

## **ANÁLISIS DEL AMORTIGUAMIENTO PROPORCIONAL A LA RIGIDEZ TANGENTE EN SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES**

**Oscar Möller, Marcelo Rubinstein, Juan Pablo Ascheri**

*Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE), Universidad Nacional de Rosario, Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina, [moller@fceia.unr.edu.ar](mailto:moller@fceia.unr.edu.ar)*

**Palabras clave:** Dinámica estructural, Amortiguamiento, No lineal, Sismorresistente.

**Resumen.** La disipación de energía en estructuras solicitadas por acciones dinámicas es considerada en las fuerzas proporcionales a la velocidad: amortiguamiento viscoso o elástico, y en las fuerzas proporcionales a los desplazamientos: amortiguamiento histerético debido al comportamiento no lineal físico. Usualmente los programas de análisis dinámico de estructuras tienen implementado como amortiguamiento elástico el criterio de Rayleigh, clásico, es decir proporcional a la masa y a la rigidez inicial del sistema. Recientemente se ha reconocido que ese criterio sobre estima la disipación cuando el sistema se encuentra en el campo plástico, siendo más aproximado considerar el amortiguamiento proporcional a la masa y a la rigidez tangente en cada instante. Se presenta en este trabajo la implementación computacional de ambos criterios, en el programa de análisis dinámico no lineal DINLI ya desarrollado en años anteriores. Se muestran y discuten los resultados de desplazamientos máximos y energías disipadas con ambos criterios, en aplicaciones numéricas a sistemas de un grado de libertad y múltiples grados de libertad solicitados por acelerogramas correspondientes a diferentes tipos de terremotos.

## INTRODUCCIÓN

La disipación de energía en estructuras solicitadas por acciones dinámicas es considerada en las fuerzas proporcionales a la velocidad, que es el llamado amortiguamiento viscoso equivalente, o elástico, y en las fuerzas proporcionales a los desplazamientos, que es el amortiguamiento histerético debido al comportamiento no lineal físico.

En el análisis dinámico no lineal paso a paso en el tiempo (ITHA) es usual modelar el amortiguamiento elástico a partir de un porcentaje del amortiguamiento crítico. Hay varias maneras de definir este efecto, pero la principal diferencia es si las fuerzas de amortiguamiento están referidas a la rigidez inicial o a la rigidez tangente en cada instante de tiempo, tema que se discute en este trabajo.

La disipación de energía por el comportamiento histerético ha sido analizada con diferentes propósitos. Veletsos y Newmark (1960), Iwan (1980), Miranda (2000) estudiaron la respuesta de estructuras para diferentes reglas de histéresis solicitadas por acelerogramas reales registrados, con el objetivo de calcular el factor de reducción  $R$  requerido en cada caso como función de la ductilidad. Otros estudios, Judi et al. (2000), Miranda y Ruiz-García (2002), están referidos a la determinación de la relación entre la ductilidad y el amortiguamiento viscoso equivalente, dentro de la metodología de "Diseño directo basado en desplazamientos", Priestley (2000, 2007). En esta metodología las fuerzas de amortiguamiento están referidas a la rigidez secante al máximo desplazamiento, luego es necesario establecer cuál es la relación de amortiguamiento que se debe utilizar con dicha rigidez.

En la mayoría de los análisis inelásticos, (Priestley, 2007) se define el amortiguamiento elástico constante proporcional a la rigidez inicial. Valores típicos son 5% del amortiguamiento crítico para hormigón armado y 2% para acero, basados en mediciones de la respuesta en el campo elástico, pero que no está claro si es apropiado para la respuesta inelástica (Priestley y Grant, 2005).

Las principales razones para incorporar el amortiguamiento elástico en ITHA son:

**a)** Reglas de histéresis que consideran comportamiento lineal elástico hasta la fluencia, entonces no representan la no linealidad (amortiguamiento histerético) en el rango elástico en elementos de hormigón armado y mampostería debido al proceso de figuración.

Las reglas de histéresis están calibradas generalmente en la fase inelástica de la respuesta estructural, luego no se debería utilizar amortiguamiento elástico adicional en el campo inelástico a menos que la estructura esté en descarga o recarga elástica. Si la regla de histéresis modela la no linealidad en el rango elástico, por ejemplo en elementos de barra discretizados en fibras, no hay que agregar amortiguamiento elástico adicional para obtener la respuesta.

En consecuencia el modelo de amortiguamiento elástico proporcional a la rigidez tangente es más aproximado porque las fuerzas de amortiguamiento elástico se reducen significativamente cuando la rigidez disminuye en el rango post fluencia.

**b)** Amortiguamiento en la fundación debido a la flexibilidad del suelo, no linealidad y amortiguamiento por radiación, que en general no se incorporan en ITHA pero que proveen amortiguamiento adicional.

Suponiendo comportamiento elástico de la fundación y pequeña rigidez post fluencia en la estructura, luego durante los intervalos de tiempo en los cuales la estructura se deforma plásticamente, las fuerzas sobre la fundación permanecen constantes y en consecuencia

también la deformación de la fundación, no disipando energía en esos intervalos. Se obtiene una mejor aproximación al amortiguamiento de la fundación con amortiguamiento elástico proporcional a la rigidez tangente, a menos que la respuesta de la fundación se modele en forma separada con resortes y amortiguadores.

**c) Amortiguamiento no estructural debido al comportamiento histerético de dichos elementos y a la fricción por el movimiento relativo con los elementos estructurales.**

Aún cuando los elementos no estructurales no estén separados de la estructura, su resistencia lateral en general no es mayor a un 5% de la resistencia lateral de la estructura, no considerando la mampostería como relleno de pórticos que debe ser modelada con otros elementos estructurales. Se puede suponer un 10% de amortiguamiento viscoso en elementos no estructurales, resultando entonces un 0.5% de amortiguamiento elástico adicional.

Como estos elementos se degradan rápidamente para distorsiones de piso mayores a 0.005, también en este caso la representación más realista es con amortiguamiento proporcional a la rigidez tangente, donde las fuerzas de amortiguamiento disminuyen cuando hay incursiones en el campo no lineal.

Se presenta en este trabajo la implementación computacional de ambos criterios: amortiguamiento proporcional a la masa y a la rigidez inicial ó a la rigidez tangente, en el programa de análisis dinámico no lineal DINLI ya desarrollado en años anteriores (Möller, 2001).

Se muestran ejemplos comparativos entre ambos modelos para cuantificar las diferencias e importancia en la respuesta estructural.

## 1 MODELO DE AMORTIGUAMIENTO ELÁSTICO

### 1.1 Construcción de la matriz de amortiguamiento

La ecuación de movimiento o equilibrio dinámico de un sistema discreto con comportamiento elástico es (Clough y Penzien, 1975)

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{c} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{k} \mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (1)$$

donde  $\ddot{\mathbf{v}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{v}}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  son los vectores de aceleraciones, velocidades y desplazamientos en los grados de libertad del sistema,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{k}$  las respectivas matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, y  $\mathbf{p}(t)$  el vector de acciones externas.

El término  $\mathbf{c} \dot{\mathbf{v}}(t)$  representa las fuerzas de amortiguamiento. Es conveniente que la matriz  $\mathbf{c}$  sea ortogonal para poder desacoplar las ecuaciones (1) y utilizar el clásico análisis modal en la solución.

Caughey (1960) y luego Caughey y Kelly (1965) demostraron que la matriz de amortiguamiento clásica puede ser representada por la siguiente serie (Lucco, 2008)

$$\mathbf{c} = \mathbf{m} \sum_b a_b (\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k})^b = \sum_b \mathbf{c}_b \quad (2)$$

donde los coeficientes  $a_b$  se deben calcular para obtener el grado de amortiguamiento deseado,  $b$  toma valores enteros arbitrarios,  $-\infty < b < \infty$ , pero se verá la conveniencia de elegir valores cercanos a cero.

Con este tipo de matriz de amortiguamiento se puede proveer de la relación de amortiguamiento deseada en un número especificado de modos. Para cada modo  $n$ , el amortiguamiento generalizado es

$$C_n = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{c} \boldsymbol{\varphi}_n = 2 \xi_n \omega_n M_n \quad (3)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}_n$  es el vector de forma modal  $n$ -ésimo,  $\xi_n$  la relación de amortiguamiento,  $\omega_n$  la frecuencia circular y  $M_n$  la masa generalizada calculada con

$$M_n = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_n \quad (4)$$

La contribución del término genérico  $b$  de la serie (2), luego de operaciones algebraicas, resulta

$$C_{nb} = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{c}_b \boldsymbol{\varphi}_n = a_b \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{m} \left( \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} \right)^b \boldsymbol{\varphi}_n = a_b \omega_n^{2b} M_n \quad (5)$$

Luego, el amortiguamiento generalizado asociado al modo genérico  $n$ , y teniendo en cuenta la Ec.(3), resulta

$$C_n = \sum_b C_{nb} = \sum_b a_b \omega_n^{2b} M_n = 2 \xi_n \omega_n M_n \quad (6)$$

De donde se obtiene

$$\xi_n = \frac{1}{2 \omega_n} \sum_b a_b \omega_n^{2b} \quad (7)$$

La ecuación (7) provee la manera de calcular los coeficientes  $a_b$  en función de las relaciones de amortiguamiento modal especificadas  $\xi_n$

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} = 2 \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\xi} \quad (8)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}$  es el vector de los  $\xi_n$ ,  $\mathbf{Q}$  es una matriz cuadrada conteniendo potencias de las frecuencias  $\omega_n$ , y  $\mathbf{a}$  el vector de los coeficientes  $a_b$ .

Con la Ec.(7) se puede luego evaluar la relación de amortiguamiento resultante para los modos de vibración no incluidos en el cálculo de los coeficientes  $a_b$ .

Cuando el comportamiento de la estructura es no lineal, el método de análisis más utilizado es la integración directa paso a paso de las Ecs.(1), discretizando el dominio del tiempo para generar un sistema de ecuaciones algebraicas.

La matriz  $\mathbf{c}$  se podría construir de cualquier forma tal que multiplicada por las velocidades nodales produzcan las fuerzas disipativas  $F_D$ . Sin embargo es conveniente utilizar las expresiones (2) a (8) porque en general la información disponible son las relaciones de amortiguamiento  $\xi_n$ .

## 1.2 Sistemas de un grado de libertad

Se elige  $b = 0$  y de la Ec.(2) se obtiene

$$c = m a_0 (m^{-1} k)^0 = a_0 m \quad (9)$$

Luego, de la Ec.(7) resulta

$$\xi = \frac{1}{2\omega_n} a_0 \rightarrow a_0 = 2\omega \xi \quad (10)$$

Con lo cual, siendo  $c_c$  el amortiguamiento crítico, se verifica que

$$c = 2 m \omega \xi = c_c \xi \quad (11)$$

Se hace notar que si se elige  $b = 1$  se obtiene

$$\begin{aligned} c &= m a_1 (m^{-1} k)^1 = a_1 k \\ \xi &= \frac{1}{2\omega_n} a_1 \omega^2 \rightarrow a_1 = \frac{2}{\omega} \xi \\ c &= 2 \frac{k}{\omega} \xi \end{aligned} \quad (12)$$

Pero como  $k = m \omega^2$ , la Ec.(12) es igual a la Ec.(11). Luego, en la discusión de amortiguamiento proporcional a la rigidez inicial o a la rigidez tangente, si se utiliza (11), al cambiar la rigidez cambia la frecuencia  $\omega$  y en consecuencia  $c$ , mientras que si se utiliza (12), al cambiar la rigidez se modifica  $k$  y  $\omega$ , resultando el mismo valor de  $c$  que con (11).

## 1.3 Sistemas de múltiples grados de libertad

A partir de la expresión general (2), un caso particular muy utilizado es el amortiguamiento proporcional de Rayleigh, donde se elige  $b = 0, 1$ , resultando

$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k} \quad (13)$$

Tiene la ventaja de ser lineal en  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{k}$ , luego  $\mathbf{c}$  mantiene la misma estructura “banda” que  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{m}$  (para matriz de masa consistente), facilitándose la solución del sistema de ecuaciones en cada paso.

Resolviendo el sistema (8) se obtiene

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1) = 2 \omega_1 \xi_1 - a_1 \omega_1^2 \\ a_1 &= 2 \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left( -\frac{\xi_1}{\omega_2} + \frac{\xi_2}{\omega_1} \right) = \frac{2(\omega_2 \xi_2 - \omega_1 \xi_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \end{aligned} \quad (14)$$

Se pueden especificar relaciones de amortiguamiento para dos modos de vibración. En análisis sísmico habitualmente se utilizan los dos primeros modos (de frecuencia más baja) que son los que más contribuyen a la respuesta total.

Para utilizar el criterio de amortiguamiento elástico proporcional a la rigidez tangente, se evalúan las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en cada paso de tiempo con la rigidez que tenga la estructura

al inicio de ese paso, se calculan los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  con la Ec.(14), y se actualiza la matriz  $\mathbf{c}$  con la Ec.(13).

Si se utiliza el criterio de amortiguamiento elástico proporcional a la rigidez inicial, el cálculo se realiza una sola vez al inicio del análisis, y la matriz  $\mathbf{c}$  se mantiene constante.

La energía disipada por amortiguamiento se calcula con

$$E_D = \int_0^t \mathbf{F}_D(t) d\mathbf{v}(t) = \int_0^t \mathbf{c}(t) \dot{\mathbf{v}}(t) d\mathbf{v}(t) \cong \sum_{i=1}^{NPA} \mathbf{c}_i \dot{\mathbf{v}}_i \Delta \mathbf{v}_i \quad (15)$$

Siendo  $NPA$  el número de pasos en que se discretiza el tiempo.

## 2 MODELO DE AMORTIGUAMIENTO HISTERÉTICO

La ecuación (1) se escribe en forma incremental cuando la estructura tiene un comportamiento no lineal físico, siendo para un paso de tiempo genérico

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{c} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{k}_T \Delta \mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{f}(t - \Delta t) \quad (16)$$

donde ahora  $\mathbf{k}_T$  es la matriz de rigidez tangente y  $\mathbf{f}(t-\Delta t)$  es el vector de fuerzas internas al final del paso anterior.

Las principales características del elemento de barra utilizado para la modelización estructural (Möller, 2001), que alcanza un buen balance entre precisión y simplicidad, se resumen a continuación.

Para representar los diferentes mecanismos que contribuyen al comportamiento histerético de las regiones críticas de miembros de hormigón armado, el elemento se descompone en varios subelementos conectados en serie, siguiendo el modelo de Filippou et al. (1992).

El subelemento elasto plástico, mostrado en la Fig. 1, representa el comportamiento elástico lineal sobre una longitud  $z_c$  y la respuesta no lineal de las regiones extremas  $z_i, z_j$ , con longitud variable dependiendo de la historia de carga.

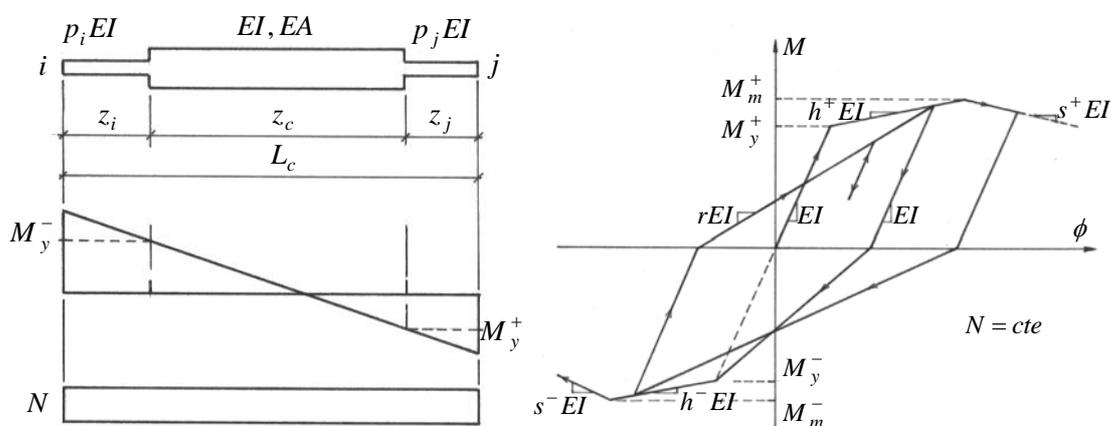


Figura 1: Subelemento elasto plástico – Relación momento curvatura

Las hipótesis fundamentales son: (a) El estado de toda la zona plástica, durante carga, descarga o recarga, es controlado por el estado de la sección extrema. (b) La rigidez de la

zona plástica se representa por una rigidez promedio efectiva  $pEI$ , la cual depende de la sección extrema. Estas hipótesis significan que sólo hay que seguir la historia momento-curvatura de las dos secciones extremas del elemento.

La relación  $M-\phi$  para una sección de hormigón armado se obtiene dividiendo la sección en franjas y utilizando las relaciones tensión deformación desarrolladas por Mander (1984). También se muestra en la figura 1 la relación momento-curvatura rectificada adoptada, con las reglas de descarga y recarga del modelo de Clough.

El subelemento conexión simula la rotación concentrada que ocurre en la interfaz barra-nudo debido al deterioro de la adherencia y deslizamiento de las armaduras ancladas en el nudo. El modelo consiste en un resorte rotacional en cada extremo vinculado con una barra rígida como se muestra en la Fig. 2.

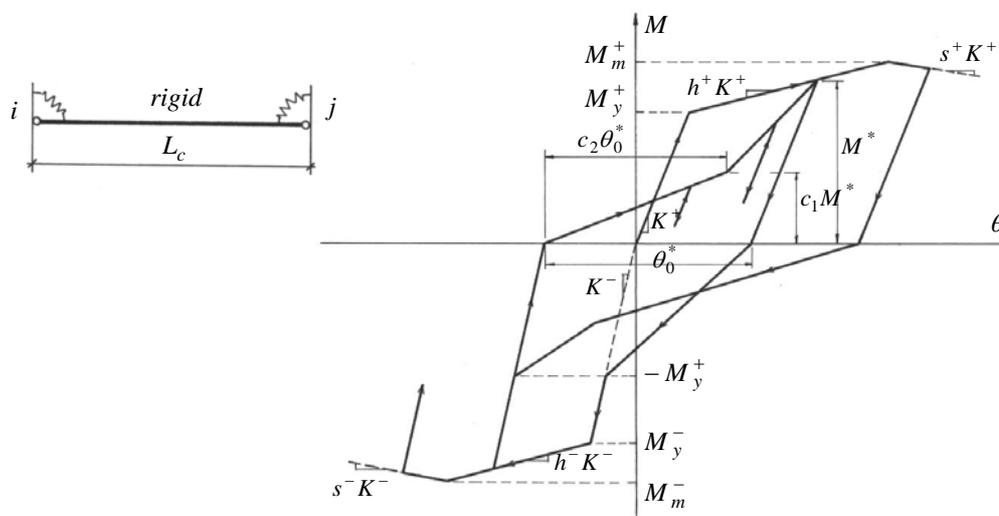


Figura 2: Subelemento conexión – Relación momento rotación

La Fig. 2 también muestra la relación momento-rotación adoptada, con las reglas de descarga y recarga. Los parámetros  $M_y$ ,  $M_m$ ,  $K$ ,  $h$ ,  $s$  para las direcciones positiva y negativa son calculados a partir de la linealización de la real relación  $M-\theta$  obtenida de un pre-procesamiento de la conexión.

Un subelemento corte puede también ser introducido para tener en cuenta la distorsión por corte de la zona inelástica del miembro y el deslizamiento por corte que puede producirse en la interfaz barra-nudo. No es utilizado en este trabajo.

El sistema de ecuaciones no lineales es formulado en un esquema incremental Lagrangeano actualizado. Se resuelve con integración directa paso a paso en el tiempo con el método de Newmark, e iteraciones de Newton-Raphson para ajustar el equilibrio entre acciones externas y fuerzas internas de los elementos, considerando además el balance de fuerzas internas entre los subelementos.

La energía disipada por los ciclos de histéresis en un extremo de barra que incursiona en el campo no lineal, y en un elemento de conexión barra nudo se expresa con

$$E_{H_i} = \int_0^t \left[ \int_0^{z_i} M(x,t) \phi(x,t) dx + M_i(t) d\theta_i(t) \right] dt \quad (17)$$

$$\cong \sum_{k=1}^{NPA} \int_0^{z_i} M_k(x) \Delta\phi_k(x) dx + M_{i_k} \Delta\theta_{i_k}$$

La energía histerética disipada en toda la estructura es la suma de la energía disipada en cada extremo de barra

$$E_H = \sum_i E_{H_i} \quad (18)$$

### 3 APLICACIONES NUMÉRICAS

#### 3.1 Sistema de un grado de libertad

La estructura analizada se muestra en la Fig. 3 en la que solo se permite el desplazamiento horizontal a nivel de la masa. También se incluyen los datos de masa, rigidez, resistencia y relación de amortiguamiento, con los que resulta el periodo de vibración inicial  $T = 0.2 \text{ seg}$ .

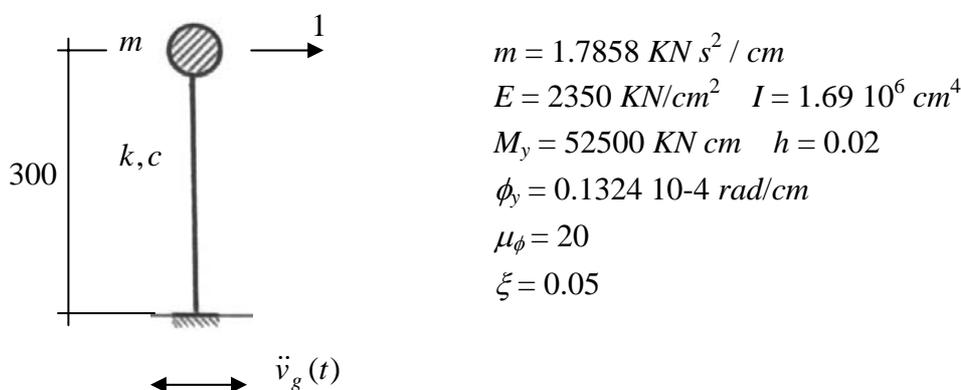
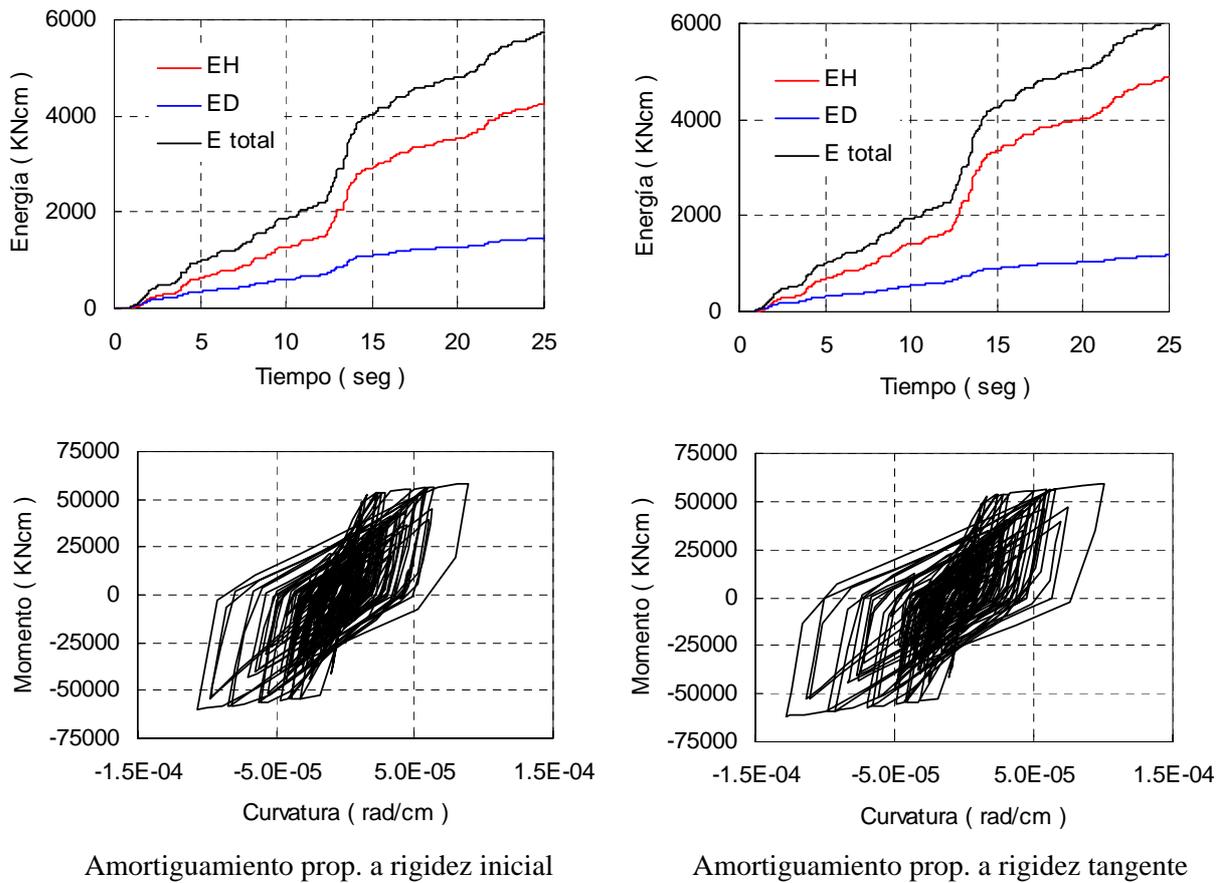


Figura 3: Datos del sistema de un grado de libertad

El sistema es solicitado por la componente N-S terremoto de Cauçete, 1977, con  $a_G = 189.5 \text{ cm/s}^2$ . El análisis se realiza con los dos criterios descritos para el amortiguamiento elástico, es decir proporcional a la rigidez inicial y proporcional a la rigidez tangente.

Los resultados de la evolución de la energía disipada por amortiguamiento elástico  $E_D$ , por histéresis  $E_H$ , y la total  $E = E_D + E_H$ , se representan en la Fig. 4 junto con la respuesta momento curvatura en la sección inferior.

La Tabla 1 muestra los resultados numéricos comparativos entre ambos criterios.



**Figura 4:** Respuesta en el tiempo del sistema de un grado de libertad

Parámetro	K inicial ( a )	K tg ( b )	( b / a )
$E_H$ (KNcm)	4267	4890	1.15
$E_D$ (KNcm)	1468	1177	0.80
$E_{tot}$ (KNcm)	5735	6068	1.06
$\mu$	4.09	5.00	1.22
$\mu_\phi$	8.12	9.68	1.19
$DI$	0.815	0.949	1.16

**Tabla 1:** Resultados numéricos del sistema de un grado de libertad

La comparación entre los resultados con el criterio de la rigidez tangente con respecto al de la rigidez inicial, habitualmente utilizado, muestra en este ejemplo menor energía disipada por amortiguamiento elástico  $E_D$ , aproximadamente 20%, y 15 % más de energía disipada por histéresis  $E_H$ . Esto origina una mayor demanda de ductilidad de desplazamiento global  $\mu$  y local de curvatura  $\mu_\phi$ , del orden del 20%, como así también se obtiene un mayor índice de daño  $DI$  evaluado con el modelo de Park y Ang (1985).

En resumen, las diferencias son significativas.

### 3.2 Pórtico de dos pisos

La Fig. 5 muestra un pórtico plano de hormigón armado de dos pisos perteneciente a una construcción sismorresistente ubicada en una zona de elevada sismicidad. Las características de las secciones son el resultado (Möller, 1999) del dimensionamiento basado en el INPRES-CIRSOC 103 para Zona 4 y Tipo de suelo II.

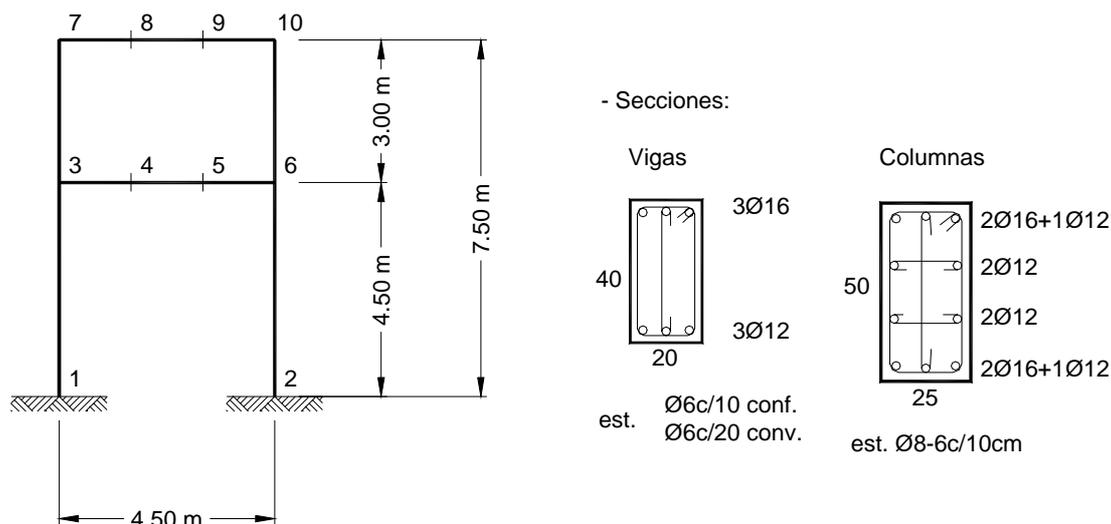


Figura 5: Datos del pórtico de dos pisos

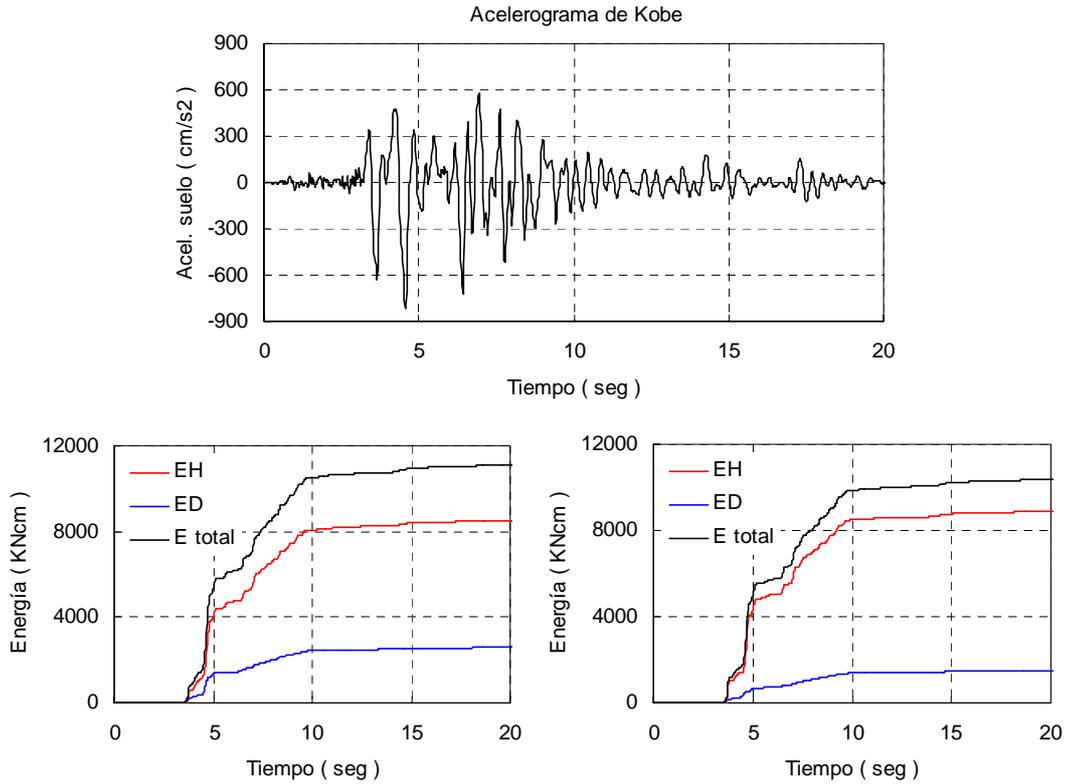
La estructura es solicitada por las cargas permanentes de 22 KN/m en cada piso, y los siguientes acelerogramas: (a) Registro de Kobe, 1995, de características impulsivas, con  $a_G = 817.8 \text{ cm/s}^2$ ; (b) Registro de Caucete, 1977, de características vibratorias, con  $a_G = 189.5 \text{ cm/s}^2$ ; y (c) Acelerograma generado artificialmente, de características vibratorias, con  $a_G = 0.5g = 490.5 \text{ cm/s}^2$ , representativo de un sismo con 10% de probabilidades de ser excedido en 50 años.

Los resultados del push-over con carga permanente y horizontal creciente con distribución triangular invertida son: Corte basal de fluencia  $V_{0y} = 105.4 \text{ KN}$ , desplazamiento horizontal en el último piso, de fluencia,  $v_y = 5.70 \text{ cm}$ .

Las dos primeras frecuencias y sus periodos, con la rigidez inicial, son:  $\omega_1^2 = 125.2 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ ,  $\omega_2^2 = 2089.3 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ , luego  $T_1 = 0.561 \text{ s}$ ,  $T_2 = 0.137 \text{ s}$ .

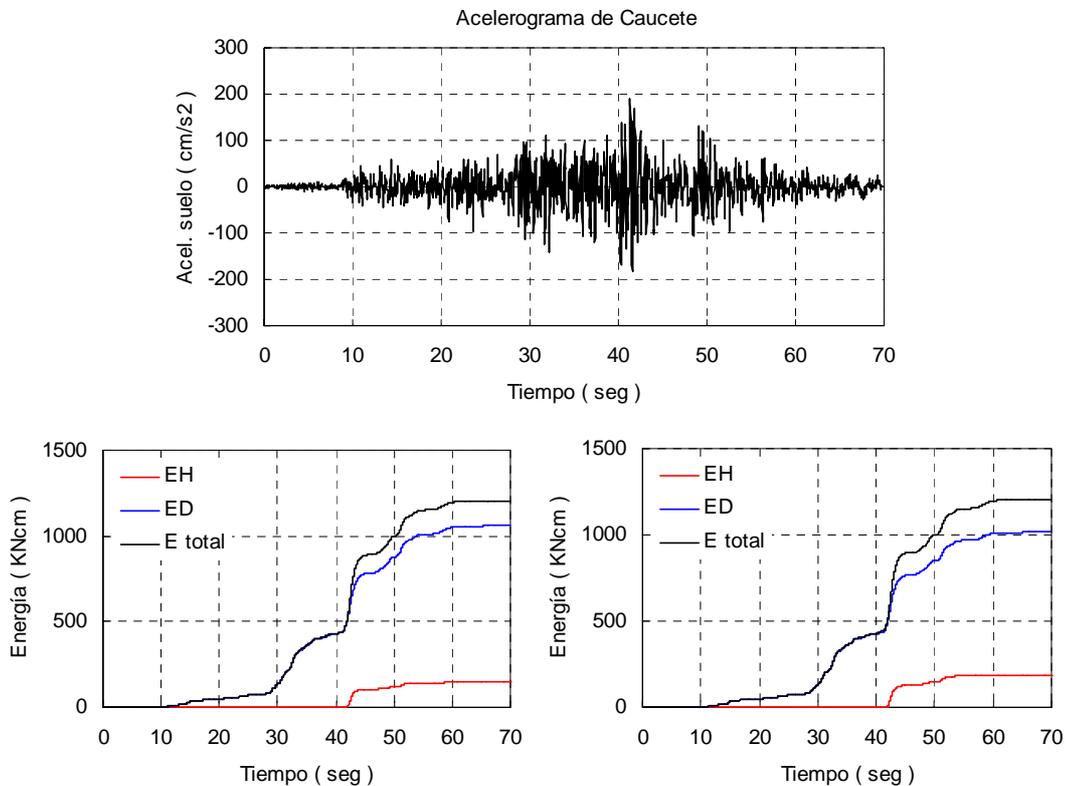
Se considera para las relaciones de amortiguamiento modal:  $\xi_1 = \xi_2 = 0.05$ .

Las Figs. 6 a 8 muestran cada acelerograma junto con la evolución en el tiempo de algunos resultados de interés, y la Tabla 2 la comparación de los valores numéricos entre los dos criterios para representar el amortiguamiento elástico.



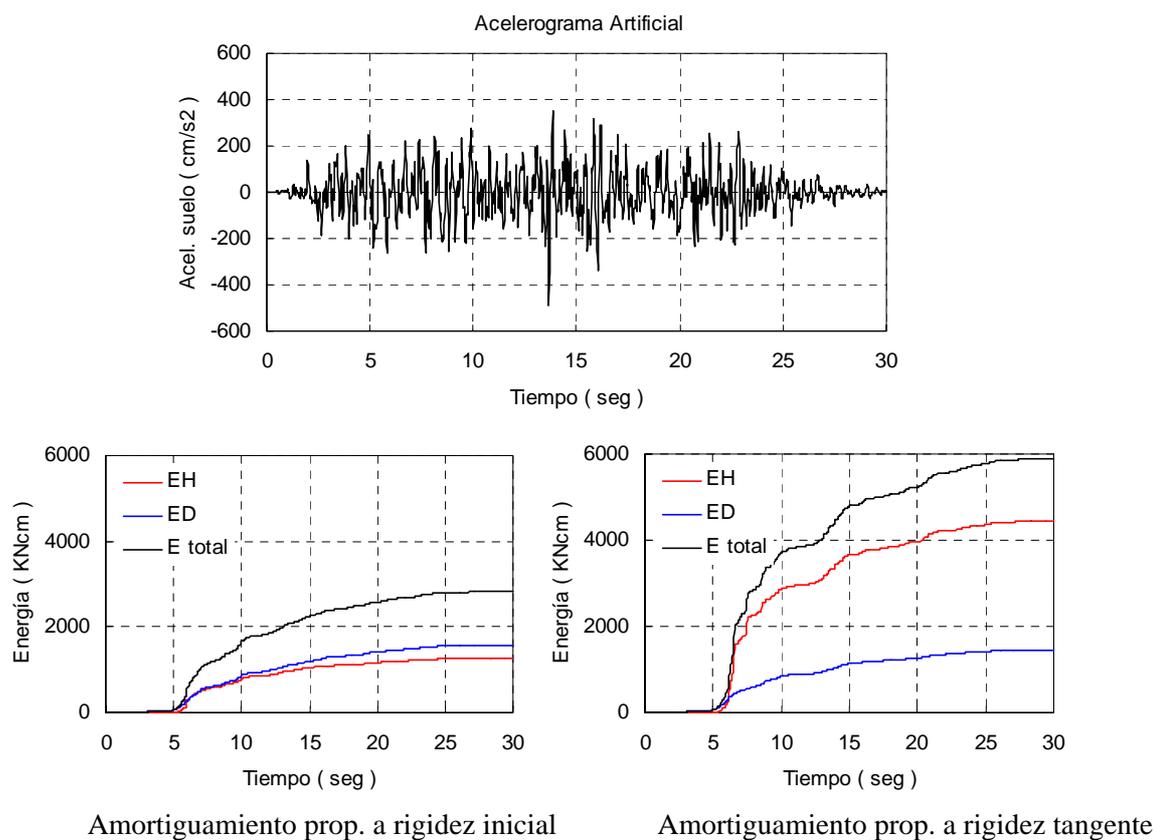
Amortiguamiento prop. a rigidez inicial                      Amortiguamiento prop. a rigidez tangente

**Figura 6:** Respuesta en el tiempo del pórtico de dos pisos con acelerograma de Kobe



Amortiguamiento prop. a rigidez inicial                      Amortiguamiento prop. a rigidez tangente

**Figura 7:** Respuesta en el tiempo del pórtico de dos pisos con acelerograma de Cauçete



**Figura 8:** Respuesta en el tiempo del pórtico de dos pisos con acelerograma Artificial

Acelerog.	Kobe: $a_G = 817.8$		Caucete: $a_G = 189.5$		Artificial: $a_G = 490.5$	
	$K_{inicial}$	$K_{tg}$	$K_{inicial}$	$K_{tg}$	$K_{inicial}$	$K_{tg}$
$E_H$ (KNcm)	8507	8866	145.2	189.2	1260	4435
$E_D$ (KNcm)	2577	1478	1058.4	1015.4	1579	1445
$E_{tot}$ (KNcm)	11084	10344	1204	1205	2839	5880
$v_{max}$ (cm)	38.0	30.6	-4.74	-4.72	-6.59	-8.33
$\dot{v}_{max}$ (cm)	153	129	-49.9	-49.8	-64.3	-75.4
$\ddot{v}_{max}$ (cm)	-1166	-1114	688	684	785	789
$\mu$	6.67	5.36	0.83	0.83	1.16	1.46
$DISTM$	0.058	0.046	0.0074	0.0074	0.0104	0.0143
$DI$	0.57	0.91	0.13	0.13	0.25	0.60
$DILOM$	0.92	1.88	0.23	0.24	0.45	0.90

**Tabla 2:** Resultados numéricos del pórtico de dos pisos

Analizando los resultados obtenidos con el criterio de la rigidez tangente frente a los de la rigidez inicial, los valores para el acelerograma de Kobe, impulsivo, indican que la disipación de energía histerética  $E_H$  se localizó en la viga del primer piso con demanda de ductilidad de curvatura  $\mu_\phi \approx 40$  e índice de daño local máximo  $DILOM = 1.88$ , que significa falla. Hay menor energía disipada por amortiguamiento  $E_D$ , solo un poco mayor  $E_H$  y en la suma total disipa menos energía. Los desplazamientos laterales son menores, con menor ductilidad global y distorsión de piso, debido a la localización de deformaciones en la viga.

El acelerograma de Caucete, vibratorio, demanda a la estructura dentro del rango elástico con solo pequeñas incursiones no lineales en el extremo de vigas. Es una respuesta típica de desempeño "Operacional". Se observan pequeñas diferencias en  $E_H$  y  $E_D$  disipando la misma energía total. Estos resultados son coherentes porque si el comportamiento fuera estrictamente elástico, los dos criterios deben coincidir.

Para el acelerograma vibratorio generado artificialmente se observan importantes diferencias en  $E_H$ , con una relación entre los dos criterios de  $4425 / 1260 = 3.52$ , solo un poco menor  $E_D$  y el doble de la energía total disipada. En este caso se observan mayores desplazamientos, distorsión de piso y daño, especialmente en la viga del primer piso.

En todos los casos la aceleración máxima horizontal en el último piso es insensible al criterio utilizado para  $E_D$ .

En resumen, la consideración de amortiguamiento proporcional a la rigidez tangente en lugar de la clásica proporcional a la rigidez inicial, produce resultados con diferencias significativas. Para este ejemplo las diferencias dependen del tipo de terremoto, del mecanismo de disipación histerética que se genere y del nivel de ductilidad alcanzado.

### 3.3 Tabiques acoplados de cinco pisos

Es otra tipología estructural muy utilizada en construcciones sismorresistentes. Los datos se muestran en la Fig. 9. Similarmente al ejemplo anterior, las dimensiones de las secciones y cuantías de armaduras son el resultado (Möller, 2001) del dimensionamiento basado en el INPRES-CIRSOC 103 para Zona 4 y Tipo de suelo II.

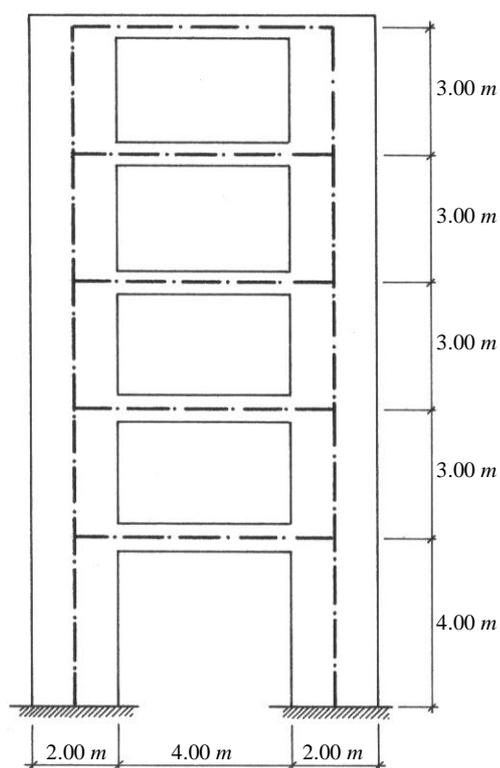
La carga permanente es de 200 KN en la planta tipo y 240 KN en el último piso. Se utilizan los mismos acelerogramas del ejemplo del pórtico de dos pisos.

Se caracterizan las relaciones momento curvatura de las secciones rectas de vigas y tabiques y las relaciones momento rotación concentrada en la interfaz viga-nudo. La discretización se realiza con un elemento por nivel en cada tabique y cuatro elementos por viga para poder representar adecuadamente la carga gravitacional como cargas concentradas en los nodos, haciendo un total de 30 elementos.

Los resultados del push-over con carga permanente y horizontal creciente con distribución triangular invertida son: Corte basal de fluencia  $V_{0y} = 434$  KN, desplazamiento horizontal en el último piso, de fluencia,  $v_y = 6.90$  cm.

Las dos primeras frecuencias y sus periodos, con la rigidez inicial, son:  $\omega_1^2 = 108.9$   $rad^2/s^2$ ,  $\omega_2^2 = 1627.4$   $rad^2/s^2$ , luego  $T_1 = 0.602$  s,  $T_2 = 0.156$  s.

Se considera para las relaciones de amortiguamiento modal:  $\xi_1 = \xi_2 = 0.05$ .



- **Cargas gravitatorias**

Pisos 1 a 4 :  $W = 200 \text{ KN}$

Piso 5 :  $W = 240 \text{ KN}$

- **Secciones de elementos**

- Vigas

Pisos 1 y 2 :  $20 / 60 \text{ cm}$

Pisos 3 a 5 :  $20 / 50 \text{ cm}$

- Tabiques

Pisos 1 a 5 :  $20 \times 200 \text{ cm}$

- **Propiedades de materiales**

Hormigón : H-30

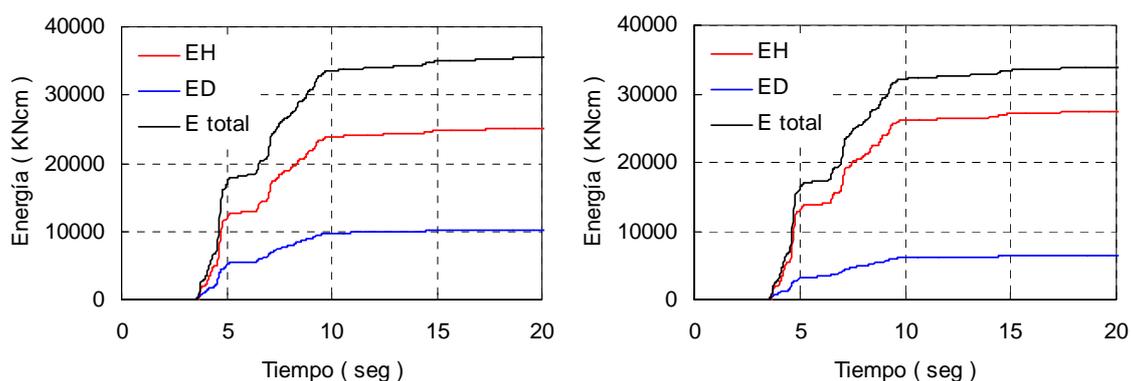
Acero : ADN-420

- **Amortiguamiento**

$\xi = 0.05$

**Figura 9:** Datos de la estructura de tabiques acoplados de cinco pisos

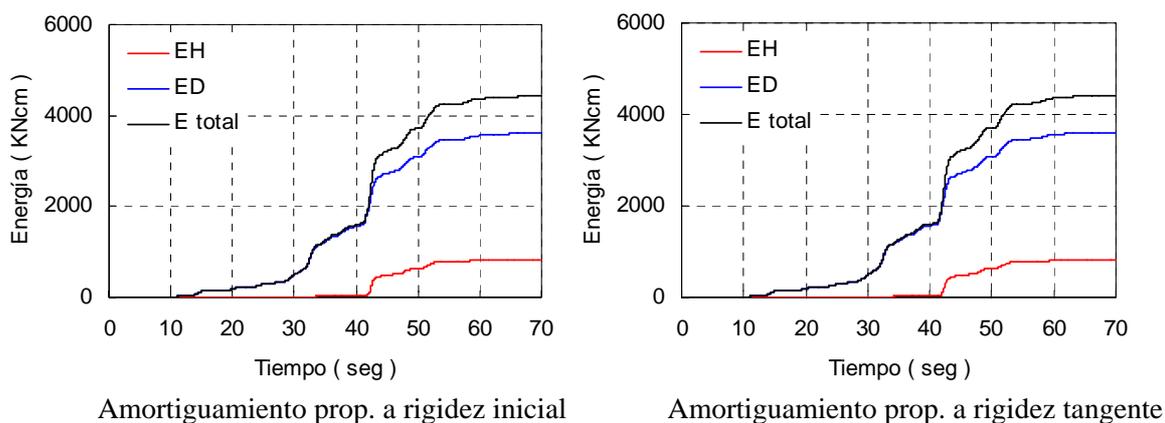
Las Figs. 10 a 12 muestran la evolución en el tiempo de las energías disipadas por amortiguamiento elástico e histerético y la total para cada acelerograma considerado, y la Tabla 3 la comparación de los valores numéricos entre los dos criterios para representar el amortiguamiento elástico.



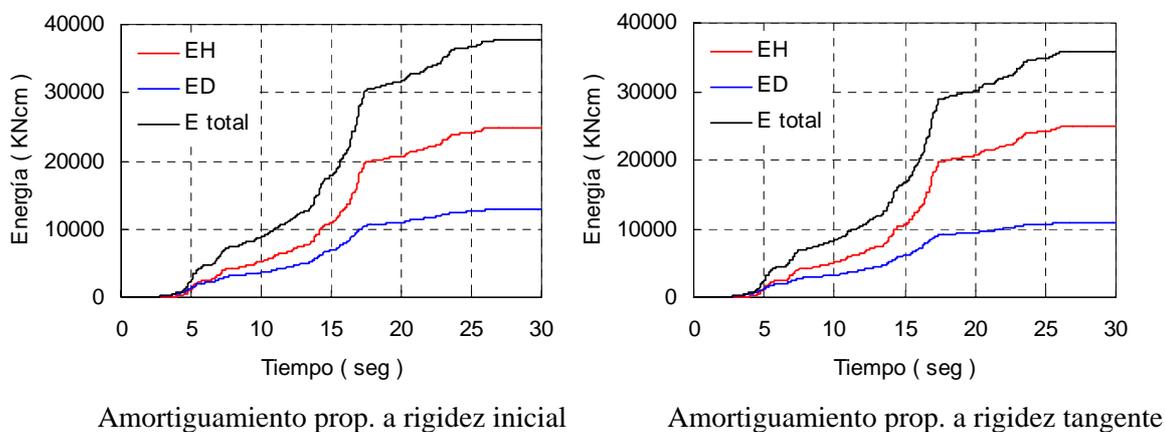
Amortiguamiento prop. a rigidez inicial

Amortiguamiento prop. a rigidez tangente

**Figura 10:** Respuesta en el tiempo de tabiques acoplados de cinco pisos con acelerograma de Kobe



**Figura 11:** Respuesta en el tiempo de tabiques acoplados de cinco pisos con acelerograma de Cauete



**Figura 12:** Respuesta en el tiempo de tabiques acoplados pisos con acelerograma Artificial

Acelerog.	Kobe: $a_G = 817.8$		Cauete: $a_G = 189.5$		Artificial: $a_G = 490.5$	
	$K_{inicial}$	$K_{tg}$	$K_{inicial}$	$K_{tg}$	$K_{inicial}$	$K_{tg}$
$E_H$ (KNcm)	25151	27480	818.3	804.4	24864	24928
$E_D$ (KNcm)	10280	6464	3603	3600	12864	10918
$E_{tot}$ (KNcm)	35431	33949	4421	4404	37728	35486
$v_{max}$ (cm)	28.3	29.3	5.34	5.35	14.3	15.8
$\dot{v}_{max}$ (cm)	173.5	184.6	-55.0	-54.9	-109	-112
$\ddot{v}_{max}$ (cm)	-1394	-1414	-691	-703	-1362	-1333
$\mu$	4.11	4.25	0.78	0.78	2.08	2.29
<i>DISTM</i>	0.021	0.022	0.0046	0.0046	0.0118	0.0131
<i>DI</i>	0.73	0.76	0.14	0.14	0.57	0.63
<i>DILOM</i>	1.15	1.21	0.27	0.27	0.98	1.05

**Tabla 3:** Resultados de tabiques acoplados de cinco pisos

En esta estructura se desarrolla el mismo mecanismo de disipación de energía histerética para los acelerogramas de Kobe, impulsivo, y generado artificialmente, vibratorio. La demanda producida por estos acelerogramas es comparable ya que ambos producen un estado de daño en el límite de la falla, si bien la ductilidad es completamente distinta por el tipo de acelerograma.

Las mayores diferencias se observan en la energía disipada  $E_D$  con  $6469 / 10380 = 63\%$  para Kobe, y  $10918 / 12864 = 85\%$  para el acelerograma artificial. Se debe a que en este último la estructura tiene muchos ciclos de carga, descarga y recarga, disipando  $E_D$  en régimen elástico, con demandas de ductilidad del orden de 2.20, mientras que para el acelerograma de Kobe se produce una fuerte incursión no lineal con demanda de ductilidad de 4.20 y disipación de  $E_D$  en comportamiento no lineal, acentuándose así las diferencias entre los criterios analizados.

Nuevamente en este ejemplo el acelerograma de Caucete genera un nivel de desempeño "Operacional", es decir comportamiento "elástico" con pequeñas incursiones no lineales en algunos extremos de vigas, con demanda máxima de ductilidad de curvatura  $\mu_\phi = 4.7$ . Luego, los resultados obtenidos con ambos criterios para  $E_D$  son prácticamente iguales.

Similarmente al ejemplo del pórtico de dos pisos, la aceleración máxima horizontal en el último piso es independiente del criterio utilizado para evaluar la disipación por amortiguamiento elástico.

#### 4 CONCLUSIONES

En este trabajo se analizan dos criterios para evaluar la matriz de amortiguamiento elástico a utilizar en análisis dinámico no lineal de estructuras solicitadas por cargas permanentes y acción sísmica. (i) Matriz de amortiguamiento constante de Rayleigh, clásica, proporcional a la masa y a la rigidez inicial; (ii) Matriz de amortiguamiento de Rayleigh proporcional a la masa y a la rigidez tangente, que es variable en cada instante de tiempo de acuerdo a la incursión no lineal física.

El criterio de matriz variable proporcional a la rigidez tangente se sustenta en consideraciones racionales sobre la forma de disipar energía en los sistemas que incursionan en el campo no lineal, como es el caso de estructuras sismorresistentes.

Se analizaron sistemas de un grado de libertad y múltiples grados de libertad bajo la acción de acelerogramas impulsivos y vibratorios, y con diferente demanda en el nivel de desempeño.

Los resultados para los ejemplos estudiados muestran diferencias significativas entre ambos criterios. No se observa una tendencia definida, tampoco porcentajes constantes de diferencias, porque es función del tipo de acelerograma, del nivel de ductilidad alcanzado, y del tipo de mecanismo de disipación histerética que se produce.

Si la estructura tiene un comportamiento esencialmente elástico, es indistinto usar uno u otro criterio.

Si la estructura tiene significativas incursiones en el campo no lineal, aparece como recomendable el criterio de amortiguamiento elástico proporcional a la rigidez tangente, por ser más racional, y porque produce resultados significativamente diferentes.

## REFERENCIAS

- Caughey, T.K. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 27, 269-271, 1960.
- Caughey, T.K. and O'Kelly, M.E.J. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 32, 583-588, 1965.
- Clough, R.W, Penzien, J. *Dynamics of Structures*. Mc Graw-Hill, 1975
- Filippou, F.C., D'Ambrisi, A. and Issa, A., "Nonlinear static and dynamic analysis of reinforced concrete subassemblages", *Earthquake Engineering Research Center*, Report N° EERC 92-08, University of California, Berkeley, 1992.
- Iwan, W.D. Estimating inelastic response spectra from elastic spectra. *Earthquake Eng. and Struct. Dynamics*, 8, 375-388, 1980.
- Judi, H.J., Davidson, B.J. and Fenwick, R.C. The direct displacement based design – A damping perspective. *Proceedings of the 12<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering*, Auckland, New Zealand, paper 0330, 2000.
- Luco, J.E. A note on classical damping matrices. *Earthquake Eng. and Struct. Dynamics*, 37, 615-626, 2008.
- Mander, J.B., Priestley, M.J.N. and Park, R., "Seismic design of bridge piers", Research Report 84-2, *Department of Civil Engineering*, University of Canterbury, New Zealand, 1984.
- Miranda, E. Inelastic displacement ratios for structures on firm sites. *J. Struct. Eng.*, 126, 1150-1159, 2000.
- Miranda, E. and Ruiz-Garcia, J. Evaluation of approximate methods to estimate maximum inelastic displacement demands. *Earthquake Eng. and Struct. Dynamics*, 31, 539-560, 2002.
- Möller, O., "Probabilidad de falla de estructuras con comportamiento no lineal bajo acciones sísmicas, con el método de la superficie de respuesta". *Mecánica Computacional Vol. Especial*, pág. 519-528, AMCA, 1999
- Möller, O., Metodología para evaluación de la probabilidad de falla de estructuras sismorresistentes y calibración de códigos, *Tesis de Doctorado en Ingeniería*, Universidad Nacional de Rosario, 2001.
- Park, Y.J., Ang, A.H-S, "Mechanistic seismic damage model for reinforced concrete", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 111, 722-739, 1985.
- Priestley, M.J.N. Performance-based seismic design. Keynote Address, 12<sup>th</sup> WCEE, Auckland, 22pp, 2000.
- Priestley, M.J.N. and Grant, D.N. Viscous damping in seismic design and analysis. *J. Earthquake Eng.*, 9, 229-255, 2005.
- Priestley, M.J.N., Calvi, G.M. and Kowalsky, M.J. *Displacement-based seismic design of structures*. IUSS Press, 2007.
- Veletsos, A.S. and Newmark, N.M. Effect of inelastic behavior on the response of simple systems to earthquake motions. *Proc. World Conference on Earthquake Engineering*, Japan, V.2, 895-912, 1960.