

IDENTIFICACIÓN DE DAÑO MÚLTIPLE EN VIGAS CURVAS DE PARED DELGADA MEDIANTE ANÁLISIS DE VIBRACIONES

Franco E. Dotti^{a,b}, Víctor H. Cortínez^{a,b} y Marcelo T. Piovan^{a,b}

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET)*

Palabras Clave: Vigas curvas de pared delgada, daño múltiple, Identificación de daños.

Resumen. Se presenta un modelo teórico para el análisis de vigas curvas de pared delgada con presencia de daño múltiple. La flexibilidad por corte es considerada en forma completa, teniendo en cuenta la deformabilidad por corte debida a flexión y a alabeo por torsión no uniforme. Para la discretización de las ecuaciones gobernantes del principio de trabajos virtuales, se emplea un elemento viga iso-paramétrico con cinco nodos y siete grados de libertad por nodo.

De acuerdo con su naturaleza de fenómeno local, un daño general es considerado en el modelo mediante la modificación de las propiedades seccionales de un único elemento finito. Este daño general se particulariza como una fisura por fatiga mediante comparaciones de valores del factor de intensidad de tensiones del modo I.

Las magnitudes características de cada fisura presente en la viga son identificadas mediante la minimización de una función objetivo. Esta función se define en términos de diferencias entre valores de ciertos parámetros dinámicos, obtenidos a partir del modelo y medidos experimentalmente. El algoritmo Evolución Diferencial es utilizado para el cálculo de optimización.

Los resultados numéricos y las comparaciones realizadas permiten concluir que el presente modelo es lo suficientemente preciso como para realizar detección de daño estructural múltiple en vigas curvas de pared delgada mediante análisis vibratorio.

1 INTRODUCCIÓN

La detección temprana de daño estructural en sistemas ingenieriles es un tópico de fundamental importancia. En particular, un tipo de daño que puede pasar peligrosamente inadvertido es aquél producido por fatiga, debido a la dificultad que acarrea su detección a simple vista. Si bien existen diversas técnicas no destructivas para la detección localizada de fisuras, muchas veces su aplicación puede ser poco práctica, debido a la restricción que representa la necesidad de explorar cada sector de una estructura, que inclusive puede presentar zonas inaccesibles. En consecuencia, las técnicas de detección de daño basadas en modelos han adquirido gran importancia en los últimos tiempos, impulsadas además por el avance en la computación digital de datos.

La presencia de daño en estructuras produce modificaciones en parámetros dinámicos como las frecuencias naturales, el amortiguamiento modal y la respuesta forzada. Estas modificaciones dependen de la naturaleza, ubicación y severidad del daño en cuestión. La identificación basada en dicha respuesta dinámica se centra esencialmente en la comparación entre valores teóricos y experimentales de parámetros dinámicos. Las incógnitas del problema corresponden a las magnitudes asociadas al daño (localización, intensidad). Así, a los valores más próximos a los reales le corresponderá una mínima desviación entre los valores teóricos y experimentales. Este tipo de técnica inversa hace uso de un modelo teórico de la estructura dañada. Pueden encontrarse revisiones de las técnicas de detección de daño basadas en parámetros modales y en cambios en las frecuencias naturales en los trabajos de [Doebbling et al. \(1998\)](#) y [Salawu \(1997\)](#), respectivamente. También son de interés en el tópico los trabajos de [Dimarogonas \(1996\)](#) y [Kim et al \(2003\)](#).

Los efectos del daño estructural en los modos flexionales de vigas Euler-Bernoulli han sido estudiados previamente por diversidad de autores, como [Chondros y Dimarogonas \(1997\)](#), [Cheeseman et al. \(1996\)](#) y [Saavedra y Cuitiño \(1996\)](#), entre otros. Pero el estudio de vigas rectas de pared delgada con presencia de daño se reduce a unos pocos trabajos, entre ellos los de [Cortínez et al. \(2007\)](#), [Cortínez y Dotti \(2010\)](#) y [Dotti et al. \(2011b, c\)](#). Esto puede deberse a que las vigas de pared delgada presentan un comportamiento más complejo que las vigas Euler-Bernoulli, presentándose acoplados los movimientos flexionales, torsionales y axiales, en la generalidad de los casos.

De acuerdo al conocimiento de los autores, para vigas curvas de pared delgada puede mencionarse el trabajo de [Dotti et al. \(2011a\)](#), en el que se realiza la detección de parámetros de un único daño por fatiga. No se presentan en la literatura trabajos que aborden la dinámica y la detección de más de un daño en vigas curvas de pared delgada.

En este trabajo se presenta un modelo unidimensional simplificado para el análisis dinámico de vigas curvas de pared delgada, con presencia de daño múltiple por fatiga. Este modelo considera flexibilidad por corte debido a flexión y alabeo. El daño es introducido de manera general en el modelo, mediante la modificación de las propiedades seccionales de un tramo axial de la viga. Su caracterización se realiza mediante los parámetros convencionales: ubicación y severidad, y por un tercer parámetro que representa la extensión del daño en la dirección axial de la viga. Este daño general se asimila a un daño del tipo fisura por fatiga calibrando el valor apropiado del mencionado tercer parámetro, a partir de un modelo de mecánica de fracturas para vigas de pared delgada, introducido por [Cortínez et al. \(2009\)](#) y extendido en el presente trabajo. El modelo es aplicable tanto a vigas de material isótropo como compuesto de configuración ortótropa o simétrica-balanceada. Las ecuaciones gobernantes de trabajos virtuales se discretizan mediante un modelo de elementos finitos ([Piovan y Cortínez, 2007](#)), que es adaptado para considerar la presencia del daño estructural.

La capacidad del modelo para reproducir el comportamiento vibratorio libre de la

estructura es chequeada mediante comparación con experimentos numéricos realizados en un modelo tridimensional, construido con elementos lámina.

La profundidad y la ubicación de dos fisuras son identificadas mediante la minimización de una función objetivo, que se define en términos de diferencias cuadráticas entre valores de las frecuencias naturales obtenidas experimentalmente y calculadas con el modelo. La optimización se realiza mediante el algoritmo de Evolución Diferencial (ED), originalmente introducido por [Storn y Price \(1997\)](#).

2 TEORÍA GENERAL DE VIGAS CURVAS DE PARED DELGADA

2.1 Cinemática general

Se considera una viga curvada en el plano, de paredes delgadas, con presencia de daño estructural y de sección transversal abierta, como se muestra en la [Figura 1](#). La viga se encuentra definida por las magnitudes V , A , L , S , y e , que representan respectivamente los dominios del espacio (volumen), área seccional, longitud (en dirección axial de la viga), perímetro en la línea media de la pared seccional y espesor de la pared seccional, tal como se puede apreciar en la [Figura 2](#) y su detalle. La magnitud A se considera genérica y representa el área de la sección transversal tanto en zonas con o sin presencia de daño.

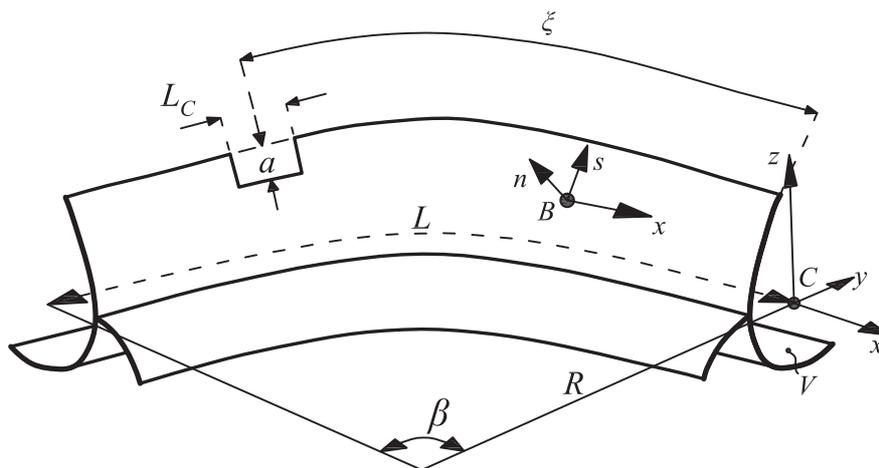


Figura 1: Esquema de viga curva de pared delgada genérica con sección abierta y presencia de daño. Sistemas de coordenadas y notación.

Los puntos del elemento estructural son referidos a un sistema cartesiano ortogonal (C: x , y , z) donde el eje x es paralelo al eje longitudinal de la viga, mientras que y y z son los ejes baricéntricos de la sección sin daño. Este sistema se considera válido también en la zona con daño, aunque su origen C no coincide con el baricentro de la sección en dicha zona. Las coordenadas correspondientes a puntos ubicados sobre la línea media de la sección, expresadas en términos del mencionado sistema de referencia, se denotan mediante las letras mayúsculas Y y Z .

Adicionalmente, se define un sistema de referencia intrínseco (B: x , s , n), siendo B un punto genérico ubicado en la línea media de la sección transversal. Las coordenadas curvilíneas s y n corresponden a coordenadas circunferencial y normal, respectivamente.

En la teoría de vigas isótropas de pared delgada de [Vlasov \(1961\)](#), se demuestra que la adopción de un criterio de referenciación doble con orígenes en el centroide y en el centro de corte puede simplificar el grado de acoplamiento entre las ecuaciones diferenciales. Esto se debe a que, para vigas sin daño, el centro de corte es centro de reducción de algunas variables,

específicamente las relacionadas con la torsión no uniforme. Sin embargo, la posibilidad de desacoplar las ecuaciones generales no es una opción si el daño estructural se modela como imperfección geométrica. Por otra parte, aún sin existencia de daño, dicha posibilidad depende fuertemente de la geometría seccional, y de la disposición y secuencia de los laminados en la sección, en vigas de material compuesto.

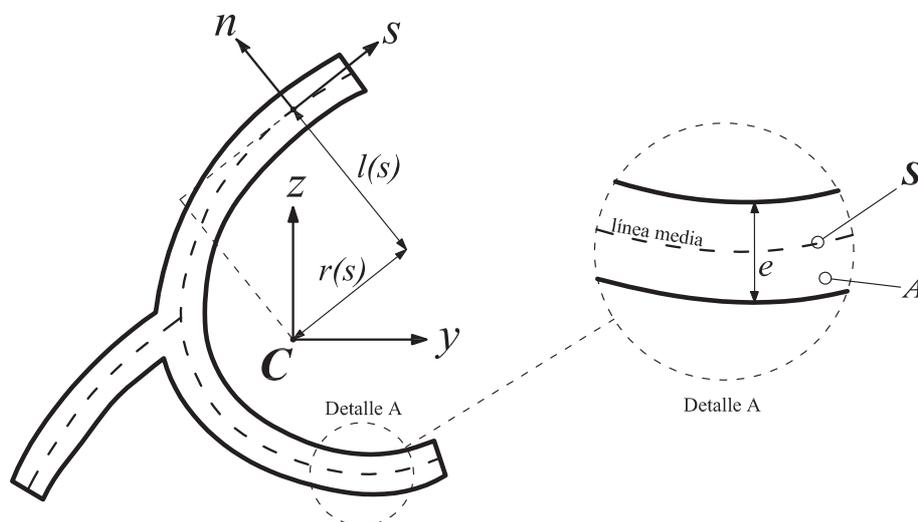


Figura 2: Descripción de las entidades geométricas de una sección transversal genérica.

El modelo estructural general del presente trabajo está basado en las siguientes hipótesis:

- 1) La sección transversal es indeformable en su propio plano, aunque el alabeo se considera permitido fuera del mismo.
- 2) La distribución de alabeo se representa mediante la función de Saint-Venant de vigas isótropas.
- 3) La teoría se considera válida para vigas curvas de pared delgada, con sección transversal genérica, y construidas con material isótropo, especialmente ortótropo o compuesto con laminado simétrico balanceado (Barbero, 1999).
- 4) Los esfuerzos placa y las resultantes de momento correspondientes a la tensión circunferencial σ_{ss} y la fuerza resultante correspondiente a γ_{ns} son despreciables.
- 5) La curvatura de la línea media de la sección transversal es despreciable. Se idealiza la sección de la viga, formada por una secuencia de placas de espesor constante.
- 6) La curvatura de placa debida al giro se expresa de acuerdo a la teoría de placas clásica.
- 7) Las deformaciones que se admiten como representativas son ε_{xx} , ε_{xy} y ε_{xz} .
- 8) Las componentes representativas del tensor de Piola-Kirchhoff son σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{xz} .

Las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario de la sección transversal, expresadas en el sistema cartesiano (C: x , y , z), se relacionan con las correspondientes coordenadas curvilíneas s y n mediante las expresiones

$$y(s, n) = Y - n \frac{dZ}{ds}, \quad z(s, n) = Z + n \frac{dY}{ds}. \quad (1)$$

Los desplazamientos u_x , u_y y u_z de un punto genérico de la viga se expresan en términos de las coordenadas de la sección transversal y de un grupo de funciones y sus derivadas. A estas funciones se las llama *desplazamientos generalizados*. Los desplazamientos generalizados representan componentes vectoriales como desplazamientos y rotaciones del centro de referencia C. El comportamiento cinemático de una viga puede representarse adecuadamente

por medio de siete desplazamientos generalizados. Dichos desplazamientos generalizados corresponden a tres corrimientos: u , v y w , tres parámetros rotacionales: θ_z , θ_y , ϕ_x , y una magnitud θ_x que pondera el alabeo no uniforme a lo largo del eje de la viga.

De acuerdo a las hipótesis enunciadas, el campo de desplazamiento adoptado se expresa de la siguiente manera (Cortínez et al., 1999)

$$\begin{aligned} u_x &= u - y \left(\theta_z - \frac{u}{R} \right) - z \theta_y - \omega \left(\theta_x - \frac{\theta_y}{R} \right), \\ u_y &= v - z \phi_x, \\ u_z &= w + y \phi_x, \end{aligned} \quad (2)$$

siendo válido para vigas curvas y rectas, caso que se cumple en el límite en que el radio R tiende a infinito. La función de alabeo ω de la sección transversal se define mediante la expresión

$$\omega = \omega_p(s) + \omega_s(s, n), \quad (3)$$

siendo ω_p y ω_s son las funciones de alabeo en el contorno y en el espesor respectivamente, las cuales se definen de la misma manera en que lo hicieron Cortínez y Rossi (1998), esto es

$$\begin{aligned} \omega_p(s) &= \int_s r(s) ds - D_C, \\ \omega_s(s, n) &= -n l(s), \end{aligned} \quad (4)$$

donde se han utilizado las siguientes magnitudes

$$\begin{aligned} r(s) &= -Z(s) \frac{dY}{ds} + Y(s) \frac{dZ}{ds}, \\ l(s) &= Y(s) \frac{dY}{ds} + Z(s) \frac{dZ}{ds}. \end{aligned} \quad (5)$$

Las entidades r y l se definen gráficamente en la Figura 2; $r(s)$ representa la distancia perpendicular del origen de coordenadas C a la tangente a cualquier punto de la superficie media, mientras que $l(s)$ es la distancia de dicho origen a la normal a la superficie media.

La expresión (4) se considera válida tanto para materiales isótropos como compuestos, con o sin presencia de daño estructural. La constante D_C se utiliza para normalizar la función de alabeo respecto del origen C, y aproximadamente puede obtenerse como

$$D_C = \frac{\int_s r(s) \bar{A}_{11}(s) ds}{\int_s \bar{A}_{11}(s) ds}. \quad (6)$$

Las magnitudes \bar{A}_{11} y \bar{A}_{66} son coeficientes de rigidez tipo placa (Barbero, 1999).

Los desplazamientos se expresan en el sistema intrínseco (B: x, s, n) de la siguiente manera

$$U = u_x, \quad V = u_y \frac{dY}{ds} + u_z \frac{dZ}{ds}, \quad W = -u_y \frac{dZ}{ds} + u_z \frac{dY}{ds}, \quad (7)$$

$$\Phi_x = -\frac{\partial u_x}{\partial n}, \quad \Phi_s = \frac{\partial}{\partial n} \left(u_y \frac{dY}{ds} + u_z \frac{dZ}{ds} \right). \quad (8)$$

donde U , V y W son los desplazamientos placa en las direcciones x , s y n , respectivamente, y

Φ_x y Φ_s son rotaciones flexionales con respecto a las direcciones s y n , respectivamente.

2.2 Estado de deformaciones

En virtud de la hipótesis 8, formulada en el apartado anterior, las tres componentes no nulas del tensor de deformaciones de Green-Lagrange están dadas por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_y}{R}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{u_x}{R}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (9)$$

Así, reemplazando las expresiones del campo de desplazamientos (2) en las expresiones (9), se obtienen las componentes de dicho tensor, en función de los desplazamientos generalizados

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{D1} - y\varepsilon_{D3} - z\varepsilon_{D2} - \omega\varepsilon_{D4}, \\ \gamma_{xy} &\cong 2\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{D5} - \left(z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \varepsilon_{D8} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \varepsilon_{D7}, \\ \gamma_{xz} &\cong 2\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{D6} + \left(y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \varepsilon_{D8} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \varepsilon_{D7}, \end{aligned} \quad (10)$$

donde, para condensar la notación, se han definido las siguientes magnitudes

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R}, & \varepsilon_{D2} &= \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\phi_x}{R}, & \varepsilon_{D3} &= \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \frac{l}{R} \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{D4} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{l}{R} \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_{D5} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z, & \varepsilon_{D6} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y, & \varepsilon_{D7} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x, & \varepsilon_{D8} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\theta_y}{R}. \end{aligned} \quad (11)$$

Las expresiones (11) pueden interpretarse como *deformaciones generalizadas* para vigas curvas y corresponden a las deformaciones normal axial (ε_{D1}), normales flexionales (ε_{D2} y ε_{D3}), normal por alabeo (ε_{D4}), transversal por corte flexional (ε_{D5} y ε_{D6}), transversal por corte debida al alabeo (ε_{D7}) y transversal por torsión pura o de Saint Venant (ε_{D8}).

Además, mediante las leyes (1), las deformaciones (10) pueden expresarse en el sistema de coordenadas $\{B: x, s, n\}$, quedando representadas de la siguiente manera

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^{(0)} + n\kappa_{xx}, \quad \gamma_{xs} = 2\varepsilon_{xs} = \gamma_{xs}^{(0)} + n\kappa_{xs}, \quad \gamma_{xn} = 2\varepsilon_{xn} = \gamma_{xn}^{(0)}. \quad (12)$$

donde

$$\varepsilon_{xx}^{(0)} = \varepsilon_{D1} - Y\varepsilon_{D3} - Z\varepsilon_{D2} - \omega_p \varepsilon_{D4}, \quad (13)$$

$$\kappa_{xx} = \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D3} - \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D2} + l\varepsilon_{D4}, \quad (14)$$

$$\gamma_{xs}^{(0)} = \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D5} + \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D6} + r\varepsilon_{D7}, \quad (15)$$

$$\gamma_{xn}^{(0)} = \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D6} - \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D5} + l\varepsilon_{D7}, \quad (16)$$

$$\kappa_{xs} = \varepsilon_{D7} - 2\varepsilon_{D8}, \quad (17)$$

siendo $\varepsilon_{xx}^{(0)}$, $\gamma_{xs}^{(0)}$ y $\gamma_{xn}^{(0)}$ las deformaciones membranales, y κ_{xx} y κ_{xs} , las curvaturas.

2.3 Formulación variacional

Con el objetivo de desarrollar las expresiones que gobiernan la mecánica de vigas curvas dañadas se emplea la siguiente expresión tridimensional del Principio de Trabajos Virtuales

$$L_S + L_F + L_R + L_T = 0, \quad (18)$$

con

$$L_S = \int_V \left[\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dydzdx, \quad (19)$$

$$L_F = - \int_V \left[F_x \delta u_x + F_y \delta u_y + F_z \delta u_z \right] dydzdx, \quad (20)$$

$$L_R = \int_V \rho \left[\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_y \delta u_y + \ddot{u}_z \delta u_z \right] dydzdx, \quad (21)$$

$$L_T = - \int_{S_T} \left[T_x \delta u_x + T_y \delta u_y + T_z \delta u_z \right] dydz. \quad (22)$$

donde se han definido las siguientes magnitudes: σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{xz} como las componentes no nulas del tensor de tensiones, ρ como la densidad del material, F_x , F_y y F_z como las fuerzas volumétricas y T_x , T_y y T_z como las fuerzas externas por unidad de superficie, aplicadas en los extremos de la viga. L_S corresponde al trabajo virtual de las deformaciones sobre las tensiones incrementales y L_F , L_R , y L_T , a los trabajos virtuales de los desplazamientos sobre las fuerzas volumétricas, las fuerzas de inercia y las fuerzas superficiales, respectivamente. S_T es el área de la sección transversal en los extremos de la barra.

Sustituyendo en la (18) los desplazamientos (2) y las deformaciones (10), reagrupando variaciones e integrando con respecto a y y z , se pueden obtener las siguientes expresiones

$$L_S = \int_0^L \left[N \delta \varepsilon_{D1} - M_y \delta \varepsilon_{D2} - M_z \delta \varepsilon_{D3} - B \delta \varepsilon_{D4} + Q_y \delta \varepsilon_{D5} + Q_z \delta \varepsilon_{D6} + T_w \delta \varepsilon_{D7} + T_{sv} \delta \varepsilon_{D8} \right] dx, \quad (23)$$

$$L_F = - \int_0^L \left[\left(q_x + \frac{m_z}{R} \right) \delta u - m_z \delta \theta_z - \left(m_y + \frac{b}{R} \right) \delta \theta_y - b \delta \theta_x + q_y \delta v + q_z \delta w + m_x \delta \phi_x \right] dx, \quad (24)$$

$$L_R = \int_0^L \rho \left\{ \left[A \ddot{u} + S_z \left(\frac{2\ddot{u}}{R} - \ddot{\theta}_z \right) - S_y \ddot{\theta}_y + S_\omega \left(\frac{\ddot{\theta}_y}{R} - \ddot{\theta}_x \right) - I_z \frac{\ddot{\theta}_z}{R} - I_{yz} \frac{\ddot{\theta}_y}{R} - I_{z\omega} \frac{\ddot{\theta}_x}{R} \right] \delta u + \left[-S_z \ddot{u} + I_z \left(\ddot{\theta}_z - \frac{\ddot{u}}{R} \right) + I_{yz} \ddot{\theta}_y - I_{z\omega} \left(\ddot{\theta}_x - \frac{\ddot{\theta}_y}{R} \right) \right] \delta \theta_z + \left[-S_y \ddot{u} + S_\omega \frac{\ddot{u}}{R} + I_{yz} \left(\ddot{\theta}_z - \frac{\ddot{u}}{R} \right) - I_{z\omega} \frac{\ddot{\theta}_z}{R} + I_y \ddot{\theta}_y + I_{y\omega} \left(\ddot{\theta}_x - \frac{2\ddot{\theta}_y}{R} \right) - C_w \frac{\ddot{\theta}_x}{R} \right] \delta \theta_y + \left[-S_\omega \ddot{u} + I_{z\omega} \left(\ddot{\theta}_z - \frac{\ddot{u}}{R} \right) + I_{y\omega} \ddot{\theta}_y + C_w \left(\ddot{\theta}_x - \frac{\ddot{\theta}_y}{R} \right) \right] \delta \theta_x + (A \ddot{v} - S_y \ddot{\phi}_x) \delta v + (A \ddot{w} + S_z \ddot{\phi}_x) \delta w + (I_y \ddot{\phi}_x + I_z \ddot{\phi}_x - S_y \ddot{v} + S_z \ddot{w}) \delta \phi_x \right\} dx, \quad (25)$$

$$L_T = - \left[\left(\bar{N} + \frac{\bar{M}_z}{R} \right) \delta u - \bar{M}_z \delta \theta_z - \left(\bar{M}_y + \frac{\bar{B}}{R} \right) \delta \theta_y + \bar{B} \delta \theta_x + \bar{Q}_y \delta v + \bar{Q}_z \delta w + \left(\bar{T}_w + \bar{T}_{sv} \right) \delta \phi_x \right]_{x=0}^{x=L}, \quad (26)$$

que permiten expresar unidimensionalmente la ecuación de movimiento (18) del Principio de Trabajos Virtuales.

En la expresión (25) se han definido las resultantes de tensión en el área de la sección como

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_{xx} dA, & M_y &= \int_A z \sigma_{xx} dA, & M_z &= \int_A y \sigma_{xx} dA, & B &= \int_A \omega \sigma_{xx} dA, \\ Q_y &= \int_A \sigma_{xy} dA, & Q_z &= \int_A \sigma_{xz} dA, & T_w &= \int_A \left(\sigma_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \sigma_{xz} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA, \\ T_{sv} &= \int_A \left[\sigma_{xz} \left(y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \sigma_{xy} \left(z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] dA, \end{aligned} \quad (27)$$

denominándose *esfuerzos viga generalizados* y identificados como: esfuerzo normal, N ; momentos flectores, M_y y M_z ; bimomento, B ; esfuerzos de corte Q_y y Q_z ; momento flexotoror, T_w y momento de torsión pura o de Saint Venant, T_{sv} .

En la expresión (24) se han definido las fuerzas q_x , q_y y q_z , el bimomento b y los momentos flectores m_x , m_y y m_z , aplicados por unidad de longitud, como

$$\begin{aligned} q_x &= \int_A F_x dA, & q_y &= \int_A F_y dA, & q_z &= \int_A F_z dA, & b &= \int_A \omega F_x dA, \\ m_x &= \int_A (y F_z - z F_y) dA, & m_y &= \int_A z F_x dA, & m_z &= \int_A y F_x dA. \end{aligned} \quad (28)$$

En la expresión (25) se han definido las constantes seccionales genéricas de la viga como

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA, & S_y &= \int_A z dA, & S_z &= \int_A y dA, & S_\omega &= \int_A \omega dA, \\ I_y &= \int_A z^2 dA, & I_z &= \int_A y^2 dA, & I_{yz} &= \int_A yz dA, \\ I_{y\omega} &= \int_A z \omega dA, & I_{z\omega} &= \int_A y \omega dA, & C_w &= \int_A \omega^2 dA, \end{aligned} \quad (29)$$

identificadas como: área seccional, A ; primeros momentos de área, S_y y S_z ; primer momento de alabeo, S_ω ; segundos momentos de área, I_y y I_z ; producto de inercia, I_{yz} ; productos de alabeo $I_{y\omega}$ y $I_{z\omega}$ y segundo momento de alabeo o constante de alabeo, C_w .

La viga puede estar sometida a esfuerzos externos aplicados en sus extremos. Estos han sido definidos en la expresión (26) como

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \int_{S_r} T_x dA, & \bar{M}_y &= \int_{S_r} z T_x dA, & \bar{M}_z &= \int_{S_r} y T_x dA, & \bar{B} &= \int_{S_r} \omega T_x dA, \\ \bar{Q}_y &= \int_{S_r} T_y dA, & \bar{Q}_z &= \int_{S_r} T_z dA, & \bar{T}_w &= \int_{S_r} \left(T_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + T_z \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA, \\ \bar{T}_{sv} &= \int_{S_r} \left[T_z \left(y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + T_y \left(z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] dA. \end{aligned} \quad (30)$$

Por otra parte, en el sistema de coordenadas intrínseco (B : x , s , n), las componentes de la ecuación (18) de trabajos virtuales se pueden expresar de la siguiente manera

$$L_S = \iint \left(N_{xx} \delta \mathcal{E}_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \kappa_{xx} + N_{xs} \delta \gamma_{xs}^{(0)} + M_{xs} \delta \kappa_{xs} + N_{xn} \delta \gamma_{xn}^{(0)} \right) ds dx, \quad (31)$$

$$L_F = - \iint \left(\bar{q}_x \delta U + \bar{q}_s \delta V + \bar{q}_n \delta W + \bar{m}_x \delta \Phi_x + \bar{m}_s \delta \Phi_s \right) ds dx, \quad (32)$$

$$L_R = \iiint \bar{\rho} \left(\ddot{U} \delta U + \ddot{V} \delta V + \ddot{W} \delta W + \ddot{\Phi}_x \delta \Phi_x + \ddot{\Phi}_s \delta \Phi_s \right) ds dndx, \quad (33)$$

$$L_T = - \left[\int \left(\bar{N}_{xx} \delta U + \bar{M}_{xx} \delta \Phi_x + \bar{N}_{xs} \delta V + \bar{M}_{xs} \delta \Phi_s + \bar{N}_{xn} \delta W \right) ds \right]_{x=0}^{x=L}, \quad (34)$$

donde N_{xx} , N_{xs} , M_{xx} , M_{xs} y N_{xn} son resultantes de tensión en el espesor definidas de acuerdo a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} dn, & M_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xx} n) dn, \\ N_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xs} dn, & M_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xs} n) dn, & N_{xn} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xn} dn. \end{aligned} \quad (35)$$

En la expresión (32), las fuerzas por unidad de área en las direcciones x , s y n se indican respectivamente como \bar{q}_x , \bar{q}_s y \bar{q}_n . Además, \bar{m}_x y \bar{m}_s representan momentos por unidad de área aplicados respecto a las direcciones x y s , respectivamente. Las magnitudes \bar{N}_{xx} , \bar{N}_{xs} , \bar{N}_{xn} , \bar{M}_{xx} y \bar{M}_{xs} , definidas en la ecuación (34), son resultantes de tensiones y de momentos en el espesor, aplicados en los extremos de la viga.

Reemplazando las expresiones de deformaciones (13-17) en las (31-34) e integrando con respecto a las variables s y n , se pueden obtener las expresiones unidimensionales de trabajos virtuales (23-26) si se definen los esfuerzos viga generalizados de la siguiente manera

$$\begin{aligned} N &= \int_S N_{xx} ds, & M_y &= \int_S \left(N_{xx} Z + M_{xx} \frac{dY}{ds} \right) ds, & M_z &= \int_S \left(N_{xx} Y - M_{xx} \frac{dZ}{ds} \right) ds, \\ B &= \int_S (N_{xx} \omega_p - M_{xx} l) ds, \\ Q_y &= \int_S \left(N_{xs} \frac{dY}{ds} - N_{xn} \frac{dZ}{ds} \right) ds, & Q_z &= \int_S \left(N_{xs} \frac{dZ}{ds} + N_{xn} \frac{dY}{ds} \right) ds, \\ T_w &= \int_S [N_{xs} r + M_{xs} + N_{xn} l] ds, & T_{sv} &= -2 \int_S M_{xs} ds. \end{aligned} \quad (36)$$

siendo S el dominio representado por el perímetro en la línea media de la pared seccional. Las definiciones de las expresiones (36) son análogas a las realizadas en las expresiones (27).

2.4 Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas de los materiales compuestos especialmente ortótropos o con laminados simétrico-balanceados pueden expresarse, en términos de los esfuerzos placa, de la siguiente forma

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{xx}^{(0)} \\ \gamma_{xs}^{(0)} \\ \gamma_{xn}^{(0)} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{xs} \end{Bmatrix}, \quad (37)$$

siendo

$$\begin{aligned}\bar{A}_{11} &= A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}, & \bar{A}_{66} &= A_{66} - \frac{A_{26}^2}{A_{22}}, & \bar{A}_{55}^{(H)} &= A_{55}^{(H)} - \frac{(A_{45}^{(H)})^2}{A_{44}^{(H)}} \\ \bar{D}_{11} &= D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}, & \bar{D}_{66} &= D_{66} - \frac{D_{26}^2}{D_{22}},\end{aligned}\quad (38)$$

donde A_{ij} , D_{ij} y $\bar{A}_{ij}^{(H)}$ son coeficientes de rigidez de placa, definidos de acuerdo a la teoría de laminación presentada por Barbero (1999). Las ecuaciones constitutivas obtenidas en (37) se hallan escritas en términos de las resultantes de tensión en el espesor y de las deformaciones expresadas en el sistema intrínseco (B : x, s, n). Para representar las ecuaciones constitutivas en términos de los esfuerzos viga generalizados y de las deformaciones generalizadas, se reemplaza convenientemente la (37) en las expresiones (36). Así, se obtiene

$$\{Q_E\} = [J_E]\{\Delta\}, \quad (39)$$

donde $\{Q_E\}$ el vector de esfuerzos viga generalizados, $\{\Delta\}$ es el vector de deformaciones generalizadas y $[J_E]$ es la matriz constitutiva de esfuerzos. Esto es:

$$\{Q_E\} = \{N, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}^T, \quad (40)$$

$$\{\Delta\} = \{\varepsilon_{D1}, -\varepsilon_{D2}, -\varepsilon_{D3}, -\varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\}^T, \quad (41)$$

$$[J_E] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & J_{22} & J_{23} & J_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & J_{33} & J_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & J_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & J_{55} & J_{56} & J_{57} & 0 \\ & sim & & & & J_{66} & J_{67} & 0 \\ & & & & & & J_{77} & J_{78} \\ & & & & & & & J_{88} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Los elementos de la matriz constitutiva de esfuerzos (42) están dados por

$$J_{11} = E^* A, \quad J_{12} = E^* S_y, \quad J_{13} = E^* S_z, \quad J_{14} = E^* S_w, \quad (43)$$

$$J_{22} = E^* I_y + \bar{D}_{11} \int_S \left(\frac{dY}{ds} \right)^2 ds, \quad J_{23} = E^* I_{yz} - \bar{D}_{11} \int_S \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} ds, \quad (44)$$

$$J_{24} = E^* I_{yw} - \bar{D}_{11} \int_S l \frac{dY}{ds} ds,$$

$$J_{33} = E^* I_z + \bar{D}_{11} \int_S \left(\frac{dZ}{ds} \right)^2 ds, \quad J_{34} = E^* I_{zw} + \bar{D}_{11} \int_S l \frac{dZ}{ds} ds, \quad (45)$$

$$J_{44} = E^* C_w + \bar{D}_{11} \int_S l^2 ds, \quad (46)$$

$$J_{55} = \bar{A}_{66} \int_S \left(\frac{dY}{ds} \right)^2 ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S \left(\frac{dZ}{ds} \right)^2 ds, \quad J_{56} = (\bar{A}_{66} - \bar{A}_{55}^{(H)}) \int_S \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} ds, \quad (47)$$

$$J_{57} = \bar{A}_{66} \int_S r \frac{dY}{ds} ds,$$

$$J_{66} = \bar{A}_{66} \int_S \left(\frac{dZ}{ds} \right)^2 ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S \left(\frac{dY}{ds} \right)^2 ds, \quad J_{67} = \bar{A}_{66} \int_S r \frac{dZ}{ds} ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l \frac{dY}{ds} ds, \quad (48)$$

$$J_{77} = \bar{A}_{66} \int_S r^2 ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l^2 ds + \frac{\bar{D}_{66} A}{e}, \quad J_{78} = -\frac{2\bar{D}_{66} A}{e}, \quad (49)$$

$$J_{88} = \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l^2 ds + \frac{4\bar{D}_{66} A}{e}. \quad (50)$$

En las expresiones anteriores se ha definido $E = \bar{A}_{11} / e$.

3 MODELO DE DAÑO GENERAL

3.1 Introducción

El daño estructural es un fenómeno local y por lo tanto es considerado como tal en el presente modelo. Como se muestra en la [Figura 1](#), el mismo es considerado mediante la modificación de las propiedades seccionales de un tramo axial de la viga. Esto implica que en una misma viga se presentan tramos con distintas secciones transversales. Su caracterización se realiza mediante los parámetros convencionales de daño: ubicación ζ y severidad a , y por un tercer parámetro que representa la extensión del daño en la dirección axial de la viga, L_C . A esta longitud L_C se le asigna el atributo de parámetro de calibración de daño. Así, mediante la modificación del valor de L_C , el daño general puede adecuarse de manera que el comportamiento estructural de la viga sea asimilado al que debería producirse en presencia de diferentes daños reales, como pueden ser muescas, fisuras por fatiga y otros.

3.2 Energía de Deformación y Factores de Intensidad de Tensiones

El daño se considera ubicado a una distancia ζ del origen de coordenadas C, por lo que su zona de influencia queda definida como

$$\xi - \frac{L_C}{2} < x < \xi + \frac{L_C}{2}. \quad (51)$$

En esta zona, la sección transversal es diferente a la de la zona sin daño por lo que la matriz constitutiva de esfuerzos toma valores diferentes. Las constantes seccionales dadas por las expresiones (29) y por las integrales definidas en el dominio S de las expresiones (43-50), son diferentes en la zona con daño, dado que el mismo perímetro seccional S depende de la profundidad, es decir: $S = S(a)$. Así, las expresiones de los componentes $J_{ij}^{(c)}$ de la matriz constitutiva en dicha zona corresponden a las (43-50), aunque dependen de la profundidad de daño a . La matriz constitutiva de la zona dañada se denotará como $[J_E^{(c)}]$ para diferenciarla de la correspondiente a la zona sin daño, la cual continuará denominándose $[J_E]$. Teniendo en cuenta lo expuesto, la expresión constitutiva para la viga de la [Figura 1](#) puede reformularse como

$$\begin{aligned} \{Q_E\} &= [J_E] \{\Delta\}, & 0 \leq x \leq \xi - \frac{L_C}{2} & \quad \& \quad \xi + \frac{L_C}{2} \leq x \leq L, \\ \{Q_E\} &= [J_E^{(c)}] \{\Delta\}, & \xi - \frac{L_C}{2} < x < \xi + \frac{L_C}{2}. \end{aligned} \quad (52)$$

Por su parte, la energía de deformación, que depende de las magnitudes ξ , a y L_C , puede ser expresada de la siguiente manera, en términos del vector de esfuerzos viga generalizados $\{Q_E\}$ y de las matrices constitutivas de esfuerzos $[J_E]$ y $[J_E^{(c)}]$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^{\xi - \frac{L_C}{2}} (\{Q_E\}^T [J_E]^{-1} \{Q_E\}) dx + \frac{1}{2} \int_{\xi - \frac{L_C}{2}}^{\xi + \frac{L_C}{2}} (\{Q_E\}^T [J_E^{(c)}]^{-1} \{Q_E\}) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\xi + \frac{L_C}{2}}^L (\{Q_E\}^T [J_E]^{-1} \{Q_E\}) dx. \end{aligned} \quad (53)$$

Dada la naturaleza de los mecanismos de fractura (Broek, 1984; Anderson, 1994) y la disposición del daño en la viga genérica de la Figura 1, puede considerarse que la contribución energética al modo I (apertura) de Mecánica de Fracturas corresponde a los términos asociados a la tensión axial σ_{xx} —esto es, esfuerzo axial N , los esfuerzos flectores M_y y M_z , y el esfuerzo bimomental B —. Además, los términos asociados a los esfuerzos de corte Q_y y Q_z y el torque de Vlasov T_w aportan energía al modo II (cizallamiento), mientras que aquéllos términos asociados a la torsión pura T_{sv} lo hacen al modo III (rasgado). Para una viga de sección genérica y material compuesto de laminado general, los términos asociados a los distintos modos de fractura presentan mutuos acoplamientos. Para vigas con sección genérica y material isótropo, especialmente ortótropo o con laminación simétrico-balanceada, es decir, que cumplen la ley constitutiva (42), puede comprobarse que los términos que aportan energía al modo I se hallan desacoplados. En estas condiciones, el criterio de Griffith (1921) permite expresar el factor de intensidad de tensiones del modo I de Mecánica de Fracturas de la siguiente manera

$$K_I^{(G)}(a, \xi, L_C) = \sqrt{\frac{eE^*}{1 - (\nu^*)^2} \frac{\partial U_I(a, \xi, L_C)}{\partial a}}. \quad (54)$$

siendo U_I la energía de deformación asociada al modo I, es decir a los esfuerzos N , M_y , M_z , y B , la cual se deriva directamente de la expresión (53). Este factor de intensidad de tensiones $K_I^{(G)}$ depende de la ubicación del daño ξ , de su severidad a , pero también de la longitud L_C .

4 PARTICULARIZACIÓN DEL DAÑO GENERAL A FISURA POR FATIGA

4.1 Introducción

Para el caso particular de daño correspondiente al de una fisura por fatiga, la energía de deformación y el factor de intensidad de tensiones asociados al modo I pueden ser obtenidos mediante otro enfoque. Este enfoque deriva de la teoría de vigas de pared delgada y del concepto de integral G^* tridimensional, introducido por Xie et al. (2004) y posteriormente extendido por Cortínez et al. (2009). La integral G^* representa la tasa de liberación de energía por unidad de desplazamiento de la superficie de fisura, en la dirección de apertura de dicha

figura. Su concepto, aunque similar, es diferente al de la clásica integral J de Rice (1968), que representa la liberación de energía pero en la dirección del crecimiento de la fisura.

El factor de intensidad de tensiones obtenido mediante este enfoque para el caso de fisura por fatiga no depende de la longitud L_C . Esta característica permite obtener dicha longitud a partir de comparaciones con la expresión (54), correspondiente al factor de intensidad de tensiones para daño general que sí depende del mencionado parámetro. Luego, empleando la longitud de calibración obtenida, el modelo de daño general reproduce el comportamiento estructural de una viga con daño del tipo fisura por fatiga.

4.2 Energía liberada en términos de la integral G^*

En referencia a la Figura 3a, la integral G^* tridimensional se define como

$$G^* = \int_{\Omega} \left(U_0 \eta_x - \{T\} \frac{\partial \{U\}}{\partial x} \right) d\Omega, \tag{55}$$

donde Ω representa una de las superficies internas de la fisura, definida por los puntos d , g , g' y d' . En la (55) se han definido además las siguientes magnitudes: U_0 como la densidad de energía de deformación, $\{T\} = \{T_x, T_s, T_n\}^T$ como el vector de tensión que actúa sobre Ω , $\{U\} = \{U, V, W\}$ como el vector de desplazamientos y $\bar{\eta} = \{\eta_x, \eta_s, \eta_n\}^T$ como un versor normal a la cara exterior de Ω .

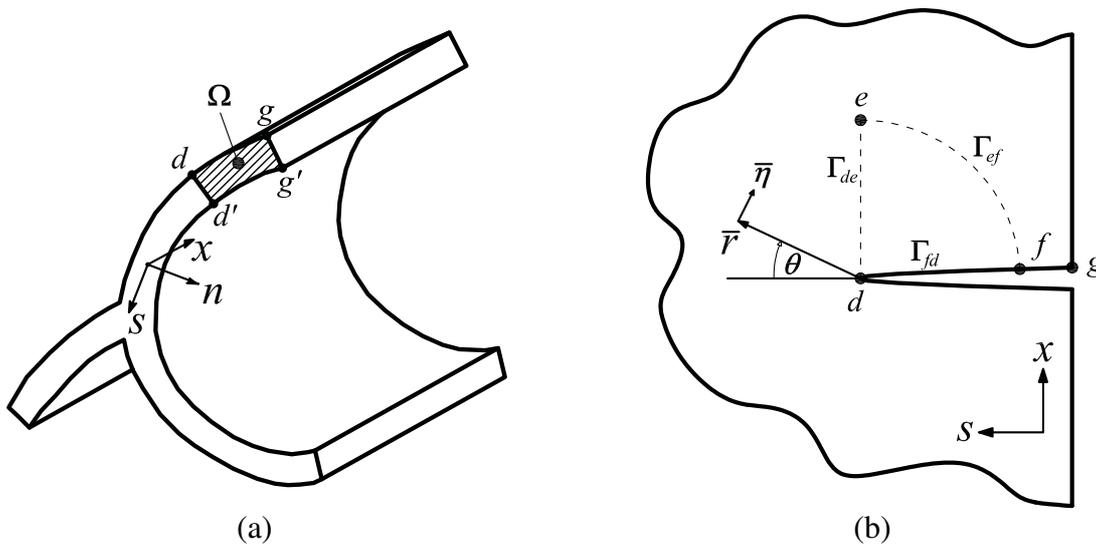


Figura 3: (a) Superficie Ω de definición de la integral G^* tridimensional, para un tramo de viga de pared delgada de sección genérica. (b) Trayectoria de integración para la integral G^* bidimensional y definición del sistema de coordenadas polares asociado a la grieta por fatiga.

Considerando condiciones de plasticidad en pequeña escala, la expresión (55) puede reducirse para un campo de desplazamientos bidimensional en el ala de la viga de la siguiente manera

$$G^* = e \int_{\Gamma_{dfg}} \left(U_0 \eta_x - \{T\} \frac{\partial \{U\}}{\partial x} \right) d\Gamma, \tag{56}$$

donde Γ_{dfg} es una curva que va desde la punta de la fisura hasta el punto g , ubicado en el borde del ala de la viga (ver Figura 3b). Suponiendo un estado plano de deformaciones, y

considerando válidos los campos de tensiones y desplazamientos propuestos por Westergaard (1939) en la zona cercana a la fisura, se obtiene

$$\int_{\Gamma_{de}} \left(U_0 n_x - \{T\} \frac{\partial \{U\}}{\partial x} \right) d\Gamma = 0, \quad (57)$$

empleando la trayectoria recta Γ_{de} como dominio de integración y

$$\int_{\Gamma_{ef}} \left(U_0 n_x - \{T\} \frac{\partial \{U\}}{\partial x} \right) d\Gamma = \frac{K_I^2 \left[1 - (\nu^*)^2 \right]}{2\pi E^*}. \quad (58)$$

si el dominio de integración es la curva Γ_{ef} , correspondiente a un cuarto de círculo.

De forma análoga a como Rice (1968) lo demostró para su integral J , puede comprobarse sencillamente que la integral G^* bidimensional, es independiente de la trayectoria de integración y, por lo tanto, su resolución arroja un valor nulo si la curva elegida como dominio es cerrada, esto es

$$\oint_{\Gamma_{defd}} \left(U_0 n_x - \{T\} \frac{\partial \{U\}}{\partial x} \right) d\Gamma = 0, \quad (59)$$

de lo que sencillamente puede deducirse

$$\int_{\Gamma_{df}} \left(U_0 n_x - \{T\} \frac{\partial \{U\}}{\partial x} \right) d\Gamma = \frac{K_I^2 \left[1 - (\nu^*)^2 \right]}{2\pi E^*}. \quad (60)$$

La expresión anterior puede interpretarse físicamente como la liberación de energía por unidad de movimiento del borde Γ_{df} de la fisura, en dirección x , es decir, en dirección de la apertura de la fisura, para un caso de estado plano de deformaciones. Así, considerando lo expresado por las ecuaciones (56) y (60), la integral G^* puede escribirse como

$$G^* = e \int_{\Gamma_{dfg}} \left(U_0 n_x - \{T\} \frac{\partial \{U\}}{\partial x} \right) d\Gamma = \frac{eK_I^2 \left[1 - (\nu^*)^2 \right]}{2\pi E^*} + e \int_{\Gamma_{fg}} U_0 d\Gamma. \quad (61)$$

Ahora, debido a la acción libre del borde Γ_{fg} , opuesto a la punta de la fisura, su liberación energética, o lo que es lo mismo, la integral en el miembro derecho de la expresión (61) es una cantidad muy pequeña y puede ser despreciada. Conforme a esto, puede afirmarse sin mayor error que

$$G^* = \frac{eK_I^2 \left[1 - (\nu^*)^2 \right]}{2\pi E^*}. \quad (62)$$

4.3 Energía de deformación correspondiente a la zona sin fisura

Considerando la ley constitutiva (37), la expresión (13) correspondiente a la deformación axial $\mathcal{E}_{xx}^{(0)}$, y la (27) que relaciona el esfuerzo placa axial N_{xx} con la tensión axial σ_{xx} , puede expresarse lo siguiente

$$\sigma_{xx} = E^* \{Q_E^{(R)}\}^T [\bar{J}] \{g\}, \quad (63)$$

siendo

$$\{Q_E^{(R)}\} = \{N, M_y, M_z, B\}^T, \quad \{g\} = \{I, Z, Y, \omega_p\}^T, \quad (64)$$

$$[\bar{J}] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ & & J_{33} & J_{34} \\ & & & sim & J_{44} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (65)$$

Suponiendo que la forma de la fisura es similar a un hueco elíptico como el que se muestra en la **Figura 4**, donde el semieje menor c de dicha elipse es muy pequeño, se puede expresar la energía de deformación correspondiente a la zona no dañada de la viga como

$$U_c^{(0)} = \frac{1}{2E^*} \left[\int_{-e/2}^{e/2} \int_S \left(\int_0^{\xi-c} \sigma_{xx}^2 dx + \int_{\xi+c}^L \sigma_{xx}^2 dx \right) dsdn \right]. \quad (66)$$

Luego, introduciendo (65) en (66) y operando convenientemente se obtiene

$$U_c^{(0)} = \left(\int_0^{\xi-c} \{Q_c\} dx + \int_{\xi+c}^L \{Q_c\} dx \right) [J_c^{(0)}] \{G_c^{(0)}\}^T, \quad (67)$$

siendo $[J_c^{(0)}]$ una matriz de orden diez, cuyos elementos se componen de productos y potencias de los elementos de $[\bar{J}]$ y

$$\{Q_c\} = \{N^2, NM_y, M_y^2, NM_z, M_y M_z, M_z^2, NB, M_y B, M_z B, B^2\}, \quad (68)$$

$$\{G_c^{(0)}\} = \{A, S_y, I_y, S_z, I_{yz}, I_z, S_\omega, I_{y\omega}, I_{z\omega}, C_w\}. \quad (69)$$

Si es conocido el estado estático de esfuerzos al que es sometida la viga, o lo que es lo mismo, si se conoce el vector $\{Q_c\}$, la expresión de la energía de deformación para la zona sin fisura (67) dependerá de la ubicación ξ de la fisura y de la amplitud c de la misma.

4.4 Energía de deformación correspondiente a la zona con fisura

En la zona comprendida por $\xi - c < x < \xi + c$, correspondiente al lugar que ocupa la fisura, la energía de deformación se obtiene en función de los esfuerzos para la viga sin fisura, considerando que la variación de dichos esfuerzos es mínima si la grieta es de tamaño pequeño a moderado. Así, en la zona de influencia de la fisura, se propone la siguiente expresión correspondiente a la tensión actuante en dirección axial

$$\sigma_{xx}^{(c)} = \alpha_0 + \alpha_Y Y + \alpha_Z Z + \alpha_\omega \omega_p, \quad (70)$$

donde se considera que la función de alabeo correspondiente a la zona sin fisura sigue siendo válida en la sección variable.

Considerando que en la zona que contiene a la fisura debe mantenerse el equilibrio estático, los coeficientes α_0 , α_Y , α_Z y α_ω se obtienen a partir de resolver simultáneamente las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} N &= \int_{A^{(c)}} \sigma_{xx}^{(c)} dA, & M_z &= \int_{A^{(c)}} y \sigma_{xx}^{(c)} dA, \\ M_y &= \int_{A^{(c)}} z \sigma_{xx}^{(c)} dA, & B &= \int_{A^{(c)}} \omega \sigma_{xx}^{(c)} dA, \end{aligned} \quad (71)$$

donde $A^{(c)}$ es el área de la sección con fisura, que depende de la coordenada longitudinal x , a través de la profundidad de la fisura a . Esto se debe a que, a partir de la condición elíptica de la fisura, dicha profundidad puede expresarse como

$$a(x) = a_0 \sqrt{1 - \frac{(x - \xi)^2}{c^2}}, \quad (72)$$

siendo a_0 y c los semiejes mayor y menor de la elipse, como se muestra en la Figura 4. Los coeficientes a_0 , α_Y , α_Z y α_ω dependen linealmente de los esfuerzos.

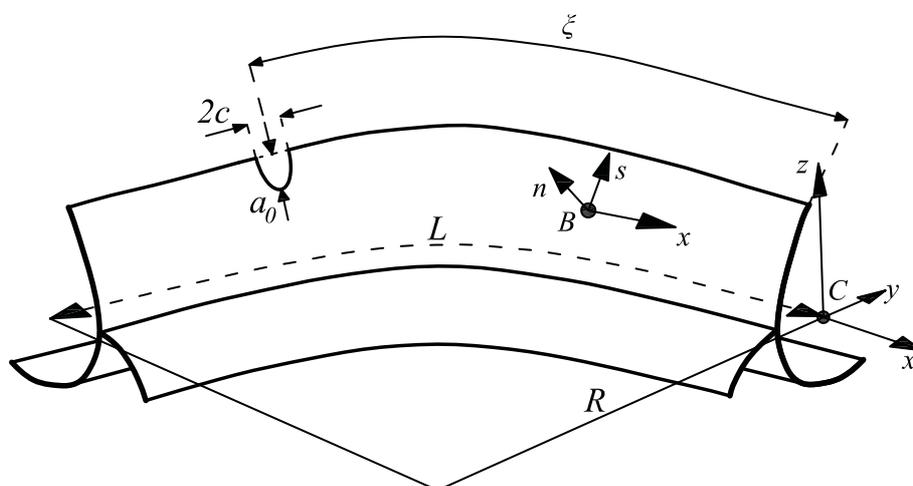


Figura 4: Modelo de fisura elíptica ($c \rightarrow 0$) para una viga curva genérica de pared delgada con sección transversal abierta.

Teniendo en cuenta lo expuesto, la energía de deformación correspondiente a la zona con fisura puede expresarse de la siguiente manera

$$U_c^{(c)} = \frac{1}{2E^*} \left[\int_{-e/2}^{e/2} \int_{s^{(c)}} \int_{\xi-c}^{\xi+c} (\sigma_{xx}^{(c)})^2 dx ds dn \right]. \quad (73)$$

Introduciendo la expresión (70) en la (73), resolviendo la integral en la sección tomando en consideración la simetría de la fisura y reordenando matricialmente se obtiene

$$U_c^{(c)} = \int_{\xi}^{\xi+c} \{Q_c\} [I_{10}] \{\gamma_c\}^T dx, \quad (74)$$

siendo $[I_{10}]$ la matriz identidad de orden diez y

$$\{\gamma_c\} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}\}, \quad (75)$$

con

$$\gamma_1 = \frac{1}{\Psi} \left\{ \left(I_{y\omega}^{(c)} \right)^2 I_z^{(c)} + C_w^{(c)} \left[\left(I_{yz}^{(c)} \right)^2 - I_y^{(c)} I_z^{(c)} \right] - 2 I_{yz}^{(c)} I_{y\omega}^{(c)} I_{z\omega}^{(c)} + I_y^{(c)} \left(I_{z\omega}^{(c)} \right)^2 \right\}, \quad (76)$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{\Psi} \left[C_w^{(c)} I_z^{(c)} S_y^{(c)} - (I_{z\omega}^{(c)})^2 S_y^{(c)} - C_w^{(c)} I_{yz}^{(c)} S_z^{(c)} + I_{y\omega}^{(c)} I_{z\omega}^{(c)} S_z^{(c)} - I_{y\omega}^{(c)} I_z^{(c)} S_\omega^{(c)} + I_{yz}^{(c)} I_{z\omega}^{(c)} S_\omega^{(c)} \right], \quad (77)$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\Psi} \left\{ A^{(c)} \left[-C_w^{(c)} I_z^{(c)} + (I_{z\omega}^{(c)})^2 \right] + C_w^{(c)} (S_z^{(c)})^2 + S_\omega^{(c)} \left(-2I_{z\omega}^{(c)} S_z^{(c)} + I_z^{(c)} S_\omega^{(c)} \right) \right\}, \quad (78)$$

$$\gamma_4 = \frac{2}{\Psi} \left[-C_w^{(c)} I_{yz}^{(c)} S_y^{(c)} + I_{y\omega}^{(c)} I_{z\omega}^{(c)} S_y^{(c)} + C_w^{(c)} I_y^{(c)} S_z^{(c)} - (I_{y\omega}^{(c)})^2 S_z^{(c)} + I_{yz}^{(c)} I_{y\omega}^{(c)} S_\omega^{(c)} - I_{z\omega}^{(c)} I_y^{(c)} S_\omega^{(c)} \right], \quad (79)$$

$$\gamma_5 = \frac{2}{\Psi} \left[A^{(c)} \left(C_w^{(c)} I_{yz}^{(c)} - I_{y\omega}^{(c)} I_{z\omega}^{(c)} \right) - C_w^{(c)} S_y^{(c)} S_z^{(c)} + S_\omega^{(c)} \left(I_{z\omega}^{(c)} S_y^{(c)} + I_{y\omega}^{(c)} S_z^{(c)} - I_{yz}^{(c)} S_\omega^{(c)} \right) \right], \quad (80)$$

$$\gamma_6 = \frac{1}{\Psi} \left\{ A^{(c)} \left[-C_w^{(c)} I_y^{(c)} + (I_{y\omega}^{(c)})^2 \right] + C_w^{(c)} (S_y^{(c)})^2 + S_\omega^{(c)} \left(-2I_{y\omega}^{(c)} S_y^{(c)} + I_y^{(c)} S_\omega^{(c)} \right) \right\}, \quad (81)$$

$$\gamma_7 = \frac{2}{\Psi} \left[-I_{y\omega}^{(c)} I_z^{(c)} S_y^{(c)} + I_{z\omega}^{(c)} I_{yz}^{(c)} S_y^{(c)} + I_{y\omega}^{(c)} I_{yz}^{(c)} S_z^{(c)} - I_{z\omega}^{(c)} I_y^{(c)} S_z^{(c)} - (I_{z\omega}^{(c)})^2 S_\omega^{(c)} + I_y^{(c)} I_z^{(c)} S_\omega^{(c)} \right], \quad (82)$$

$$\gamma_8 = \frac{2}{\Psi} \left[A^{(c)} I_{y\omega}^{(c)} I_z^{(c)} - A^{(c)} I_{z\omega}^{(c)} I_{yz}^{(c)} + I_{z\omega}^{(c)} S_y^{(c)} S_z^{(c)} - I_{y\omega}^{(c)} (S_z^{(c)})^2 - I_z^{(c)} S_y^{(c)} S_\omega^{(c)} + I_{yz}^{(c)} S_z^{(c)} S_\omega^{(c)} \right], \quad (83)$$

$$\gamma_9 = \frac{2}{\Psi} \left[A^{(c)} I_{z\omega}^{(c)} I_y^{(c)} - A^{(c)} I_{y\omega}^{(c)} I_{yz}^{(c)} + I_{z\omega}^{(c)} (S_z^{(c)})^2 + I_{y\omega}^{(c)} S_y^{(c)} S_z^{(c)} + I_{yz}^{(c)} S_y^{(c)} S_\omega^{(c)} - I_y^{(c)} S_z^{(c)} S_\omega^{(c)} \right], \quad (84)$$

$$\gamma_{10} = \frac{1}{\Psi} \left\{ A^{(c)} \left[(I_{yz}^{(c)})^2 - I_y^{(c)} I_z^{(c)} \right] + I_z^{(c)} (S_y^{(c)})^2 + S_z^{(c)} \left(-2I_{yz}^{(c)} S_y^{(c)} + I_y^{(c)} S_z^{(c)} \right) \right\}, \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \Psi = E^* \left\{ A^{(c)} \left\{ (I_{y\omega}^{(c)})^2 I_z^{(c)} + C_w^{(c)} \left[(I_{yz}^{(c)})^2 - I_y^{(c)} I_z^{(c)} \right] - 2I_{yz}^{(c)} I_{y\omega}^{(c)} I_{z\omega}^{(c)} + I_y^{(c)} (I_{z\omega}^{(c)})^2 \right\} - \right. \\ \left. (I_{z\omega}^{(c)} S_y^{(c)} - I_{y\omega}^{(c)} S_z^{(c)})^2 + C_w^{(c)} \left[I_z^{(c)} (S_y^{(c)})^2 - 2I_{yz}^{(c)} S_y^{(c)} S_z^{(c)} + I_y^{(c)} (S_z^{(c)})^2 \right] + \right. \\ \left. 2 \left(-I_{y\omega}^{(c)} I_z^{(c)} S_y^{(c)} + I_{yz}^{(c)} I_{z\omega}^{(c)} S_y^{(c)} + I_{yz}^{(c)} I_{y\omega}^{(c)} S_z^{(c)} - I_y^{(c)} I_{z\omega}^{(c)} S_z^{(c)} \right) S_\omega^{(c)} + \right. \\ \left. \left[-(I_{yz}^{(c)})^2 + I_y^{(c)} I_z^{(c)} \right] (S_\omega^{(c)})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (86)$$

Si se conoce el vector $\{Q_c\}$, la expresión de la energía de deformación para la zona con fisura (74) dependerá de la ubicación ζ de la fisura y de la amplitud c de la misma.

4.5 Tasa de liberación de energía y factor de intensidad de tensiones

La energía de deformación total de la viga puede expresarse como $U_c = U_c^{(0)} + U_c^{(c)}$ a partir de las expresiones (67) y (74). Por su parte, el Teorema de Clapeyron permite expresar el trabajo de las cargas externas de un sistema en equilibrio como $V_c = 2 U_c$. Además, la energía potencial total del sistema está dada por $\Pi = U_c - V_c = -U_c$. Siguiendo el razonamiento de Xie et al. (2004), la tasa de liberación de energía por unidad de desplazamiento de la superficie libre de fisura en la dirección de apertura de dicha fisura (dirección x) puede escribirse como

$$G^* = \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial c} \right) = \lim_{c \rightarrow 0} \left(\frac{\partial U_c}{\partial c} \right). \quad (87)$$

Así, reemplazando convenientemente, la (87) puede reescribirse de la siguiente manera

$$G^* = \lim_{c \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial c} \left[\left(\int_0^{\xi-c} \{Q_c\} dx + \int_{\xi+c}^L \{Q_c\} dx \right) [J_c^{(0)}] \{G_c^{(0)}\}^T + \int_{\xi}^{\xi+c} \{Q_c\} [I_{10}] \{\gamma_c\}^T dx \right] \right\}. \quad (88)$$

La expresión (88) representa la tasa de liberación de energía medida en dirección de la apertura de la fisura. Es una expresión general que depende de la profundidad a_0 del daño en cuestión, pero que además pueden depender de la ubicación ξ al depender los esfuerzos de la coordenada x .

Ahora bien, conteniendo magnitudes que físicamente representan lo mismo, será posible igualar las expresiones (62) y (88) para despejar de allí el factor de intensidades del modo I de Mecánica de Fracturas, K_I . Así, para vigas de sección abierta con fisura por fatiga puede obtenerse

$$K_I(a_0, \xi) = \sqrt{\frac{2\pi E^*}{e[1-(\nu^*)^2]}} \cdot \left\{ \lim_{c \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial c} \left[\left(\int_0^{\xi-c} \{Q_c\} dx + \int_{\xi+c}^L \{Q_c\} dx \right) [J_c^{(0)}] \{G_c^{(0)}\}^T + \int_{\xi}^{\xi+c} \{Q_c\} [I_{10}] \{\gamma_c\}^T dx \right] \right\} \right\}^{1/2}, \quad (89)$$

expresión que depende de los esfuerzos generalizados axial N , flectores M_y y M_z , bimomental B , de la geometría de la viga a través de las características de las secciones con y sin daño, de la geometría del daño en cuestión a partir de sus parámetros a_0 y ξ y del material a partir de sus propiedades E^* y ν^* .

4.6 Calibración del modelo viga

La expresión (89), obtenida para una fisura por fatiga en términos de la integral G^* y de la teoría de vigas de pared delgada, debe ser equivalente a la (54), asociada un daño de tipo general. Esta correspondencia es la que permite obtener el valor de la longitud equivalente de daño, L_C , que a su vez permite la calibración del modelo viga.

Para una viga de geometría y materiales conocidos, si se consideran los mismos esfuerzos actuantes, la longitud L_C puede ser obtenida en forma numérica mediante la minimización de una función objetivo de carácter discreto F_K dada por

$$\min \left[F_K(L_C) = \sum_{j=1}^{n_\xi} \sum_{i=1}^{n_a} \sqrt{\left(\frac{K_I^{(G)}(a_i, \xi_j, L_C) - K_I(a_i, \xi_j)}{K_I(a_i, \xi_j)} \right)^2} \right], \quad (90)$$

donde $K_I^{(G)}$ corresponde al factor de intensidad de tensiones para daño general de la expresión (54). Por otra parte, K_I se asocia a la misma magnitud física, pero para el tipo de daño particular correspondiente a fisura por fatiga, es decir, corresponde a la expresión (89).

Los valores de K_I se calculan previamente al cálculo de optimización mediante la (89). Cada uno de estos valores calculados se asocia a una severidad y a una ubicación de fisura, es decir, a una cupla (a_m, ξ_m) . Los números n_a y n_ξ corresponden a la cantidad de severidades y ubicaciones de daño empleadas en el cálculo de optimización.

5 IDENTIFICACIÓN DE DAÑO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE LA RESPUESTA VIBRATORIA LIBRE

El problema de identificación de los parámetros de daño estructural en vigas de pared delgada se realiza empleando las frecuencias naturales de vibración como indicadores de daño. La identificación se realiza mediante comparaciones entre valores de frecuencias naturales experimentales y aquéllos predichos por el presente modelo unidimensional.

Para considerar la posibilidad de existencia de varias fisuras, se definen vectores conteniendo los parámetros de daño que deberán ser identificados de la siguiente manera

$$\{X\} = \{X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n\} = \{\xi_1/L, \xi_2/L, \dots, \xi_i/L, \dots, \xi_n/L\}, \quad (91)$$

$$\{\Lambda\} = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_i, \dots, \Lambda_n\} = \{a_1/b, a_2/b, \dots, a_i/b, \dots, a_n/b\}, \quad (92)$$

donde n es el número de fisuras presentes. Los parámetros han sido normalizados con respecto a la longitud de la viga L y a una dimensión de la sección transversal b , que puede ser el ancho de ala del perfil donde se ubica la fisura.

Los parámetros de daño, componentes de los vectores $\{X\}$ y $\{\Lambda\}$, son identificados mediante la minimización de la función objetivo $T(\{X\}, \{\Lambda\})$. Este problema de optimización puede plantearse como

$$\min \left[T(\{X\}, \{\Lambda\}) = \frac{100}{q} \sum_{k=1}^q \sqrt{\left(\frac{F^{(k)}(\{X\}, \{\Lambda\}) - f^{(k)}}{f^{(k)}} \right)^2} \right], \quad (93)$$

$$\left(\frac{a_i}{b}, \frac{\xi_i}{L} \right) \in [0, 1],$$

siendo q es el número de frecuencias naturales en consideración en el cálculo, $f^{(k)}$ representa una medición experimental de la k -ésima frecuencia natural y $F^{(k)}(\{X\}, \{\Lambda\})$, la predicción del modelo unidimensional de la mencionada frecuencia.

Para el caso particular en el que el daño presente es una única fisura, los vectores de las expresiones (91-92) se reducen a valores individuales de ubicación X y profundidad Λ , respectivamente. En este caso, la función objetivo de la expresión (93) se reduce también a la forma más simple $T(X, \Lambda)$.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

6.1 Introducción

En la presente sección se evalúa la capacidad del modelo teórico de reproducir resultados experimentales, como así también se realiza una identificación de daños por fatiga para distintos valores de los parámetros ξ/L y a/b .

La discretización de las ecuaciones (19-22) se realiza mediante el método de elementos finitos. Se emplea un elemento isoparamétrico de cinco nodos y aproximación de orden cuártica, denominado ISOP5N (Piovan y Cortínez, 2007; Dotti et al., 2011a). Para considerar la presencia de daño se introduce un “elemento dañado” en el cual se impone que su longitud sea igual a la longitud equivalente L_C , previamente estimada. En la resolución, se emplea un total de 40 elementos ISOP5N.

Si bien se realizan cálculos para distintas configuraciones geométricas de vigas, se enfatiza el caso de una viga de sección transversal U, por ser este un caso lo suficientemente general al presentar acoplamientos en sus movimientos flexionales y torsionales.

Los materiales empleados en el análisis son: el acero al carbono, cuyas propiedades son $E = 210$ GPa, $G = 80.76$ GPa, $\nu = 0.3$ y $\rho = 7830$ kg/m³ y el grafito-epoxi (AS4/3501), con las siguientes propiedades son $E_1 = 144$ GPa, $E_2 = 9.65$ GPa, $G_{12} = 4.14$ GPa, $G_{13} = 4.14$ GPa, $G_{23} = 3.45$ GPa, $\nu_{12} = 0.3$, $\nu_{13} = 0.3$, $\nu_{23} = 0.5$ y $\rho = 1389$ kg/m³ y laminaciones simétrico-balanceadas.

Los resultados experimentales son simulados a partir de modelos de elementos finitos tipo lámina, programados en el código ABAQUS 6.7 ®. Se emplean en cada caso alrededor de 4000 elementos cuadriláteros multipropósito S4R.

El problema de optimización de la expresión (93) se resuelve mediante el algoritmo convencional de Evolución Diferencial (ED), tal como fue introducido originalmente por Storn y Price (1997).

Todos los cálculos se realizan con la ayuda de un microprocesador AMD Athlon 64 5200+, 3 Gb de memoria RAM, montados sobre una placa madre ASUS M2N-MX-SE+, empleando *Mathematica*, bajo plataforma Windows XP 32-bit.

6.2 Estimación de la longitud equivalente de daño

La expresión (90) introduce la función objetivo discreta F_K cuya minimización permite la obtención de la longitud de calibración L_C . En esta sub-sección se obtiene L_C para vigas de distintas características geométricas y constructivas. Cada valor obtenido es característico de una viga asociada y es el que se emplea luego para su análisis dinámico. Para todos los cálculos de F_K se emplearon $n_a = 7$ profundidades y $n_\xi = 7$ ubicaciones.

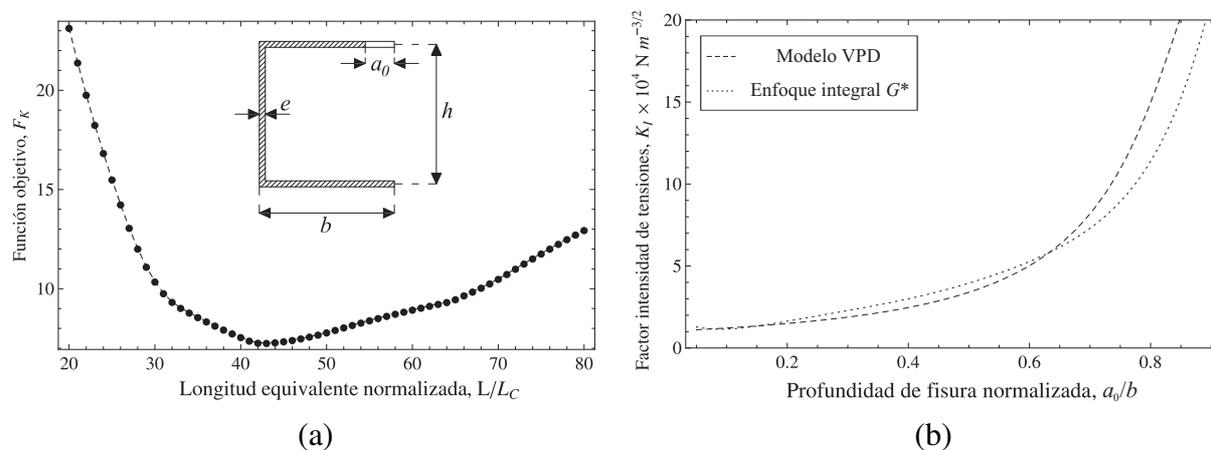


Figura 5: Gráficas correspondientes a un perfil U cantiléver recto con fisura por fatiga. Material: Acero al carbono. Dimensiones: $h = 0.2$ m, $b = 0.1$ m, $e = 0.01$ m, $L = 2$ m. Esfuerzos aplicados en el extremo libre: $N = 1$ N, $M_y = 1$ Nm, $M_z = 1$ Nm, $B = 1$ Nm². (a) Gráfica de la función objetivo F_K vs. longitud equivalente normalizada L/L_C . (b) Gráfica del factor de intensidad de tensiones del modo I vs. profundidad de daño normalizada, para ubicación de daño $\xi/L = 0.1$. Comparación entre el modelo viga (VPD) empleando $L/L_C = 43$ y el enfoque tipo integral G^* .

En las Figuras 5a, 6a y 7a se muestran gráficas de la función objetivo F_K y su dependencia con respecto a la longitud equivalente normalizada L/L_C . La función F_K es de rápida evaluación numérica, es función de una única variable y presenta un único mínimo global, por lo que mediante un cálculo de optimización sencillo se determina, para cada caso, la longitud equivalente óptima. De manera asociada a las gráficas de la función objetivo, se presentan comparaciones entre los factores de intensidad de tensiones obtenidos mediante consideraciones de la integral G^* y a partir del modelo viga, empleando la longitud equivalente óptima obtenida.

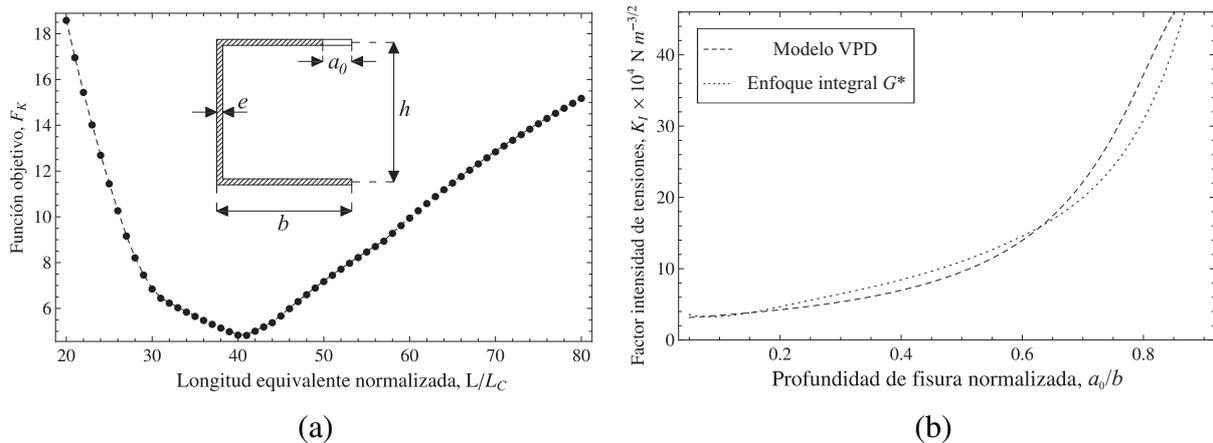


Figura 6: Gráficas correspondientes a un perfil U cantiléver recto con fisura por fatiga. Material: Grafito-Epoxi (AS4/3501), laminado: {0/90/90/0}. Dimensiones: $h = 0.2$ m, $b = 0.1$ m, $e = 0.01$ m, $L = 2$ m. Esfuerzos aplicados en el extremo libre: $N = 1$ N, $M_y = 1$ Nm, $M_z = 1$ Nm, $B = 1$ Nm². (a) Gráfica de la función objetivo F_K vs. longitud equivalente normalizada L/L_C . (b) Gráfica del factor de intensidad de tensiones del modo I vs. profundidad de daño normalizada, para ubicación de daño $\xi/L = 0.2$. Comparación entre el modelo viga (VPD) empleando $L/L_C = 41$ y el enfoque tipo integral G^* .

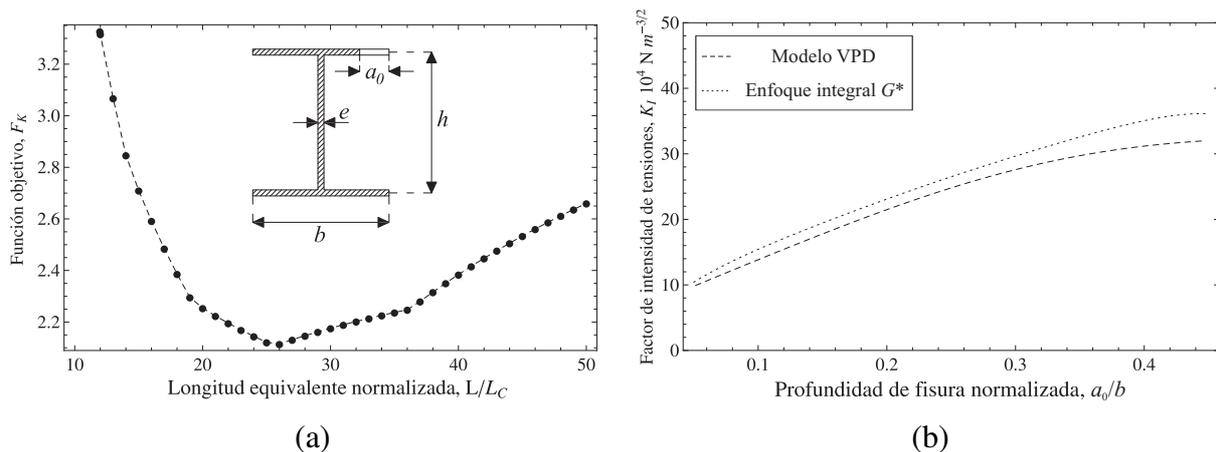


Figura 7: Gráficas correspondientes a un perfil H cantiléver recto con fisura por fatiga. Material: Acero al carbono. Dimensiones: $h = 0.2$ m, $b = 0.1$ m, $e = 0.004$ m, $L = 2$ m. Esfuerzos aplicados en el extremo libre: $N = 1$ N, $M_y = 1$ Nm, $M_z = 1$ Nm, $B = 1.5$ Nm². (a) Gráfica de la función objetivo F_K vs. longitud equivalente normalizada L/L_C . (b) Gráfica del factor de intensidad de tensiones del modo I vs. profundidad de daño normalizada, para ubicación de daño $\xi/L = 0.64$. Comparación entre el modelo viga (VPD) empleando $L/L_C = 26$ y el enfoque tipo integral G^* .

De los resultados presentados se comprueba la coherencia entre los dos enfoques: empleando la longitud L_C calculada, las curvas del factor de intensidad de tensiones obtenidas empleando la teoría de vigas de pared delgada presentan un buen acuerdo con las curvas de idéntica magnitud física obtenidas mediante consideraciones de la integral G^* . Así, empleando la longitud equivalente en el modelo viga, se introducen implícitamente en el mismo los conceptos de la Mecánica de Fracturas.

6.3 Validación del modelo unidimensional: Análisis de frecuencias naturales

Se evalúa la capacidad del modelo unidimensional para reproducir el comportamiento vibratorio natural de vigas de pared delgada con presencia de daño estructural. Para ello, se realiza una validación del modelo viga mediante comparaciones con mediciones experimentales simuladas numéricamente. Estas simulaciones se obtienen a partir de modelos

tridimensionales de elementos cáscara programados en ABAQUS 6.7®.

La [Tabla 1](#) muestra, para una viga recta de sección U, la comparación de frecuencias entre los modelos unidimensional y tridimensional, para casos donde existe la presencia de dos fisuras por fatiga. El acuerdo es bueno, alcanzándose una diferencia máxima del 3.22% y una diferencia promedio de 1.15%.

ξ_1/L	a_1/b	ξ_2/L	a_2/b	$f^{(1)}$		$f^{(2)}$		$f^{(3)}$		$f^{(4)}$	
				ABAQUS	Modelo	ABAQUS	Modelo	ABAQUS	Modelo	ABAQUS	Modelo
0.25	0.50	0.50	0.75	21.041	20.520	30.200	30.030	70.291	69.530	105.012	104.497
0.25	0.75	0.50	0.75	22.080	21.612	30.091	29.953	72.522	71.785	119.450	118.684
0.12	0.50	0.50	0.75	20.630	19.966	30.052	29.816	69.570	68.756	101.445	98.252
0.25	0.50	0.50	0.50	21.970	21.509	30.348	30.262	72.211	71.587	125.041	123.370
0.25	0.50	0.25	0.25	22.871	22.736	30.390	30.381	74.091	73.930	129.193	128.629

Tabla 1: Comparación de las primeras cuatro frecuencias naturales, en Hz, para viga recta cantiléver de sección transversal U con daño de doble fisura por fatiga. Frecuencias naturales sin daño, en Hz: 23.151, 30.430, 74.596, 129.88. Material: Acero al carbono. Dimensiones: $h = 0.2$ m, $b = 0.2$ m, $e = 0.01$ m, $L = 2$ m, $L/L_C = 43$.

ξ_1/L	a_1/b	ξ_2/L	a_2/b	$f^{(1)}$		$f^{(2)}$		$f^{(3)}$		$f^{(4)}$		$f^{(5)}$	
				ABAQUS	Modelo								
0.30	0.50	0.45	0.75	1.803	1.788	8.014	7.772	15.151	14.871	35.828	34.277	57.794	56.698
0.30	0.50	0.75	0.75	1.821	1.801	8.540	8.443	15.743	15.654	38.284	36.757	56.345	54.746
0.15	0.50	0.45	0.75	1.775	1.759	7.802	7.569	15.352	15.040	34.514	32.908	56.820	55.741
0.30	0.50	0.45	0.50	1.831	1.820	8.422	8.331	15.638	15.502	40.089	39.644	60.050	59.479
0.30	0.25	0.60	0.25	1.832	1.828	8.874	8.775	16.343	16.191	42.057	42.585	60.940	60.335

Tabla 2: Comparación de las primeras cinco frecuencias naturales, en Hz, para viga curva cantiléver de sección transversal U (alas hacia el centro de curvatura) con daño de doble fisura por fatiga. Frecuencias naturales sin daño, en Hz: 1.833, 8.879, 16.378, 42.273, 61.117. Material: Acero al carbono. Dimensiones: $h = 0.2$ m, $b = 0.2$ m, $e = 0.01$ m, $R = 4.71$ m, $R = 3$ m, $L/L_C = 42$.

Para vigas curvas de sección U, las [Tablas 2](#) y [3](#) muestran una comparación similar a la anterior, considerando materiales isótropo y compuesto, respectivamente. Las respectivas máximas diferencias son del 3.97% y 3.76%, con aceptables diferencias en promedio del 1.73% y 1.77%.

ξ_1/L	a_1/b	ξ_2/L	a_2/b	$f^{(1)}$		$f^{(2)}$		$f^{(3)}$		$f^{(4)}$	
				ABAQUS	Modelo	ABAQUS	Modelo	ABAQUS	Modelo	ABAQUS	Modelo
0.30	0.50	0.45	0.75	1.929	1.975	8.290	8.512	14.919	14.579	35.709	34.367
0.30	0.50	0.75	0.75	1.958	1.975	8.959	9.284	14.996	15.444	36.172	37.122
0.15	0.50	0.45	0.75	1.855	1.907	8.078	8.132	15.078	14.679	33.661	34.038
0.30	0.50	0.45	0.50	1.961	1.976	8.830	9.132	15.204	15.329	38.575	38.658
0.30	0.25	0.60	0.25	1.976	1.979	9.370	9.444	15.611	15.681	39.465	39.587

Tabla 3: Comparación de las primeras cuatro frecuencias naturales, en Hz, para viga curva cantiléver de sección transversal U (alas hacia el centro de curvatura) con daño de doble fisura por fatiga. Frecuencias naturales sin daño, en Hz: 1.981, 9.486, 15.757, 39.829. Material: Grafito-Epoxi (AS4/3501), laminado: {0/90/90/0}. Dimensiones: $h = 0.2$ m, $b = 0.2$ m, $e = 0.01$ m, $R = 4.71$ m, $R = 3$ m, $L/L_C = 153$.

En general, incluyendo otros casos analizados, las diferencias máximas se hallan en el orden del 3.5%, para vigas con diferentes secciones transversales y condiciones de borde. Si bien esta precisión del modelo unidimensional es muy buena en términos generales, es menester remarcar que los resultados numéricos del modelo cáscara tridimensional corresponden a la simulación de mediciones experimentales en condiciones óptimas. Y aunque la obtención experimental de frecuencias naturales puede en general realizarse con muy buena precisión, un 3.5% de diferencia puede convertirse fácilmente en un 5% si se cometen errores de medición, tanto humanos como de instrumental. De todas maneras, si se

acepta que los resultados del modelo tridimensional corresponden a mediciones precisas, las escasas diferencias entre modelos permiten predecir la posibilidad de éxito en la identificación de los parámetros de daño, empleando como indicador a las frecuencias naturales.

6.4 Identificación de daño

Las Tablas 4 y 5 presentan los resultados de la estimación de ubicaciones y profundidades dadas respectivamente por $\{X\} = \{X_1, X_2\}$ y $\{\Lambda\} = \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$, para dos fisuras presentes en un perfil U cantiléver curvo. Además, la Tabla 6 presenta el caso particular de viga recta.

Los parámetros estimados corresponden a aquéllos que hacen mínima la función $T(\{X\}, \{\Lambda\})$. Para cada iteración, el tiempo de cómputo está en el orden de los 100 segundos, considerando cinco vectores de parámetros. El valor adoptado para la constante de amplificación del algoritmo ED es 0.8, mientras que para la probabilidad de mutación, se emplea el valor 0.5.

Experimental				Estimación				Error			
Ubicación		Profundidad		Ubicación		Profundidad		Ubicación		Profundidad	
X_1	X_2	Λ_1	Λ_2	X_1	X_2	Λ_1	Λ_2	X_1	X_2	Λ_1	Λ_2
0.300	0.450	0.500	0.750	0.350	0.530	0.639	0.759	5.00	8.00	13.90	0.90
0.300	0.750	0.500	0.750	0.214	0.858	0.399	0.824	-8.60	10.80	-10.10	7.40
0.150	0.450	0.500	0.750	0.149	0.572	0.451	0.763	-0.10	12.20	-4.90	1.30
0.300	0.450	0.500	0.500	0.364	0.577	0.567	0.544	6.40	12.70	6.70	4.40
0.300	0.600	0.250	0.250	0.435	0.726	0.264	0.332	13.50	12.60	1.40	8.20

Tabla 4: Identificación de los parámetros de daño empleando frecuencias naturales ($q = 5$) en una viga curva cantiléver de sección transversal U, con daño de doble fisura por fatiga. Material: Acero al carbono. Dimensiones: $h = 0.2$ m, $b = 0.2$ m, $e = 0.01$ m, $R = 4.71$ m, $R = 3$ m, $L/L_C = 42$.

Experimental				Estimación				Error			
Ubicación		Profundidad		Ubicación		Profundidad		Ubicación		Profundidad	
X_1	X_2	Λ_1	Λ_2	X_1	X_2	Λ_1	Λ_2	X_1	X_2	Λ_1	Λ_2
0.300	0.450	0.500	0.750	0.294	0.549	0.641	0.751	-0.60	9.90	14.10	0.10
0.300	0.750	0.500	0.750	0.206	0.849	0.587	0.884	-9.40	9.90	8.70	13.40
0.150	0.450	0.500	0.750	0.135	0.593	0.624	0.709	-1.50	14.30	12.40	-4.10
0.300	0.450	0.500	0.500	0.189	0.360	0.485	0.621	-11.10	-9.00	-1.50	12.10
0.300	0.600	0.250	0.250	0.227	0.535	0.349	0.235	-7.30	-6.50	9.90	-1.50

Tabla 5: Identificación de los parámetros de daño empleando frecuencias naturales ($q = 5$) en una viga curva cantiléver de sección transversal U, con daño de doble fisura por fatiga. Material: Grafito-Epoxi (AS4/3501), laminado: $\{0/90/90/0\}$. Dimensiones: $h = 0.2$ m, $b = 0.2$ m, $e = 0.01$ m, $R = 4.71$ m, $R = 3$ m, $L/L_C = 153$.

Experimental				Estimación				Error			
Ubicación		Profundidad		Ubicación		Profundidad		Ubicación		Profundidad	
X_1	X_2	Λ_1	Λ_2	X_1	X_2	Λ_1	Λ_2	X_1	X_2	Λ_1	Λ_2
0.250	0.500	0.500	0.750	0.290	0.580	0.609	0.771	4.00	8.00	10.90	2.10
0.250	0.750	0.500	0.750	0.269	0.758	0.577	0.780	1.90	0.80	7.70	3.00
0.125	0.500	0.500	0.750	0.210	0.601	0.590	0.791	8.50	10.10	9.00	4.10
0.250	0.500	0.500	0.500	0.205	0.453	0.500	0.580	-4.50	-4.70	0.00	8.00
0.250	0.500	0.250	0.250	0.223	0.485	0.281	0.349	-2.70	-1.50	3.10	9.90

Tabla 6: Identificación de los parámetros de daño empleando frecuencias naturales ($q = 4$) en una viga recta cantiléver de sección transversal U, con daño de doble fisura por fatiga. Material: Acero al carbono. Dimensiones: $h = 0.2$ m, $b = 0.2$ m, $e = 0.01$ m, $L = 2$ m, $L/L_C = 43$.

La convergencia total se alcanza generalmente en el rango de 30 a 60 iteraciones. Los

máximos errores individuales se hallan por debajo del 15% tanto para ubicación como para profundidad de fisura. Esto representa una detección exitosa, considerando que se emplean frecuencias naturales como indicadores de daño.

7 CONCLUSIONES

Se presenta un modelo teórico simplificado que permite simular el comportamiento dinámico de vigas curvas y rectas de pared delgada, las cuales pueden presentar más de un daño por fatiga. El empleo de un modelo unidimensional lineal se traduce en ventajas en cuanto a versatilidad y simplicidad, características fundamentales en aplicaciones de monitoreo de daño en tiempo real. El material de construcción utilizado puede ser tanto isótropo como compuesto con secuencia de laminado simétrica y balanceada o especialmente ortótropo.

El daño se modela como un tramo longitudinal de viga presentando una sección transversal modificada. Debido a su sencilla formulación matemática, la forma de considerar el daño general que se sugiere en este trabajo es de fácil implementación en un modelo de elementos finitos. Fácilmente se permite designar un “elemento finito dañado” para cada falla presente, mediante la asignación de las propiedades seccionales correspondientes. Esta forma de consideración del daño presenta ventajas con respecto al empleo de modelos continuos de viga dañada, los cuales en general poseen una estructura matemática compleja.

El enfoque unidimensional prueba ser consistente con resultados numéricos obtenidos, en comparación con modelos tridimensionales de elementos lámina. Aceptando que los resultados del modelo tridimensional corresponden a mediciones precisas, las escasas diferencias entre modelos permiten predecir la posibilidad de éxito en la identificación de los parámetros asociados a un daño moderado, empleando como indicador a las frecuencias naturales.

La identificación corresponde a la estimación de ubicación y severidad de fisuras por fatiga. Se realiza empleando indicadores clásicos y relativamente sencillos de medir como lo son las primeras frecuencias naturales. Para ello, se minimiza una función objetivo mediante la aplicación del algoritmo de Evolución Diferencial. Los resultados de la detección, con errores máximos menores al 15%, son especialmente exitosos si se tiene en cuenta la conocida baja sensibilidad de las frecuencias naturales como indicadores de daño.

8 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y del CONICET. El presente artículo forma parte del estudio de tesis doctoral realizado por Franco E. Dotti, bajo la dirección de Víctor H. Cortínez y Marcelo T. Piovan, en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

REFERENCIAS

- Anderson, T.L., *Fracture mechanics fundamentals and applications*, CRC Press, 1994.
- Barbero, E.J., *Introduction to composite material design*, Taylor and Francis Inc., 1999.
- Broek, D., *Elementary engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, 1984.
- Cheeseman, B.A., Santare, M.H., y O’Toole, B.J., Flexural failure of notched curved composite beams, *Engineering fracture mechanics*, 54(4): 479–498, 1996.
- Chondros, T.G., y Dimarogonas, A.D., A consistent cracked bar vibration theory, *Journal of Sound and Vibration*, 200(3): 303–313, 1997).
- Cortínez, V.H., y Dotti, F.E, Un modelo numérico para la dinámica de vigas de pared delgada fracturadas por fatiga: aplicación a la identificación de daños, *Mecánica Computacional*, 29:

- 431–488, 2010.
- Cortínez, V.H., Dotti, F.E., y Piovan, M.T., Factor de intensidad de tensiones del modo I para vigas abiertas de pared delgada, *Mecánica Computacional*, 28: 955–971, 2009.
- Cortínez, V.H., Piovan, M.T., y Dotti, F.E., Dynamics of cracked thin-walled beams, *Proceedings of the 19th COBEM*. 19th International Congress of Mechanical Engineering, 2007.
- Cortínez, V.H., Piovan, M.T., y Rossi, R.E., Out-of-plane vibrations of thin-walled curved beams considering shear flexibility, *Structural Engineering and Mechanics*, 8: 257–272, 1999.
- Cortínez, V.H. y Rossi, R.E., Dinámica de vigas de sección abierta de pared delgada deformables por corte sujetas a un estado inicial de tensiones, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 14(3): 293–316, 1998.
- Dimarogonas, A.D., Vibration of cracked structures: a state of the art review, *Engineering Fracture Mechanics*, 55(5): 831–857, 1996.
- Doebling, S.W., Farrar, C.R., y Prime, M.B., A summary review of vibration-based damage identification methods, *Identification Methods, The Shock and Vibration Digest*, 30: 91–105, 1998.
- Dotti, F.E., Cortínez, V.H., y Piovan, M.T., Identification of damage in thin-walled curved beams by means of vibration analysis, *Proceedings of the XIV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, DINAME 2011, 2011a.
- Dotti, F.E., Piovan, M.T., y Cortínez, V.H., Vibrations of damaged thin-walled beams, *Thin-Walled Structures* (Enviado para publicación), 2011b.
- Dotti, F.E., Piovan, M.T., y Cortínez, V.H., Identification of damage in open thin-walled beams by means of vibration analysis, *Engineering Fracture Mechanics* (Enviado para publicación), 2011c.
- Griffith, A.A., The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A221: 163–198, 1921.
- Kim, J.-T., Ryu, Y.-S., Cho, H.-M., y Stubbs, N., Damage identification in beam-type structures: frequency based method vs. mode shape based method, *Engineering Structures*, 25: 57–67, 2003.
- Piovan, M.T., y Cortínez, V.H., Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability, *Thin-Walled Structures*, 45: 759–789, 2007.
- Rice, J.R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 35: 379–386, 1968.
- Saavedra, P.N., y Cuitiño, L.A., Crack detection and vibration behavior of cracked beams, *Computer & Structures*, 79: 1451–1459, 2001.
- Salawu, O.S., Detection of structural damage through changes in frequency: A review, *Engineering Structures*, 19(9): 718–723, 1997.
- Storn, R., y Price, K., Differential Evolution – A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *Journal of Global Optimization* 11: 341–359, 1997.
- Vlasov, V.Z., *Thin Walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961.
- Westergaard, H.M., Bearing pressures and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 6: A49-53, 1939.
- Xie, Y.J., Wang, X.H., y Lin, Y.C., Stress intensity factors for cracked rectangular cross-section thin-walled tubes. *Engineering Fracture Mechanics*, 71: 1501–1513, 2004.