

## VIBRACIONES EN PLACAS ORTÓTROPAS CON CARGAS EN SU PLANO Y CARGA CRÍTICA

Diana V. Bambill<sup>a,b</sup>, Carlos A. Rossit<sup>a,b</sup> y Daniel H. Felix<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur (UNS), Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina, <http://www.conicet.gov.ar>*

*[dbambill@criba.edu.ar](mailto:dbambill@criba.edu.ar), [dbambill@uns.edu.ar](mailto:dbambill@uns.edu.ar), [carossit@criba.edu.ar](mailto:carossit@criba.edu.ar), [dhfelix@uns.edu.ar](mailto:dhfelix@uns.edu.ar)*

**Palabras clave.** Vibraciones, Placa ortótropa, Corte, Método de Ritz, Frecuencias naturales, Cargas críticas.

**Resumen.** En este trabajo se presenta el método de Ritz para estudiar el comportamiento dinámico de placas rectangulares ortótropas sometidas a cargas en su plano. El trabajo centra su objetivo en el las formas modales de placas de distintas relaciones de lados, al aplicar cargas normales y de corte, pues se considera un tema de interés fundamental para el diseño de tales elementos, que entran en la categoría de las estructuras de paredes delgadas. Se utilizan funciones viga con las mismas condiciones de borde que la placa como funciones coordenadas. La utilización de materiales con ortotropía es importante para producir refuerzos y a la vez reducir el peso de las estructuras y por ende su costo. También se determina el valor de la carga en el plano para el cual la forma plana de equilibrio deja de ser única y estable, cuando la placa se inestabiliza. Esos valores de carga son los valores críticos. Algunos de los valores obtenidos se comparan con valores disponibles en la literatura técnico científica.

## 1 INTRODUCCION

Son conocidas las soluciones exactas del problema de la placa rectangular vibrante con cargas en el plano, cuando tiene dos bordes opuestos simplemente apoyados. Leissa y Kang (2001, 2002), Xiang y Wang (2002) y Xiang y Wei (2004).

También hay resultados de soluciones aproximadas como las presentadas en el trabajo de Grimm y Gerdeen, (1975), Bassily y Dickinson, (1972), Dickinson (1978), Diez et al.(1978), solo por citar algunas. En la actualidad, Singhatanadgid y Sukajit, (2011) presentaron una técnica para identificar las cargas críticas de placas rectangulares delgadas basada en el correlato que existe entre las vibraciones naturales y las cargas aplicadas en su plano medio. Otros autores, como Nallim et al. (2005); Grossi, et al., (1999) también han estudiado el comportamiento de placas ortótropas y anisótropas con distintas características.

En este estudio, continuación de un trabajo previo, Felix et al., (2011), se presentan formas modales de placas rectangulares empotradas con cargas en el plano, de materiales ortótopos y distintas relaciones de lados.

## 2 SOLUCIÓN ANALÍTICA

En el presente estudio se determinan las frecuencias naturales de vibración transversal de placas ortótropas sometidas a la acción de fuerzas aplicadas en los bordes que actúan en su plano medio. Asimismo, se obtienen las correspondientes formas modales, lo que resulta de interés desde el punto de vista del control de vibraciones.

Dentro de los problemas de estabilidad de las placas ortótropas de interés práctico son conocidas las soluciones de los casos de cargas normales distribuidas uniformemente en placas con dos bordes opuestos simplemente apoyados y cualquier otra condición de borde en los otros dos. Otros no han sido aún estudiados en detalle para obtener resultados que puedan presentarse en forma numérica.

En particular, al generarse esfuerzos de compresión, es importante encontrar el valor de la carga en el plano para el cual la forma plana de equilibrio deja de ser única y estable (la placa se inestabiliza). Esos valores de carga son los valores críticos y dependen de muchos factores como por ejemplo la ortotropía del material de la placa, las dimensiones de la placa, el tipo de carga aplicada (normal, tangencial, constante variable).

El problema elegido se resuelve por el método de Ritz.

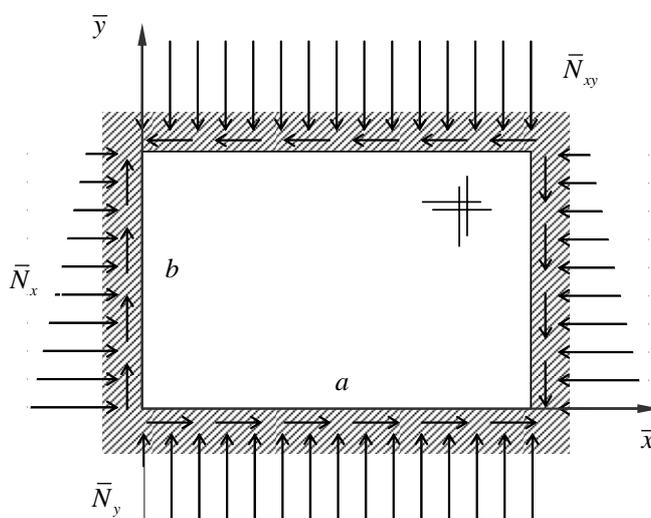


Figura 1: Placa rectangular ortótropa con cargas en el plano

La funcional que gobierna el problema de placas rectangulares ortótropas vibrantes con cargas en el plano (Lekhnitskii, 1968; Dickinson, 1978; Felix, 2004) es:

$$\begin{aligned}
 J[W] = & \frac{1}{2} \left[ \frac{b}{a^3} \int_{A_n} D_1 N_x \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx dy + \frac{1}{ab} \int_{A_n} D_1 N_y \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 dx dy \right. \\
 & \left. + \frac{2}{a^2} \int_{A_n} D_1 N_{xy} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} dx dy \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \frac{b}{a^3} \int_{A_n} D_1 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dx dy + \frac{2\nu_2}{ab} \int_{A_n} D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dx dy \right. \\
 & \left. + \frac{a}{b^3} \int_{A_n} D_2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 dx dy + \frac{4}{ab} \int_{A_n} D_k \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \right] \\
 & - \frac{1}{2} \rho a b \omega^2 \int_{A_n} h W^2 dx dy
 \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $W$  es el desplazamiento transversal medio de la placa y  $A_n = a \times b$  es el área de la placa en el plano  $\bar{x} - \bar{y}$ .

La placa con cargas en el plano se muestra en la Figura 1.  $\bar{N}_x$  y  $\bar{N}_y$  son cargas normales por unidad de longitud en los planos  $\bar{x}$  - e  $\bar{y}$  - respectivamente y  $\bar{N}_{xy}$  es la carga tangente por unidad de longitud en el plano  $\bar{x}$  - y paralela al eje  $\bar{y}$ .

Las rigideces de la placa son  $D_1$  y  $D_2$  a flexión, en tanto  $D_k$  es la rigidez torsional

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)} \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)} \quad D_k = \frac{G_{12} h^3}{12} \quad (2.a-c)$$

$E_1$  y  $E_2$  son los módulos de Young en las direcciones principales elásticas de ortotropía,  $\nu_1$  y  $\nu_2$  los coeficientes de Poisson en dichas direcciones y  $G$  el módulo de distorsión, la densidad del material se indica con  $\rho$  y  $h$  es el espesor de la placa. La relación siguiente entre módulos de Young y coeficientes de Poisson se cumple debido a la simetría elástica de los materiales ortótropos:

$$\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1 \quad (3)$$

.Se definen coordenadas espaciales adimensionales paralelas a los lados de la placa

$$x = \frac{\bar{x}}{a} \quad ; \quad y = \frac{\bar{y}}{b} \quad (4a, b)$$

Las cargas están distribuidas en los bordes de la placa y se considera que actúan en su plano medio. Las cargas perpendiculares a los bordes, se identifican con el subíndice de la dirección del eje al que son paralelas y se refieren a la dimensión  $b^2$  y a la rigidez a flexión en la dirección ortótropa 1. Se suponen positivas cuando son de compresión y se adopta como sentido positivo de la carga tangente el indicado en la Figura 1. La forma adimensional de los esfuerzos en el plano surge al multiplicar los mismos por la relación  $b^2/D_1$ , se tiene así:

$$N_x = \frac{\bar{N}_x b^2}{D_1} ; N_y = \frac{\bar{N}_y b^2}{D_1} \quad (5a.b)$$

$$N_{xy} = \frac{\bar{N}_{xy} b^2}{D_1} \quad (5c)$$

La expresión  $W$  se aproxima como:

$$W \cong W_a(x, y) = \sum_{q=1}^Q \sum_{l=1}^L A_{ql} X_q(x) Y_l(y), \quad (6)$$

donde los  $A_{ql}$  son coeficientes indeterminados y las  $X_q(x)$  e  $Y_l(y)$  son funciones seleccionadas que satisfacen las condiciones de contorno en los bordes de la placa ( $\bar{x} = 0; \bar{x} = a; \bar{y} = 0; \bar{y} = b$ ). En este caso, se eligen como funciones coordenadas a las denominadas funciones viga que son las formas modales de vibración de una viga con condiciones de borde equivalentes a las de los bordes enfrentados de la placa. Felgar, (1951).

Se adoptaron para  $X_m(x)$  e  $Y_n(y)$ , funciones viga que dependen de las condiciones de borde geométricas de la placa. Las funciones-viga que corresponden a las condiciones de dos bordes enfrentados Empotrado – Empotrado, EE, son:

$$X_q(x) = \cosh(k_q x) - \cos(k_q x) + r_q [\sin(k_q x) - \sinh(k_q x)]; \quad (7a)$$

$$Y_l(y) = \cosh(k_l y) - \cos(k_l y) + r_l [\sin(k_l y) - \sinh(k_l y)] \quad (7b)$$

donde

$$r_q = \frac{\cos(k_q) - \cosh(k_q)}{\sin(k_q) - \sinh(k_q)} ; r_l = \frac{\cos(k_l) - \cosh(k_l)}{\sin(k_l) - \sinh(k_l)}, \quad (7c)$$

y cuyas raíces se obtienen de resolver la ecuación característica

$$\cos(k) \cosh(k) = 1. \quad (8)$$

y a la condición de borde Empotrado - Libre, EL, le corresponden:

$$X_m(x) = \cosh(k_m x) - \cos(k_m x) - r_m [\sinh(k_m x) - \sin(k_m x)] \quad (9a)$$

$$Y_n(y) = \cosh(k_n y) - \cos(k_n y) - r_n [\sinh(k_n y) - \sin(k_n y)] \quad (9b)$$

con

$$r_m = \frac{\cosh(k_m) + \cos(k_m)}{\sinh(k_m) + \sin(k_m)} ; r_n = \frac{\cosh(k_n) + \cos(k_n)}{\sinh(k_n) + \sin(k_n)} \quad (9c)$$

Los correspondientes autovalores se obtienen resolviendo la ecuación característica

$$\cos(k) \cosh(k) = -1 \quad (10)$$

La solución del problema se encuentra utilizando el método de Ritz. Sustituyendo la expresión (6) en la (1) e integrando se produce una expresión  $J[W_a]$  in la forma de una función homogénea cuadrática en los coeficientes indeterminados  $A_{ql}$ . Para encontrar el mínimo de la función  $J[W_a]$  se la deriva con respecto a los  $A_{ql}$  y se los iguala a cero.

$$\frac{\partial J[W_a]}{\partial A_{11}} = 0; \frac{\partial J[W_a]}{\partial A_{12}} = 0, \dots, \frac{\partial J[W_a]}{\partial A_{21}} = 0, \dots \quad (11)$$

El sistema homogéneo de ecuaciones (11) se expresa adimensionalmente como

$$\frac{a b}{D_1} \frac{\partial J[W_a]}{\partial A_{ql}} = 0, \text{ con } q = 1, 2, \dots, Q; l = 1, 2, \dots, L, \quad (12)$$

Asumiendo que el determinante del sistema homogéneo es cero es posible determinar las raíces,  $\Omega_i$

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} a^2 \omega_i \quad (13)$$

que son las frecuencias naturales del sistema para cada grupo de valores de las cargas  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$ .

El problema de la inestabilidad de la placa es tratado de la misma forma, pues al igualar a cero la expresión de frecuencia obtenida con el método de Ritz, la menor raíz obtenida de esa ecuación es el valor de la carga crítica, expresado como:

$$N_{crit} = \frac{\bar{N}_{crit} b^2}{D_1} \quad (14)$$

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

En el trabajo se consideran algunos casos de inestabilidad de placas, que comprenden cargas en dirección normal a los bordes, distribuidas uniformemente o de acuerdo a una ley lineal, así como también fuerzas tangenciales uniformemente distribuidas. Ver [Figura 1](#).

$$N_x(y) = \frac{\bar{N}_1 b^2}{D_1} (1 - c y) = N_1 (1 - c y) \quad (15a)$$

$$N_y(x) = \frac{\bar{N}_2 b^2}{D_1} (1 - d x) = N_2 (1 - d x) \quad (15b)$$

$$N_{xy} = \frac{\bar{N}_3 b^2}{D_1} = N_3 \quad (15c)$$

donde

$$c; d; N_1 = \bar{N}_1 b^2 / D_1; N_2 = \bar{N}_2 b^2 / D_1; N_3 = \bar{N}_3 b^2 / D_1$$

son constantes.

En la [Figura 2](#) se muestran las cargas normales  $N_x$ .

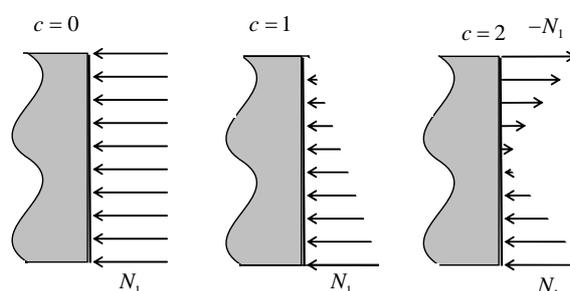
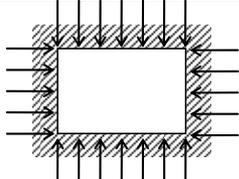
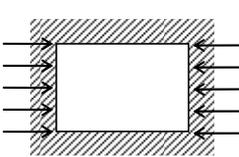
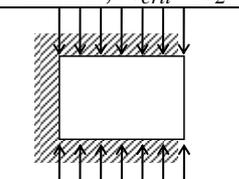
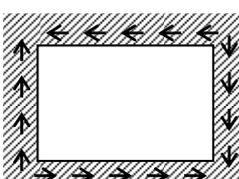


Figura 2: Cargas normales distribuidas de acuerdo a una ley lineal

Los valores obtenidos por el método de Ritz con la aproximación propuesta, utilizando 225 términos. (15 funciones viga en cada dirección coordenada).

En la Tabla 1 se presenta una comparación de valores de carga crítica para diferentes casos de carga y relaciones de lados en el caso de una placa isótropa. Se observa la buena concordancia de valores de la carga crítica calculados en este trabajo y los disponibles en la literatura ([Dickinson, 1978](#); [Grimm y Gerdeen, 1975](#); [Levy, 194](#) y [Bassily y Dickinson, 1972](#)) para placas empotradas en todos los bordes EEEE y empotradas en tres bordes y libre en el cuarto EELE. Ver figura en la Tabla 1.

Para el cálculo de los valores presentados se utilizaron 15 funciones viga en cada dirección coordenada, pues se corroboró que un mayor número de funciones no producía cambios significativos en ninguno de los valores calculados.

Condiciones de borde y cargas	$\frac{a}{b}$	$N_{crit} = \frac{\bar{N}_{crit} b^2}{D_1}$	$N_{crit} = \frac{\bar{N}_{crit} b^2}{\pi^2 H}$	$N_{crit} = \frac{\bar{N}_{crit} b^2}{\pi^2 H}$	$N_{crit} = \frac{\bar{N}_{crit} b^2}{\pi^2 H}$
		Presente estudio	(Dickinson, 1978) (Grimm y Gerdeen, 1975)		
EEEE, $N_{crit}=N_1=N_2$					
	1	51.585	5.39088	5.37	5.314
EEEE, $N_{crit}=N_1$					(Levy, 1942)
	3/4	115.129	11.665	12.14	11.7
	1	99.4268	10.074	10.74	10.1
	3/2	82.4181	8.3507	8.71	8.3
	3	72.6373	7.3597	7.78	7.4
EELE, $N_{crit}=N_2$					(c)
	1	45.363	4.59623	4.83	4.7
	1/2	19.0548	7.72264	8.17	8.0
	1/3	16.6651	15.1968	16.06	15.8
			$N_{crit} = \frac{\bar{N}_{crit} b^2}{D_1}$		
		Presente estudio	(Bassily y Dickinson, 1972)		
EEEE, $N_{crit}=N_3$				Cota inferior	Cota superior
	1	144.515	144.716	144.5	146.0
	3/2	113.091	113.216	113.0	114.1
	2	101.148	101.276	-	102.3
	3	94.1055	94.364	-	95.4

Material isótropo  $\nu = 0.30$ ;  $D_1/H = D_2/H = 1$ ; ( $H = \nu_1 D_2 + 2D_k$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ )

Tabla 1: Comparación de valores de carga crítica

En las Tablas siguientes se presentan las cargas críticas de placas rectangulares ortótropas, empotradas en los cuatro bordes, con distintos estados de carga y diferentes relaciones de lado. Para todas las relaciones se determinaron los coeficientes de las primeras diez frecuencias naturales y las formas modales correspondientes, para el caso particular de una carga de la mitad del valor de la carga crítica,  $\xi = 0.5$ . El material ortótropo se caracteriza por:  $D_2/D_1 = 0.5$ ,  $D_k/D_1 = 0.5$ ,  $\nu_2 = 0.30$ .

En la Tabla 2 se presenta el primer caso, que corresponde a cargas normales constantes de compresión en todos los bordes:  $N_x = N_y = N$ ;  $N_{xy} = 0$ . La carga que inestabiliza la placa es

$N = N_{crit}$ . Para  $\xi=0.5$  y  $N=\xi N_{crit}$  los coeficientes de frecuencia natural y las formas modales se indican para las relaciones de lado  $\lambda= a/b$  0.4 ;0.5; 0.6; 0.7; 1; 1.5; 2; 2.5; 3 y 4.

$\lambda=a/b$				
0.4	0.5	0.6	0.8	1
$N_{crit}$				
244.36067	157.114	110.4439	65.561	46.122
$\Omega_i$ para $\xi=0.5$				
16.9603	17.5921	18.4157	20.7043	23.9357
19.9414	22.7144	26.3786	36.3781	49.7761
25.2702	31.7188	40.0234	60.4643	64.0725
33.0875	44.6164	57.6026	61.9457	90.5932
43.3828	56.4531	59.1657	79.9405	94.3247
55.4994	61.2922	68.5528	96.9139	123.287
56.1066	64.0276	83.6198	108.833	138.492
60.3132	75.7888	85.2530	119.598	145.772
67.9341	81.6539	106.937	140.930	156.423
71.2049	91.1767	113.278	141.065	195.854

Tabla 2: Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE.  $N_x = N_y = N; N_{xy} = 0$

Las formas modales están ordenadas de a pares y la secuencia corresponde a:

- $\Omega_1$   $\Omega_2$
- $\Omega_3$   $\Omega_4$
- ...
- $\Omega_9$   $\Omega_{10}$

$\lambda=a/b$	
1.5	2
$N_{crit}$	
29.1579	24.304
$\Omega_i$ para $\xi=0.5$	
36.4236	55.1586
76.5829	94.5649
97.1389	153.621
135.816	163.654
143.023	210.007
190.416	232.187
208.140	277.838
214.584	329.631
239.351	330.744
291.189	364.076

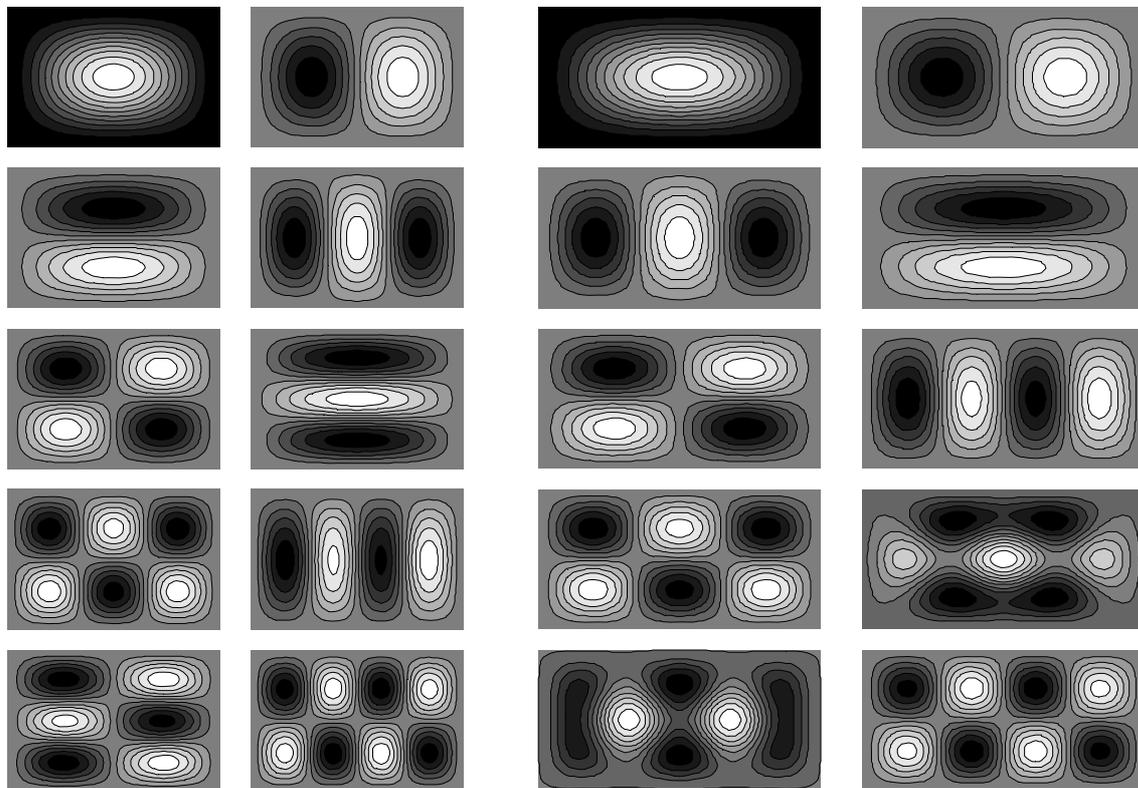


Tabla 2(Cont.): Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE.  
 $N_x = N_y = N; N_{xy} = 0$

Puede observarse que para las relaciones de lados donde  $a \leq b$  ( $\lambda$  de 0.4 a 1) las dos primeras formas modales son similares, a diferencia de las formas modales de los modos superiores, con mayor cantidad de ondas, que son más sensibles al cambio de la relación  $\lambda$ , e intercambian formas entre las frecuencias.

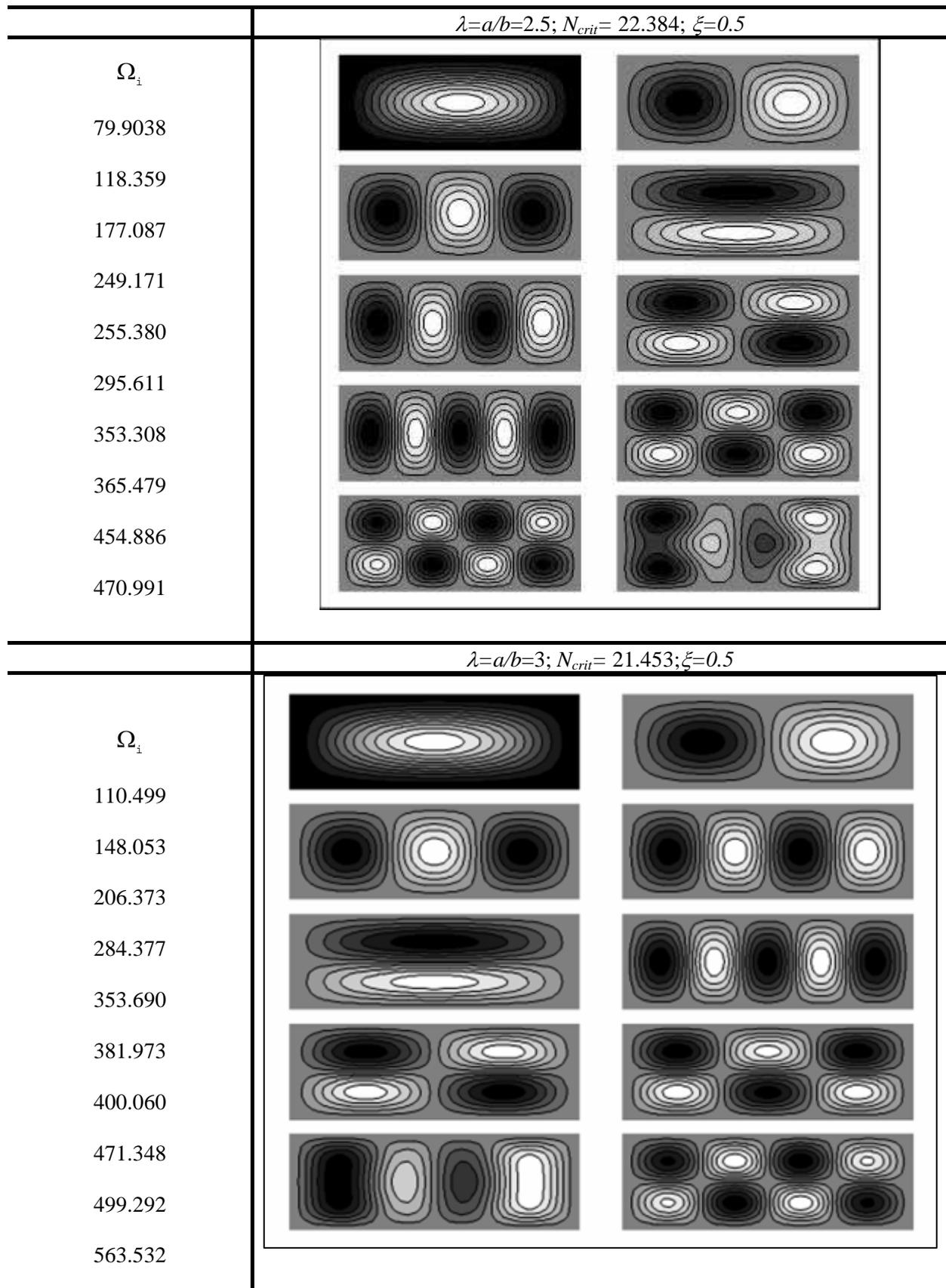


Tabla 2 (Cont.): Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE.  
 $N_x = N_y = N; N_{xy} = 0$

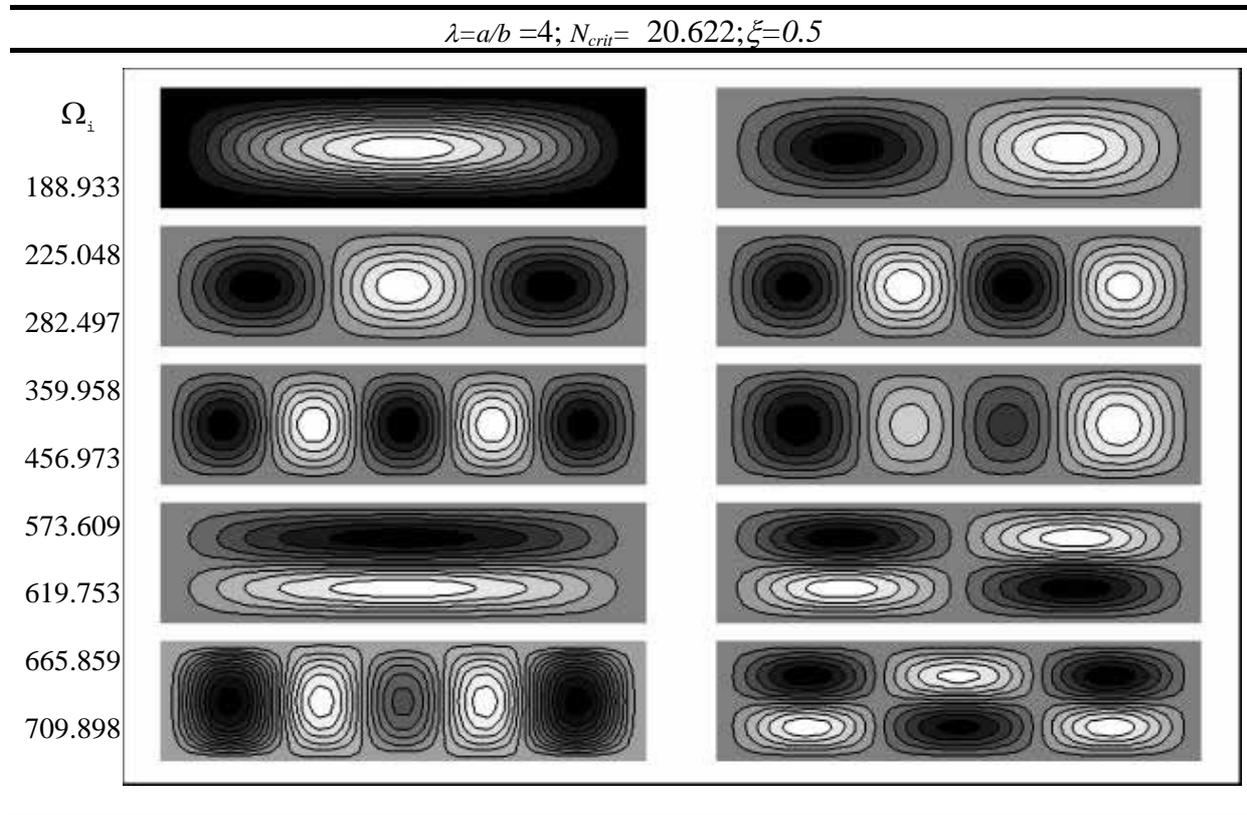


Tabla 2 (Cont.): Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE.  
 $N_x = N_y = N; N_{xy} = 0$

También puede observarse que para las relaciones de lados donde  $a > b$  ( $\lambda$  de 2 a 4) donde la carga  $N_y$  de compresión actúa sobre el lado más corto, las formas modales de los modos superiores, intercambian sus formas.

La Tabla 3 presenta el caso de placas empotradas cargadas con fuerzas de compresión tal como se indica en la [Figura 3](#)

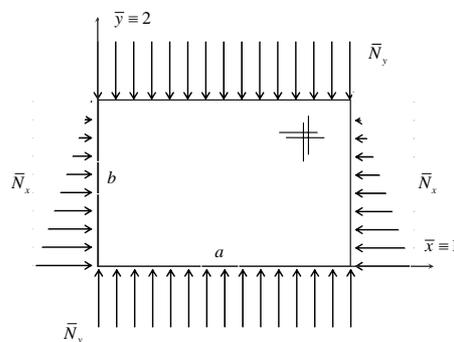


Figura 3: Cargas normales constantes y distribuidas de acuerdo a una ley lineal ( $c=1$ )

$\lambda=a/b$				
0.4	0.5	0.6	0.8	1
$N_{crit}$				
301.578	200.370	144.079	87.895	59.982
$\Omega_i$ para $\xi=0.5$				
18.7219	19.2104	19.7745	21.3292	24.1790
21.5784	23.4036	26.1522	34.5960	47.4612
25.7413	30.9862	38.3256	58.8547	66.2376
32.5614	42.9206	56.6182	62.5093	87.2423
42.1479	58.8175	59.8699	80.6908	94.6418
54.3864	58.9977	70.2318	93.1871	126.078
57.9284	66.2015	80.5839	108.227	137.332
63.0086	77.1193	85.8914	122.061	141.948
69.1510	78.9809	106.668	136.992	158.019
70.0099	91.7082	109.944	142.696	193.714

Tabla 3: Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,  $N_x = N(1 - y)$ ;  $N_y = N$ ;  $N_{xy} = 0$ .

La presencia de una carga triangular según  $x$ ,  $c = 1$ , modifica las formas modales en las placas donde la relación de lados  $\lambda < 1$ , ( $a < b$ ), y la tendencia se acentúa cuando  $c = 2$  (carga de tracción en los bordes paralelos al eje  $y$ , para valores:  $b/2 \leq \bar{y} \leq b$ . Ver Figura 2).

Las formas modales de la placa cuadrada no cambian significativamente con el valor  $c$  de la carga  $N_x$ .

En general, a medida que  $\lambda$  crece y es superior a 1, se observan cambios en las formas modales de las frecuencias superiores.

$\lambda=a/b$	
1.5	2
$N_{crit}$	
34.070	26.750
$\Omega_i$ para $\xi=0.5$	
36.5133	55.2239
79.5872	98.4127
94.9339	159.711
140.132	161.596
143.157	210.122
187.547	239.596
210.008	280.033
219.582	327.322
238.016	338.680
294.253	367.961

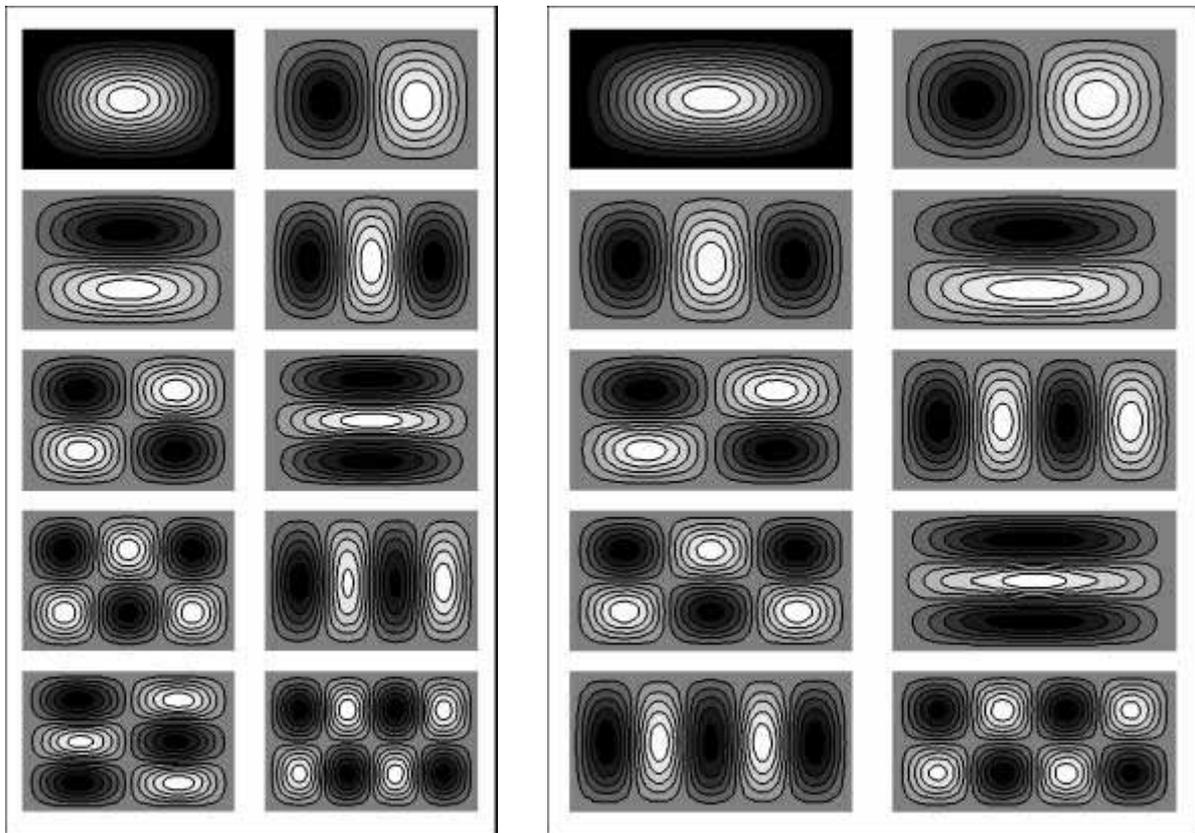


Tabla 3 (Cont.): Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,  
 $N_x = N(1 - y)$ ;  $N_y = N$ ;  $N_{xy} = 0$ .

$\lambda=a/b$ 2.5 $N_{crit}=23.849$ ; $\xi=0.5$		
$\Omega_i$		
79.9632		
122.906		
184.943		
247.197		
265.416		
295.737		
364.782		
367.953		
459.506		
483.447		
$\lambda=a/b=3$ ; $N_{crit}=22.431$ ; $\xi=0.5$		
$\Omega_i$		
110.557		
153.132		
215.821		
297.030		
351.773		
396.888		
400.203		
474.038		
515.815		
568.766		

Tabla 3 (Cont.): Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,  $N_x = N(1 - \gamma)$ ;  $N_y = N$ ;  $N_{xy} = 0$ .

$\lambda=a/b =4; N_{crit}= 21.147; \xi=0.5$

$\Omega_i$	Modal shapes	
188.995		
230.801		
294.436		
377.279		
478.594		
598.573		
617.909		
666.038		
737.427		
741.760		

Tabla 3: Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,  $N_x = N(1 - y)$ ;  $N_y = N$ ;  $N_{xy} = 0$ . (cont.)

La Tabla 4 se refiere a las relaciones de carga normal indicadas en la [Figura 4](#)

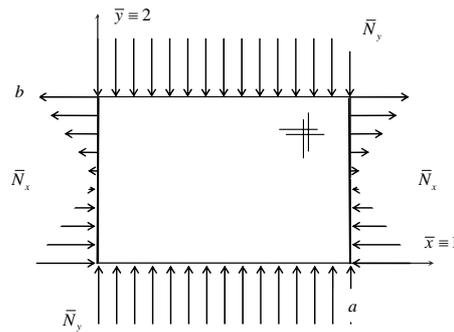


Figura 4: Cargas normales distribuidas de acuerdo a una ley lineal

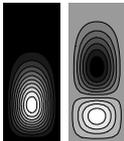
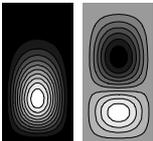
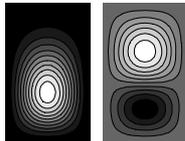
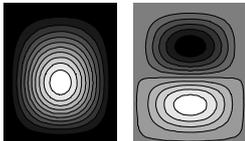
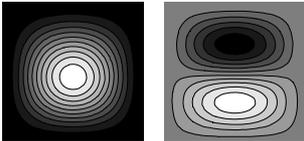
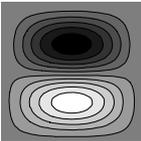
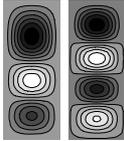
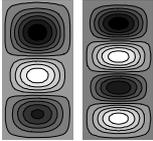
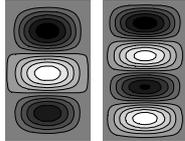
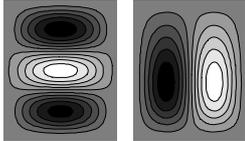
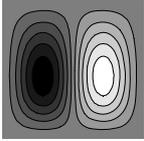
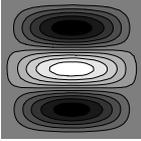
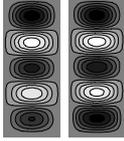
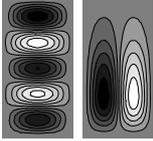
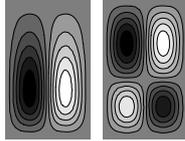
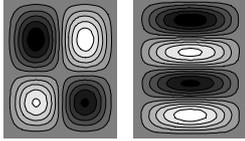
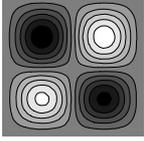
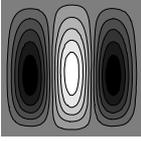
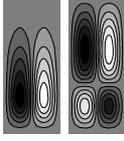
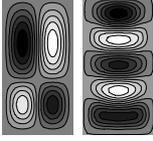
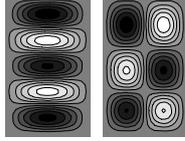
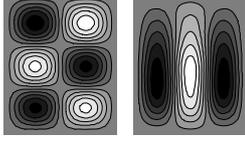
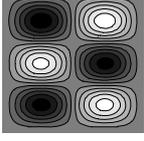
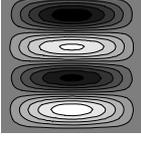
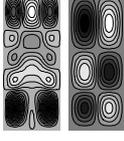
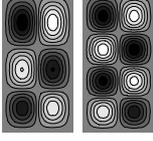
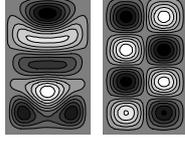
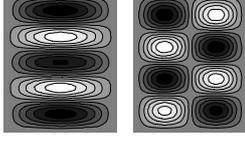
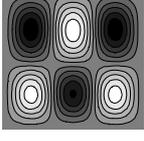
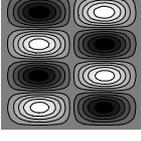
$\lambda=a/b$					
0.4	0.5	0.6	0.8	1	
$N_{crit}$					
343.711	232.061	169.394	104.243	74.328	
$\Omega_i$ para $\xi=0.5$					
20.5103	21.3448	22.1435	23.7911	25.7995	
24.4315	25.9603	27.9706	34.8733	45.7977	
27.9392	32.0248	38.2861	57.3952	70.2579	
33.5105	42.6926	55.442	66.6029	84.0727	
42.1813	57.9914	63.5054	83.8412	96.6057	
53.8012	62.1032	74.1183	90.9111	130.999	
60.7257	70.3947	78.7747	109.676	137.214	
67.303	77.4941	88.4997	126.759	138.137	
68.1465	80.3699	107.761	134.298	161.802	
73.8499	93.9573	108.131	144.763	192.227	
					
					
					
					
					

Tabla 4: Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,

$$N_x = N(1 - 2y); N_y = N; N_{xy} = 0.$$

$\lambda=a/b$	
1.5	2
$N_{crit}$	
40.379	29.601
$\Omega_i$ para $\xi=0.5$	
36.8093	55.383
83.6004	102.905
92.1147	159.194
143.597	166.784
145.857	210.390
183.844	248.229
212.801	282.807
226.222	324.299
236.453	348.295
298.674	372.762

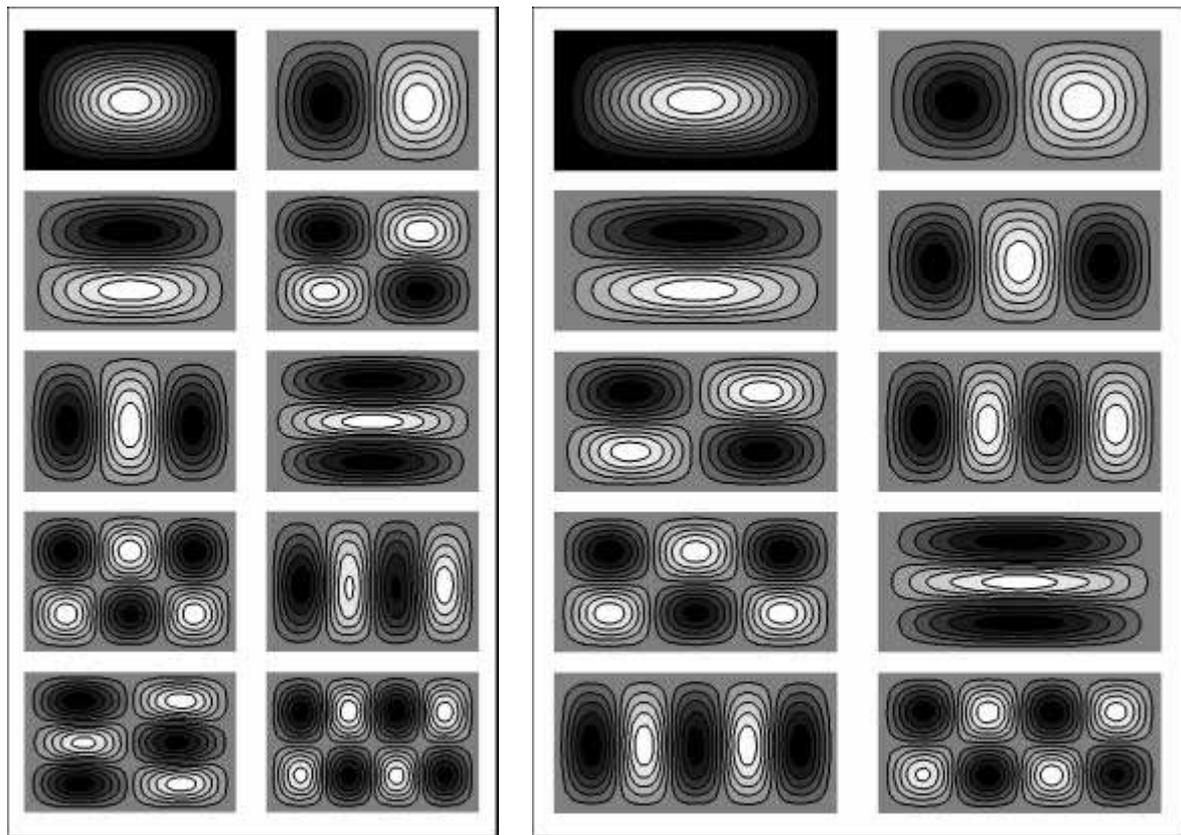


Tabla 4 (Cont.): Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,  
 $N_x = N(1 - 2\gamma)$ ;  $N_y = N$ ;  $N_{xy} = 0$ .

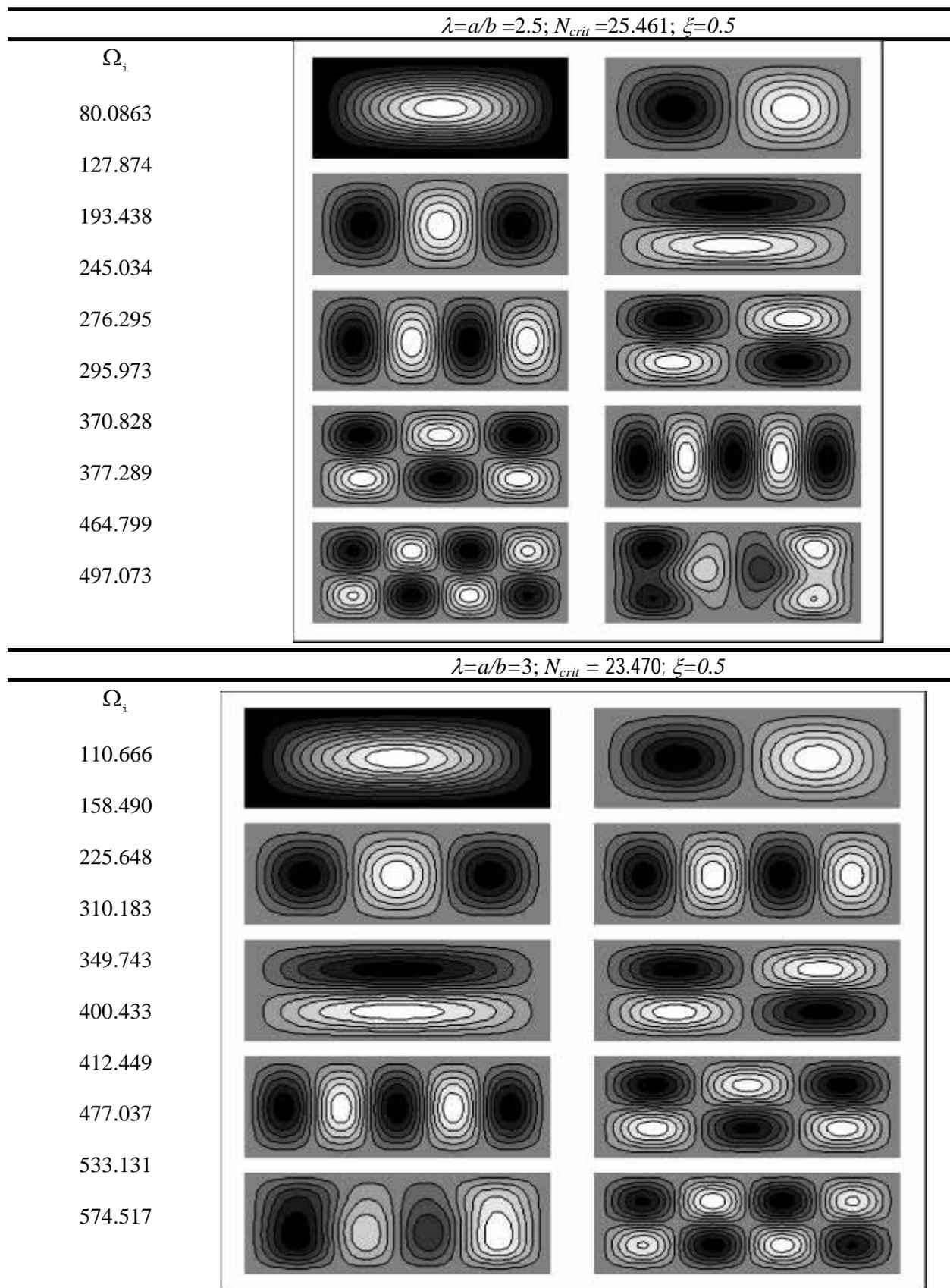


Tabla 4 (Cont.): Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,  
 $N_x = N(1-2y); N_y = N; N_{xy} = 0$

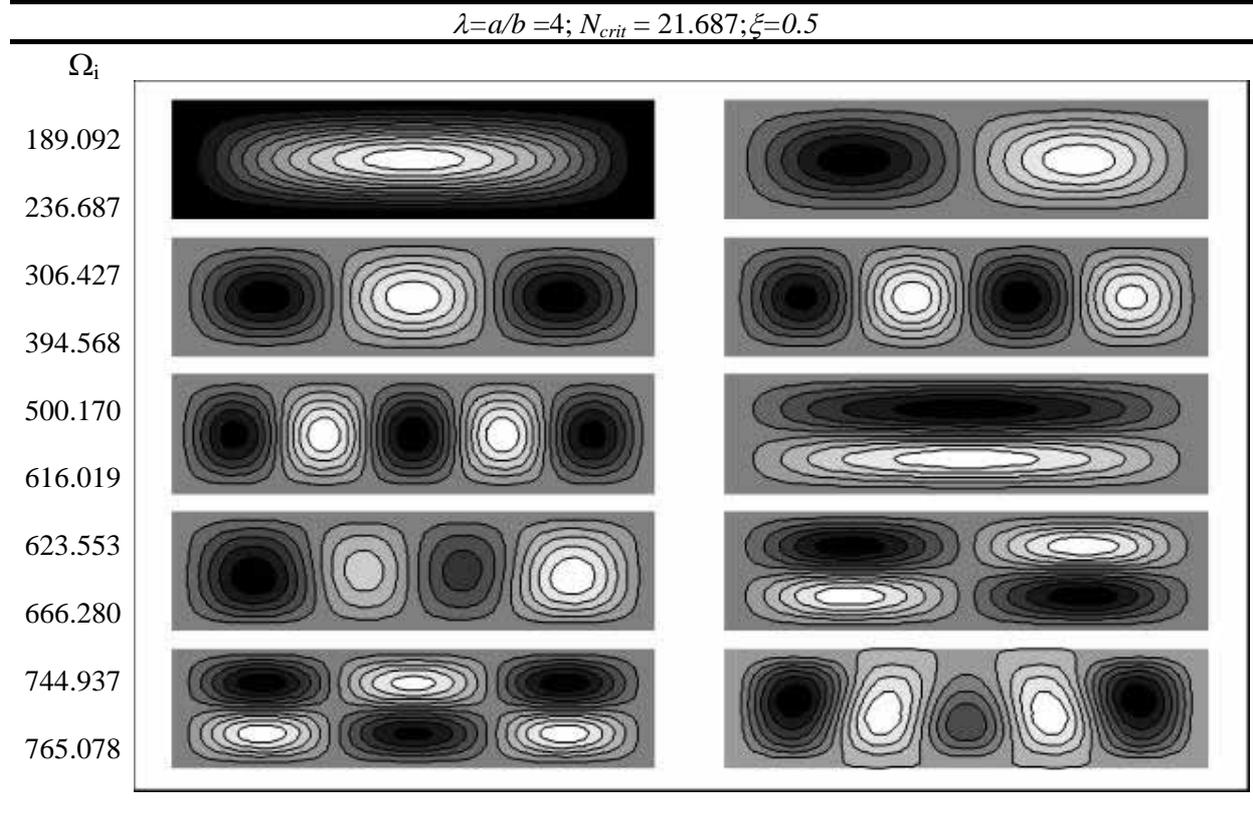


Tabla 4 (Cont.): Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,  $N_x = N(1-2y); N_y = N; N_{xy} = 0$ .

En la Tabla siguiente se muestra el caso de placas ortótropas rectangulares empotradas, sometidas a cargas tangentes a sus bordes para distintas relaciones de  $\lambda$ , Figura 5 . En cada caso se considera el valor de la carga tangencial, igual a la mitad de la carga que produce la inestabilidad de la placa:  $N_{xy} = \xi N_{crit}$  con  $\xi = 0.5$ .

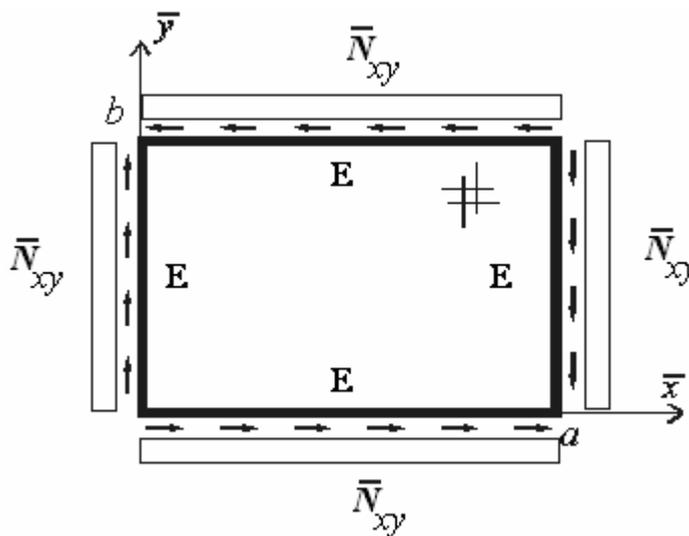


Figura 5: Cargas tangenciales

$\lambda=a/b$				
0.4	0.5	0.6	0.8	1
$N_{crit}$				
613.303	406.099	296.163	184.695	132.991
$\Omega_i$ para $\xi=0.5$				
22.7787	23.2136	23.8712	26.2028	30.0861
24.9143	27.4238	30.8884	40.7078	53.1521
30.0045	36.5743	44.9897	66.6395	76.1332
38.1991	50.1137	63.4301	69.583	91.2483
49.1548	64.5967	67.5016	90.038	109.975
62.0696	66.8816	76.5688	101.84	134.434
63.932	73.3133	91.0947	119.787	139.038
68.3849	82.9066	93.5999	128.722	159.785
76.3694	90.473	115.324	144.629	171.049
78.2552	98.9428	121.276	150.845	196.487

Tabla 5: Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,  $N_x = 0$ ;  $N_y = 0$ ;  $N_{xy} = N$ .

$\lambda=a/b$	
1.5	2
$N_{crit}$	
90.522	80.249
$\Omega_i$ para $\xi=0.5$	
45.8719	70.3934
78.7404	100.741
117.578	157.828
134.215	190.564
164.303	235.520
205.344	237.673
210.871	301.059
233.578	335.674
260.998	358.236
289.925	387.708

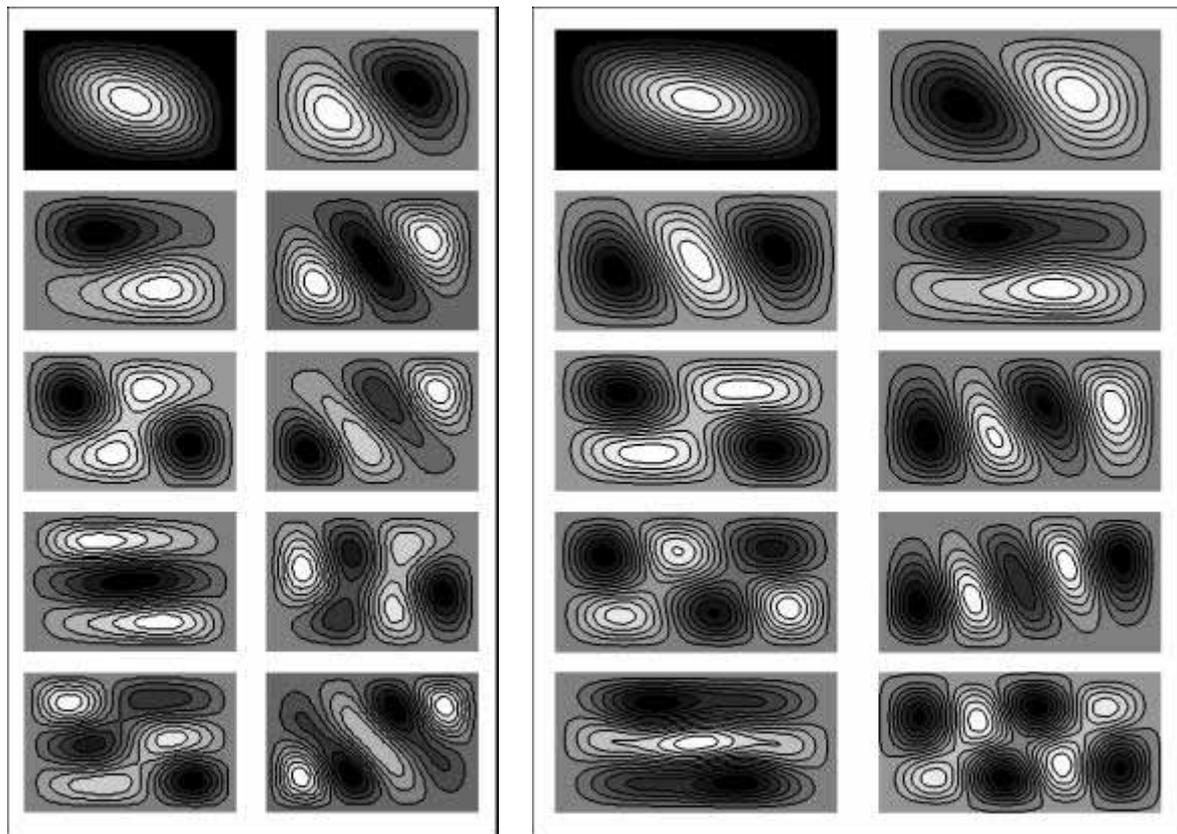


Tabla 5 (Cont): Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,  
 $N_x = 0; N_y = 0; N_{xy} = N$ .

Para 1 cargas tangenciales se observa como algunas de formas modales se orientan en el sentido de la carga.

$\lambda=a/b=2.5; N_{crit}=73.928; \xi=0.5$		
$\Omega_i$		
104.400		
130.844		
185.275		
261.541		
291.104		
328.965		
368.067		
397.352		
483.778		
485.979		
$\lambda=a/b=3; N_{crit}=71.113; \xi=0.5$		
$\Omega_i$		
146.77		
169.235		
219.413		
295.331		
392.328		
408.525		
455.378		
501.156		
534.88		
601.367		

Tabla 5 (Cont.): Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,  $N_x = N_y = 0; N_{xy} = N$ .

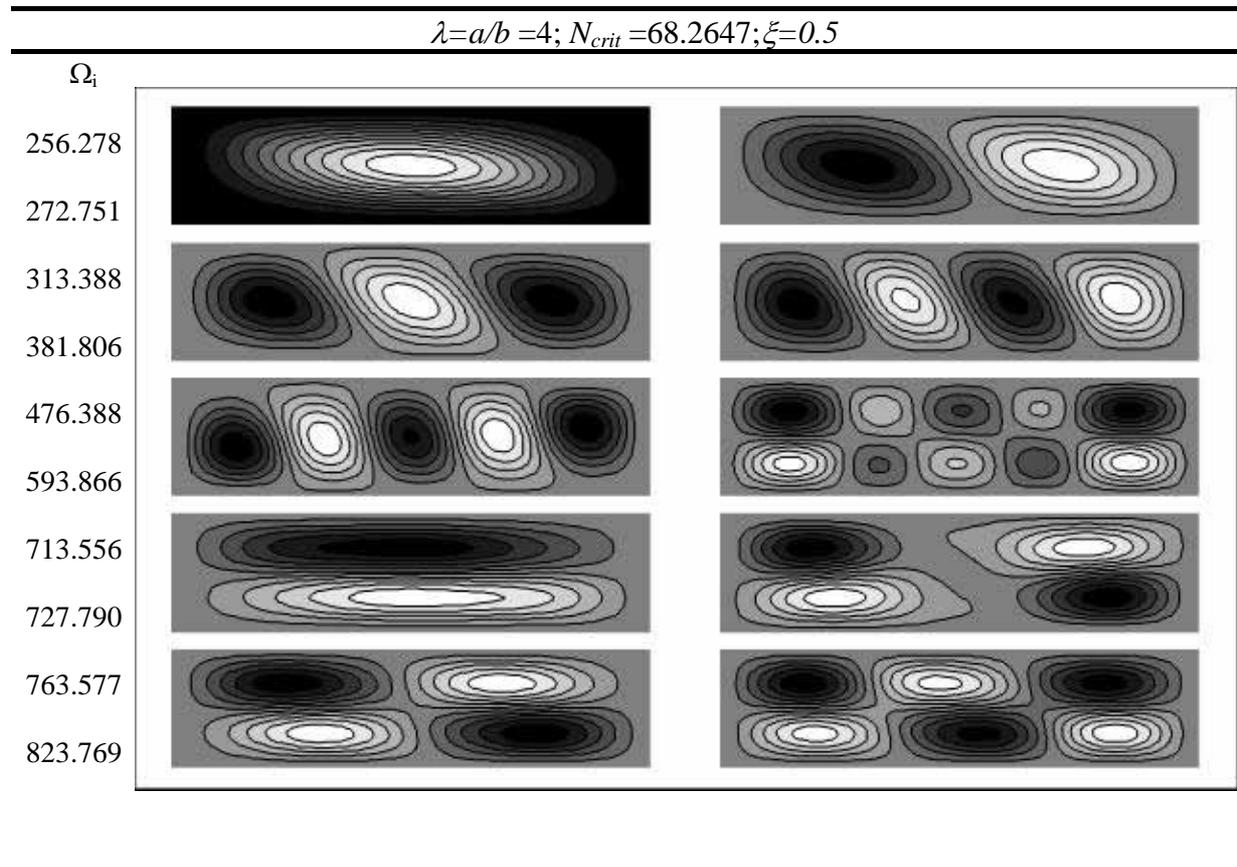


Tabla 5 (Cont.): Cargas críticas, frecuencias y formas modales para placas ortótropas EEEE,

$$N_x = N_y = 0; N_{xy} = N.$$

En la [Figura 6](#) se muestra la variación de las respectivas cargas críticas para cuatro estados distintos de carga en el plano, cuando la dimensión  $a$  de la placa en la dirección  $x$  se varía de 0.40 hasta 4, manteniéndose la otra dimensión  $b$  constante y la placa es del mismo material ortótropo ya indicado:  $D_2/D_1=0.5$ ,  $D_k/D_1=0.5$ ,  $\nu_2=0.30$ .

#### 4 CONCLUSIONES

En estos resultados para placas rectangulares vibrantes con cargas en el plano, existe una gran número de parámetros que pueden variarse, como los parámetros de la ortotropía del material, las condiciones de vinculación de borde de la placa, la intensidad y la forma de las cargas en el plano y sus combinaciones, así como también la relación entre las longitudes de lados de la placa rectangular.

En este estudio de placas rectangulares delgadas, se considera un material de ortotropía moderada, condiciones de empotramiento en el contorno, distintas relaciones de lados y cuatro estados diferentes de carga en el plano. Se determinaron para cada caso, las cargas críticas, y las primeras diez frecuencias y las correspondientes formas modales cuando la carga aplicada es el 50% de la carga crítica.

Dado que las cargas críticas pueden tener una variación significativa cuando cambia la relación largo ancho de la placa, es importante tomar en consideración este detalle a la hora

de diseñar la forma de la placa. En este trabajo la relación  $\lambda$  se varía entre 0.4 y 4. En la Figura 6 se observa que para los cuatro casos las variaciones más significativas en la magnitud de la carga crítica, se producen para valores de  $a$  entre  $0.40b$  y  $b$ .

La observación de las formas modales es interesante para la ubicación de sistemas de control de vibraciones. En el conjunto de las formas modales de placas rectangulares distintas, bajo un mismo estado de carga, es posible apreciar entre otras cosas que se producen intercambios en las geometrías de dichas formas cuando se varía en las placas la relación de lados.

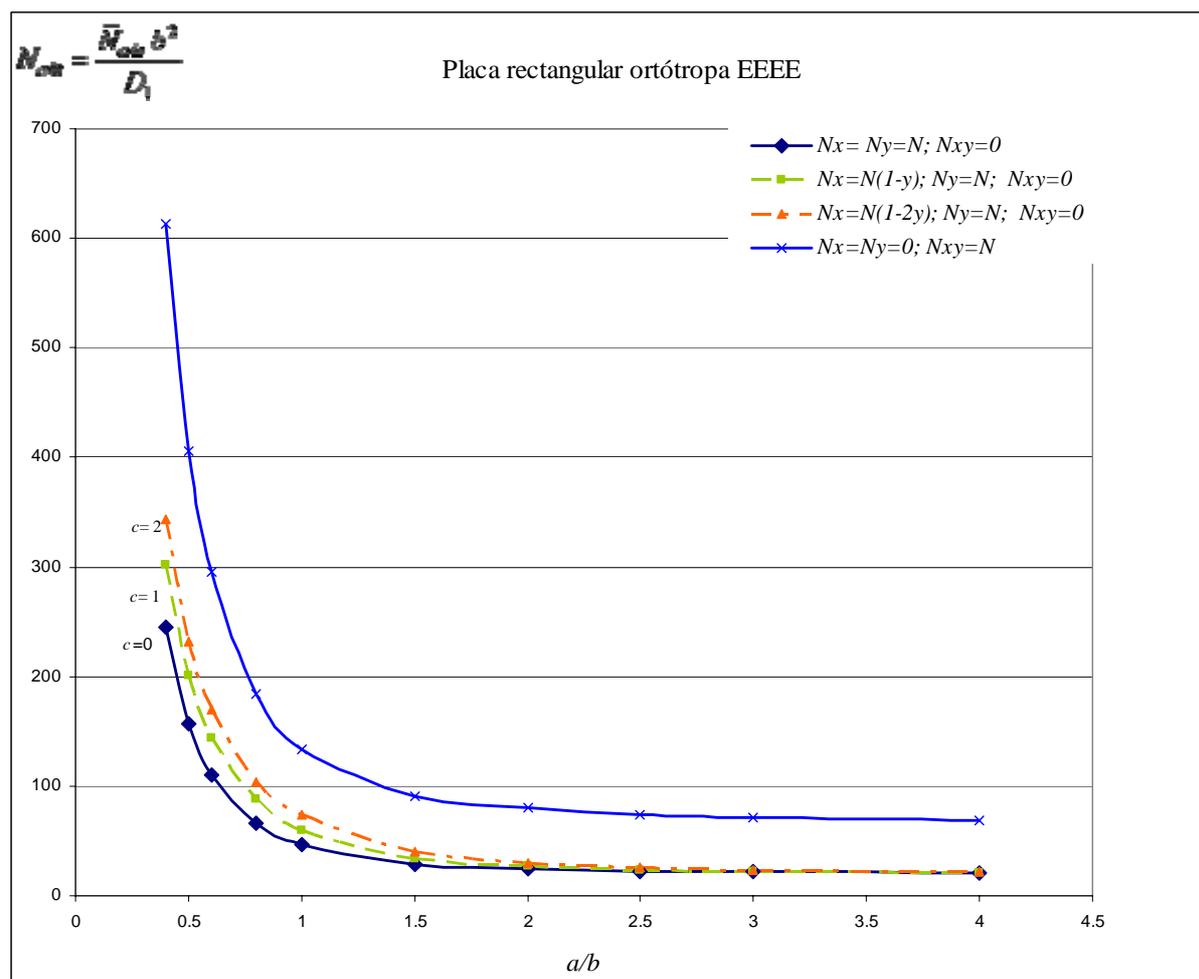


Figura 6: Cargas críticas en función de la relación de lados de la placa, para distintos tipos de carga en el plano.

## 5 AGRADECIMIENTOS

El presente estudio fue auspiciado por la Universidad Nacional del Sur, UNS y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET y fue desarrollado en el Departamento de Ingeniería de la mencionada Universidad.

## REFERENCIAS

- Bassily, S.F., Dickinson, S.M., Buckling and lateral vibration of rectangular plates subject to in-plane loads –a Ritz approach. *Journal of Sound and Vibration*, 22 (2): 219–239, 1972.
- Chen, P.C.T., Buckling analysis of a rectangular plate by the Kantorovich method. *International Journal of Mechanical Sciences* 14:15-24, 1972.
- Dickinson, S.M., The buckling and frequency of flexural vibration of rectangular isotropic and orthotropic plates using Raleigh's method, *Journal of Sound and Vibration*, 61(1):1–8., 1978.
- Diez, L., Gianetti, C. E., Laura, P.A.A., “A note on transverse vibrations of rectangular plates subject to in-plane normal and shear forces”. *Journal of Sound and Vibration*, 59(40):503-509, 1978.
- Felgar Jr., R.P., Formulas for integrals containing characteristic functions of a vibrating beam. The University of Texas Publication, Circ.Nº 14. 1951.
- Felix, D.H.. Vibraciones de placas ortótropas con diversas condiciones de vínculo y orificios de borde libre. Tesis Doctoral. Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina. 2004.
- Felix, D.H., Bambill, D.V. and Rossit, C.A., A note on buckling and vibration of clamped orthotropic plate under in-plane loads, *Structural Engineering and Mechanics* 39 (1): 115-123, 2011.
- Grimm, T.R., Gerdeen, J.C. , Inestability analysis of thin plates using the Kantorovich method. . *Journal of Applied Mechanics* 42:110-118, 1975.
- Leissa, A.W., Kang, J.H., Exact solutions for the free vibrations and buckling of rectangular plates with linearly varying in-plane loading. In: Proceedings, ASME International. 2001.
- Leissa, A.W., Kang, J.-H., Exact solutions for vibration and buckling of an SS-C-SS-C rectangular plate loaded by linearly varying in-plane stresses, *International Journal of Mechanical Sciences* 44: 1925–1945, 2002.
- Lekhnitskii, S. G.. Anisotropic Plates, Gordon and Breach Science Publishers. 1968.
- Levy, S., Buckling of rectangular plates with built-in edges. . *Journal of Applied Mechanics* 9, A : 171-174, 1942.
- Nallim L., Oller S., Grossi R., Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005.
- Nallim L., Grossi R., Análisis del comportamiento de placas rectangulares ortotrópicas y anisotrópicas. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería* Vol.: 15 Núm.: 2 155-167, 1999.
- Singhatanadgid, P. and Sukajit, P. Experimental determination of the buckling load of rectangular plates using vibration correlation technique, *Structural Engineering and Mechanics* 37 (3): 331-349, 2011.
- Wittrick W, H., Correlation between some stability problems for orthotropic and isotropic plates under bi-axial direct stress. *Aeronautical Quarterly* 4:83-92, 1952.
- Xiang, Y., Wang, C.M., Exact buckling and vibration solutions for stepped rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration* 250 (3): 503-517, 2002.
- Xiang, Y. y Wei, G.W., Exact solutions for buckling and vibration of stepped rectangular Mindlin plates, *International Journal of Solids and Structures* 41: 279–294, 2004.