_K}_{\tilde{\bar{B}}_{ijl}^k} \delta t_l^k \quad (\text{no se suma en } i, j) \quad (18)$$

donde $B_{ijl}^k |_K \equiv B_{ijl}^k(\xi_1^K, \xi_2^K, \xi_3)$ y $\tilde{B}_{ijl}^k |_K \equiv \tilde{B}_{ijl}^k(\xi_1^K, \xi_2^K, \xi_3)$.

3.1. Imposición de la restricción de inextensibilidad del vector director

Siguiendo a Simo et al. (1990), nos aseguramos satisfacer la restricción de inextensibilidad del vector director en los nodos, o sea $t^k \cdot \delta t^k = 0$, introduciendo la transformación ortogonal

$$t^k = \Lambda^k e^* \quad (19)$$

donde e^* es alguno de los versores de la base cartesiana global $\{e_i^G\}$ de referencia, fija. Luego, definimos $\delta \tau^k$ relacionado con δt^k por

$$\delta t^k = \Lambda^k \delta \tau^k \quad (\text{no se suma en } k) \quad (20)$$

Se verifica que $\delta \tau^k \cdot e^* = 0$, o sea que $\delta \tau^k$ yace en el plano normal a e^* . Así, si adoptamos por ejemplo $e^* \equiv e_3^G = [0 \ 0 \ 1]^T$, $\delta \tau^k$ puede descomponerse como

$$\delta \tau^k = \delta \tau_1^k e_1^G + \delta \tau_2^k e_2^G \quad (21)$$

Considerando a $\delta \tau^k$ como un vector de sólo dos componentes, la ecuación (22) debe reescribirse como

$$\delta t^k = \bar{\Lambda}^k \delta \tau^k \quad (\text{no se suma en } k) \quad (22)$$

con

$$\bar{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}^k & \Lambda_{12}^k \\ \Lambda_{21}^k & \Lambda_{22}^k \\ \Lambda_{31}^k & \Lambda_{32}^k \end{bmatrix} \quad (23)$$

Adoptemos $\delta \tau^k$ en lugar de δt^k , con lo que el número de grados de libertad nodales en la presente formulación se reduce a 5. Ahora, la ecuación (18) toma la forma

$$\delta \bar{E}_{ij} = \sum_k \bar{B}_{ijl}^k \delta \bar{x}_l^k + \sum_k \tilde{\bar{B}}_{ijm}^k \bar{\Lambda}_{l\alpha}^k \delta \tau_\alpha^k \quad (24)$$

3.2. Transformación de coordenadas covariantes a cartesianas globales

Sean E_{ij}^G las componentes E en el sistema cartesiano global $\{e_i^G\}$, relacionadas con las componentes covariantes E_{ij} por la ley de transformación (no ortogonal)

$$E_{ij}^G = Q_{pi} Q_{qj} E_{pq} \quad (25)$$

donde

$$Q_{ip} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{e}_p^G \quad (26)$$

La variación de E_{ij}^G puede escribirse ahora como

$$\delta \bar{E}_{ij}^G = B_{pql}^{G^k} \delta U_l^k \quad (27)$$

donde

$$B_{ijl}^{G^k} = Q_{pi} Q_{qj} \bar{B}_{pql}^k, \quad l = 1, 2, 3 \quad (28)$$

$$B_{ij(\alpha+3)}^{G^k} = Q_{pi} Q_{qj} \bar{B}_{pqr}^k \bar{\Lambda}_{r\alpha}^k, \quad \alpha = 1, 2 \quad (29)$$

$$\mathbf{U}^k = [\bar{x}_1^k \ \bar{x}_2^k \ \bar{x}_3^k \ T_1^k \ T_2^k]^T \quad (30)$$

3.3. Ecuación constitutiva

Siguiendo a [Bathe \(1996\)](#), aceptemos la hipótesis de tensión plana en el plano tangente a cada punto de la cáscara, es decir, aquél cuya normal está alineada con \mathbf{G}^3 . Definamos luego un sistema cartesiano “local” $\{e_i^L\}$ atado a la cáscara en cada punto, con uno de sus ejes normal al plano tangente a la cáscara en ese punto, por ejemplo:

$$\mathbf{e}_3^L = \frac{\mathbf{G}^3}{\|\mathbf{G}^3\|}, \quad \mathbf{e}_1^L = \frac{\mathbf{G}_1}{\|\mathbf{G}_1\|}, \quad \mathbf{e}_2^L = \mathbf{e}_3^L \times \mathbf{e}_1^L \quad (31)$$

Las componentes cartesianas globales E_{ij}^G y las cartesianas locales, digamos E_{ij}^L , de la deformación se relacionan por la ley de transformación ortogonal

$$E_{ij}^L = \beta_{ip} \beta_{jq} E_{pq}^G \quad (32)$$

con

$$\beta_{ip} = \mathbf{e}_i^G \cdot \mathbf{e}_p^L \quad (33)$$

Consideremos entonces un ejemplo simple de ley constitutiva, a saber, el sólido elástico isótropo de Kirchhoff-Saint Venant. Agrupadas las componentes cartesianas locales de deformación E_{ij}^L y de tensión \mathbf{S} , digamos S_{ij}^L , en sendos vectores siguiendo la notación de Voigt, la relación tensión-deformación para tal material puede escribirse como ([Bathe, 1996](#))

$$\begin{bmatrix} S_{11}^L \\ S_{22}^L \\ S_{33}^L \\ S_{12}^L \\ S_{23}^L \\ S_{13}^L \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11}^L \\ E_{22}^L \\ E_{33}^L \\ 2E_{12}^L \\ 2E_{23}^L \\ 2E_{13}^L \end{bmatrix} \quad (34)$$

donde E es el módulo de Young, ν el coeficiente de Poisson y κ una constante introducida para considerar la no-uniformidad de las tensiones de corte (usualmente, $\kappa \approx 5/6$). Nótese que se ha impuesto implícitamente que S_{33}^L sea nulo, y que todas las S_{ij}^L sean independientes de E_{33}^L .

Calculadas las componentes cartesianas locales de tensión $S_{ij}^L = S_{ji}^L$, quedan determinadas las componentes cartesianas globales por la ley de transformación ortogonal inversa de aquella definida por la ecuación (35), es decir

$$S_{ij}^G = \beta_{pi}\beta_{qj}S_{pq}^L \tag{35}$$

4. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EN MEF

En adelante nos referiremos siempre a componentes cartesianas globales, y obviaremos el supraíndice G para simplificar la notación. Con \mathbf{S} y \mathbf{E} referidos a coordenadas cartesianas globales, el trabajo virtual interno toma la forma

$$\delta W^{\text{int}} = \int_{B^0} S_{ij} \delta E_{ij} dV = \mathbf{F}^{\text{int}} \cdot \delta \mathbf{U} \tag{36}$$

donde \mathbf{U} denota el vector de incógnitas nodales:

$$\mathbf{U} = [\bar{x}_1^1 \quad \bar{x}_2^1 \quad \bar{x}_3^1 \quad \tau_1^1 \quad \tau_2^1 \mid \bar{x}_1^2 \quad \dots \mid \dots \quad \tau_2^N]^T \tag{37}$$

y \mathbf{F}^{int} el vector de cargas nodales:

$$\mathbf{F}^{\text{int}} = [F_1^1 \quad F_2^1 \quad F_3^1 \quad F_4^1 \quad F_5^1 \mid F_1^2 \quad \dots \mid \dots \quad F_5^N]^T \tag{38}$$

con sus componentes definidas como

$$F_l^k = \int_{B^0} B_{ijl}^k S_{ij} dV \tag{39}$$

Siguiendo la práctica usual en MEF, una vez discretizada la cáscara en su configuración indeformada B^0 en M elementos finitos B^{0e} , el vector de fuerzas internas sobre el dominio global B^0 se calcula ensamblando las contribuciones provenientes de todos los elementos finitos:

$$\mathbf{F}^{\text{int}} = \mathbf{A} \int_{B^0} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S} dV \tag{40}$$

con

$$\mathbf{B}^e = \begin{bmatrix} B_{111}^1 & B_{112}^1 & B_{113}^1 & B_{114}^1 & B_{115}^1 & B_{111}^2 & \dots & \dots & B_{115}^n \\ B_{221}^1 & B_{222}^1 & B_{223}^1 & B_{224}^1 & B_{225}^1 & B_{221}^2 & \dots & \dots & B_{225}^n \\ B_{331}^1 & B_{332}^1 & B_{333}^1 & B_{334}^1 & B_{335}^1 & B_{231}^2 & \dots & \dots & B_{335}^n \\ 2B_{121}^1 & 2B_{122}^1 & 2B_{123}^1 & 2B_{124}^1 & 2B_{125}^1 & 2B_{121}^2 & \dots & \dots & 2B_{125}^n \\ 2B_{231}^1 & 2B_{232}^1 & 2B_{233}^1 & 2B_{234}^1 & 2B_{235}^1 & 2B_{231}^2 & \dots & \dots & 2B_{235}^n \\ 2B_{131}^1 & 2B_{132}^1 & 2B_{133}^1 & 2B_{134}^1 & 2B_{135}^1 & 2B_{131}^2 & \dots & \dots & 2B_{135}^n \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$\mathbf{S} = [S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12} \quad S_{23} \quad S_{13}]^T \tag{42}$$

donde n es el número de nodos del elemento B^{0e} .

Además, siempre podremos escribir

$$\delta W^{\text{ext}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \delta \mathbf{U} \tag{43}$$

donde \mathbf{F}^{ext} es el vector de cargas externas nodales, dato que aquí supondremos independiente de \mathbf{U} .

Luego, el principio de los trabajos virtuales se reduce al sistema no lineal de ecuaciones algebraicas que define el equilibrio en MEF:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (44)$$

a resolver iterativamente.

4.1. Integración de las fuerzas internas

En cáscaras modeladas como sólidos degenerados, la integral involucrada en la ecuación (40) se calcula como

$$\int_{B^{0e}} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S} dV = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\int_{A^{0e}} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S} dS \right) dt \quad (45)$$

donde A^{0e} representa la superficie media del elemento B^{0e} . Aquí se debe prestar atención a que cada componente de deformación asumida requiere generalmente una interpolación particular. Para elementos MITC4 usaremos cuadratura de Gauss con 2×2 puntos en el plano $\xi_1 \xi_2$. Siguiendo a [Bucalem y Bathe \(1993\)](#), usaremos 3×3 y 4×4 puntos de Gauss en el plano $\xi_1 \xi_2$ para elementos MITC9 y MITC16, respectivamente. En todos los casos, se dispondrán tres puntos de Gauss para la integración numérica en el espesor.

4.2. Solución de la ecuación no lineal de equilibrio

La manera más eficiente de resolver el sistema de ecuaciones no lineales (44) es la técnica de Newton-Raphson, que garantiza tasa de convergencia cuadrática siempre que se parta de una predicción inicial que esté dentro del radio de convergencia de la solución buscada. Conocida la predicción \mathbf{U}^k , si $\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(i)})\| > \epsilon \|\mathbf{F}^{\text{ext}}\|$ donde ϵ es un valor muy pequeño prefijado (aquí adoptamos $\epsilon = 10^{-6}$), se determina una nueva predicción $\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)}$ resolviendo el sistema lineal

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(k+1)}) \approx \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(i)}) + \mathbf{K}^{(i)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{0} \quad (46)$$

donde \mathbf{K} designa la matriz tangente

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{U}} = \frac{d\mathbf{F}^{\text{int}}}{d\mathbf{U}} \quad (47)$$

El cálculo analítico de la matriz tangente queda fuera del alcance del presente trabajo.

4.3. Actualización del vector director nodal

Debe prestarse particular atención a la actualización del vector director nodal \mathbf{t}^k a fin de preservar su longitud unitaria. Procedemos aquí en la manera propuesta por [Simo et al. \(1990\)](#). Conocido para cada nodo el incremento $\Delta \boldsymbol{\tau}^{k(i)}$ como solución de la i -ésima iteración de Newton-Raphson, se procede de la siguiente manera:

1. Se calcula el incremento espacial de \mathbf{t}^k :

$$\Delta \mathbf{t}^{k(i)} = \bar{\mathbf{A}}^{k(i)} \Delta \boldsymbol{\tau}^{k(i)} \quad (48)$$

donde $\bar{\mathbf{A}}^{k(i)}$ es la matriz formada por las dos primeras columnas de la matriz de rotación $\mathbf{A}^{k(i)}$, cuyo valor inicial es

$$\mathbf{A}^{k(i)} = (\mathbf{e}_3^G \cdot \mathbf{T}^k) \mathbf{I} + \widehat{\mathbf{e}_3^G \times \mathbf{T}^k} + \frac{(\mathbf{e}_3^G \times \mathbf{T}^k) \otimes (\mathbf{e}_3^G \times \mathbf{T}^k)}{1 + \mathbf{e}_3^G \cdot \mathbf{T}^k} \quad (49)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de 3×3 , y $\widehat{\mathbf{v}}$, para todo vector \mathbf{v} , es la matriz antisimétrica cuyo vector axial es \mathbf{v} .

2. Se actualiza el vector director:

$$\mathbf{t}^{k(i+1)} = \cos \|\Delta \mathbf{t}^{k(i)}\| \mathbf{t}^{k(i)} + \frac{\sin \|\Delta \mathbf{t}^{k(i)}\|}{\|\Delta \mathbf{t}^{k(i)}\|} \Delta \mathbf{t}^{k(i)} \quad (50)$$

3. Se calcula el incremento de la matriz de rotación:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}^{k(i)} = & \cos \|\Delta \mathbf{t}^{k(i)}\| \mathbf{I} + \frac{\sin \|\Delta \mathbf{t}^{k(i)}\|}{\|\Delta \mathbf{t}^{k(i)}\|} \widehat{\mathbf{t}^{k(i)} \times \Delta \mathbf{t}^{k(i)}} \\ & + \frac{1 - \cos \|\Delta \mathbf{t}^{k(i)}\|}{\|\Delta \mathbf{t}^{k(i)}\|^2} (\mathbf{t}^{k(i)} \times \Delta \mathbf{t}^{k(i)}) \otimes (\mathbf{t}^{k(i)} \times \Delta \mathbf{t}^{k(i)}) \quad (51) \end{aligned}$$

4. Se actualiza la matriz de rotación:

$$\mathbf{A}^{k(i+1)} = \Delta \mathbf{A}^{k(i)} \mathbf{A}^{k(i)} \quad (52)$$

Ahora, el valor de $\mathbf{t}^{k(i+1)}$ así calculado será el que se usará para el cálculo de las fuerzas inetrnas en la nueva iteración $i + 1$.

5. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Sea la losa en voladizo de la Figura 2, donde $L_x = 0,9$ m, $L_y = 2$ m, $h = 0,06$ m, $q = 3$ MN/ L_x , $E = 210$ GPa y $\nu = 0,25$.

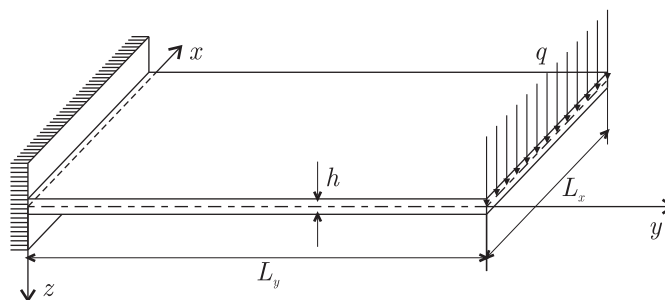


Figura 2: Losa en voladizo: geometría y cargas.

Se determina su deflexión usando elementos finitos de cáscara MITC4, MITC9 y MITC16, y hexaedros trilineales Q1. La Figura 3 muestra la deformada calculada usada elementos MITC4 de 1 cm de lado, que será adoptada como solución de referencia.

Sea $u_{\max} = 1,38735 \dots$ m el valor de referencia del módulo del desplazamiento máximo, correspondiente al extremo cargado, y u_{\max}^{num} el valor estimado usando alguna de los métodos numéricos mencionados. Luego, se define el error numérico como

$$\text{error} = \frac{|u_{\max}^{\text{num}} - u_{\max}|}{u_{\max}} \quad (53)$$

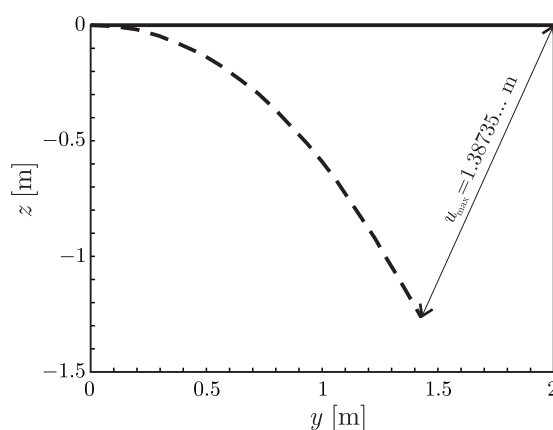


Figura 3: Losa en voladizo: deformada de referencia (calculada usando elementos MITC4 de 1 cm de lado).

Este error es graficado en la Figura 4. En todos los casos, se han usado mallas rectangulares con elementos de aproximadamente igual dimensión en cada dirección coordenada. La figura evidencia que todas las formulaciones presentan tasas de convergencia muy próximas.

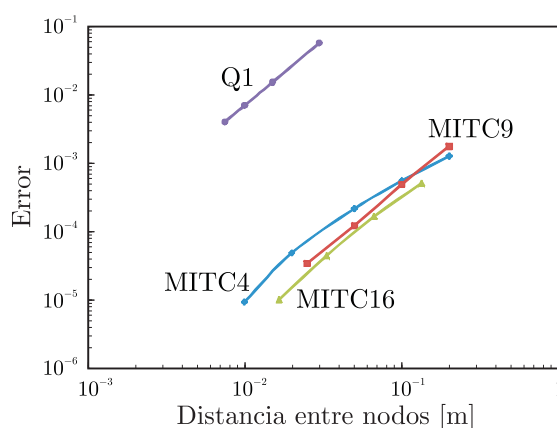


Figura 4: Losa en voladizo: error en el desplazamiento del extremo en función del refinamiento de la malla.

6. CONCLUSIONES

Basados en las presentes observaciones sobre la losa en voladizo, y sin intención de extender las conclusiones a problemas con otras geometrías, fijaciones y estados de sollicitación, cabe resaltar que MITC4 proporciona la solución más eficiente en términos de precisión y costo computacional.

Entre los puntos más importantes que restan estudiar se encuentra la influencia de la distorsión de cada tipo de elemento, tanto dentro como fuera de su plano, en su tasa de convergencia.

Nuestro objetivo final al formular estos elementos finitos de cáscara es el desarrollo de sus respectivos elementos “inversos”. Con los elementos finitos inversos, se trata de determinar la configuración indeformada de una pieza para que, tras grandes deformaciones en el rango elástico bajo la acción de cargas conocidas, adquiera una forma deseada. Así, enriqueceríamos nuestra librería de elementos finitos inversos para el diseño de piezas sujetas a grandes deformaciones elásticas, que cuenta ya con elementos para problemas en sólidos tridimensionales (Fachinotti et al., 2008) y vigas (Albanesi et al., 2010).

REFERENCIAS

- Albanesi A.E., Fachinotti V.D., y Cardona A. Inverse finite element method for large-displacement beams. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 84:1166–1182, 2010.
- Areias P.M.A., Song J.H., y Belytschko T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff-Love constraints. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 64:1166–1206, 2005.
- Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Inc., 1996.
- Bathe K.J. y Dvorkin E.N. A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 22:697–722, 1986.
- Bischoff M. y Ramm E. Shear deformable shell elements for large strains and rotations. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 40:4427–4449, 1997.
- Bucalem M.L. y Bathe K.J. Higher-order MITC general shells elements. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 36:3729–3754, 1993.
- Dvorkin E.N., Pantuso D., y Repetto E.A. A formulation of the MITC4 shell element for finite strain elasto-plastic analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 125:17–40, 1995.
- Fachinotti V.D., Cardona A., y Jetteur P. A finite element model for inverse design problems in large deformations anisotropic hyperelasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 74:894–910, 2008.
- Simo J.C., Fox D.D., y Rifai M.S. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects on the nonlinear theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 79:21–70, 1990.