

ESTUDIO SOBRE FORMAS MODALES EN VIGAS CON RESTRICCIONES ELÁSTICAS INTERMEDIAS

Javier L. Raffo^a, Ricardo O. Grossi^b

^a*Grupo de Mecánica Computacional, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>*

^b*INIQUI - ICMASA - Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Salta, Av. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina, grossiro@unsa.edu.ar, <http://www.unsa.edu.ar/iniqui/>*

Palabras Clave: Vibraciones de vigas, restricciones elásticas intermedias, modos de vibración, dinámica estructural, cálculo de variaciones.

Resumen. El análisis dinámico de elementos estructurales es un importante procedimiento de diseño. Un entendimiento adecuado de las vibraciones libres es crucial para el diseño y la evaluación del comportamiento de un sistema mecánico.

En este trabajo se trata el problema de vibraciones libres de vigas uniformes con extremos elásticamente restringidos y con una restricción elástica intermedia.

El modelo matemático utilizado fue obtenido mediante el uso del cálculo de variaciones aplicado al caso de una viga Bernoulli elásticamente restringida.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar la existencia de cambios en las formas modales para ciertos valores y ubicación de la restricción elástica intermedia. Se demuestra la existencia de una situación curiosa en los valores de frecuencia y las formas modales. También se investigan los efectos de la variación de las restricciones elásticas en los extremos de la viga y en el punto intermedio.

1 INTRODUCCIÓN

El cálculo de variaciones se ha constituido en una herramienta esencial para la construcción de modelos matemáticos en el área de la dinámica estructural. Es particularmente eficaz para la determinación de las expresiones analíticas de las ecuaciones diferenciales y de las condiciones de contorno que describen el comportamiento dinámico de elementos estructurales. Una gran variedad de textos se han escrito sobre los aspectos teóricos del cálculo de variaciones y las aplicaciones en la determinación de problemas de contorno (Gelfand y Fomin, 1963; Troutman, 1996; Giaquinta y Hildebrandt, 1996; Dym y Shames, 1973; Kantorovich y Krylov, 1964; Hildebrand, 1965; Weinstock, 1974; Elsgoltz, 1962). Por otra parte, existe una gran cantidad de trabajos publicados en revistas científicas sobre vibraciones de vigas con restricciones elásticas intermedias y/o en los extremos.

Varios trabajos presentan el estudio de la influencia de restricciones elásticas en los extremos de vigas vibrantes (Grant, 1975; Hibbeler, 1975; Maurizi et al., 1976; Goel 1976a, b; Grossi y Laura, 1982; Laura y Grossi, 1982; Rao y Mirza, 1989; Cortinez y Laura, 1985; Laura y Gutierrez, 1986; Grossi y Bhat, 1991; Grossi et al., 1993; Nallim y Grossi, 1999).

El problema de vibraciones libres de vigas con restricciones elásticas intermedias también ha recibido un extenso tratamiento. Rutenberg (1978) determinó las frecuencias de vibraciones libres de una viga uniforme en voladizo con una restricción elástica rotacional en un punto intermedio. Lau (1984) presentó una extensión del trabajo de Rutenberg al incluir un vínculo elástico traslacional. Rao (1989) determinó las frecuencias de vibración de una viga empotrada en ambos extremos pero con una restricción elástica intermedia. De Rosa et al. (1995) concretaron un estudio sobre vibraciones libres de vigas de espesor variable con restricciones elásticas intermedias. Arenas y Grossi (1999) determinaron soluciones exactas y aproximadas para una viga uniforme con un extremo y un punto intermedio elásticamente restringidos. Grossi y Albarracín (2003) determinaron las frecuencias de vibración de una viga con restricciones contra rotación y contra traslación en los extremos y en un punto intermedio.

Por otra parte, Albarracín et al. (2004) presentaron un estudio sobre el comportamiento de las frecuencias de vibración y de los modos de vibración de una viga simplemente apoyada en sus extremos, cuando la rigidez de un resorte intermedio es variada dentro de un cierto intervalo. En el presente trabajo se desarrolla un estudio similar pero en una situación mucho más compleja y con una mayor cantidad de conclusiones.

El modelo matemático utilizado en el presente trabajo fue obtenido mediante el uso del cálculo de variaciones, aplicado al caso de una viga Bernoulli con extremos elásticamente restringidos y con una restricción elástica general en un punto intermedio.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar la existencia de cambios en las formas modales y en las frecuencias para ciertos valores y ubicación de la restricción elástica traslacional intermedia. También se investigan los efectos sobre las frecuencias y modos de vibrar de la variación de las restricciones elásticas en los extremos de la viga y en el punto intermedio de la manera antes mencionada.

caracterizadas por r_{12} y t_{12} (rotacional y traslacional respectivamente) están conectadas a ambos lados de la viga en el punto intermedio ubicado en c , tal como se esquematiza en la [Figura 1](#).

Para determinar el desplazamiento transversal del sistema mecánico en estudio, se supone que el mismo en cualquier instante t , está dado por una función definida por $u(x, t)$, $x \in [0, l]$. La energía cinética del sistema está dada por:

$$T_b = \frac{1}{2} \int_0^c \rho_1 A_1 \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_c^l \rho_2 A_2 \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (1)$$

donde los parámetros característicos son:

ρ_1 : densidad del material del tramo $[0, c)$, ρ_2 : densidad del material del tramo $(c, l]$,

A_1 : área de la sección transversal del tramo $[0, c)$,

A_2 : área de la sección transversal del tramo $(c, l]$.

A su vez, la energía potencial total debida a la deformación elástica de la viga, de los resortes en los extremos, de los resortes intermedios y debida a las fuerzas externas, de acuerdo con lo desarrollado en [Grossi y Quintana, 2008](#) está dada por:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} & \left\{ \int_0^c E_1(x) I_1(x) \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_c^l E_2(x) I_2(x) \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right. \\ & + \int_0^c T_1(x) \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx + \int_c^l T_2(x) \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \\ & + \int_0^c Q_1(x) u(x, t) dx + \int_c^l Q_2(x) u(x, t) dx \\ & + \int_0^c M_1(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx + \int_c^l M_2(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \\ & + r_1 \left(\frac{\partial u(0^+, t)}{\partial x} \right)^2 + t_1 u^2(0^+, t) + r_2 \left(\frac{\partial u(l^-, t)}{\partial x} \right)^2 + t_2 u^2(l^-, t) \\ & + r_c \left(\frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} \right)^2 + t_c (u(c, t))^2 \\ & \left. + r_{12} \left(\frac{\partial u(c^+, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} \right)^2 + t_{12} (u(c^+, t) - u(c^-, t))^2 \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

donde los parámetros característicos son:

I_1 : momento de inercia de la sección respecto al eje neutro del tramo $[0, c)$,

I_2 : momento de inercia de la sección respecto al eje neutro del tramo $(c, l]$,

E_1 : módulo de Young del tramo $[0, c)$, E_2 : módulo de Young del tramo $(c, l]$.

Los símbolos 0^+ , c^- , c^+ y l^- indican que se usan límites laterales y derivadas laterales. Se supone que en el punto c , las distintas restricciones son aplicadas en forma equivalente tanto

en el primero como en el segundo tramo de la viga.

El principio de Hamilton, requiere que entre los instantes t_a y t_b , donde las posiciones del sistema son conocidas, el movimiento sea tal que resulte estacionario el funcional

$$F(u) = \int_{t_a}^{t_b} L dt, \tag{3}$$

en el espacio de funciones admisibles, donde L denota al Lagrangeano $L = T_b - U$. En consecuencia, el funcional energético a considerar está dado por:

$$\begin{aligned} F(u) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c \left[\rho_1(x) A_1(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 - E_1(x) I_1(x) \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - T_1(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 - Q_1(x) u(x,t) - M_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] dx \right\} dt \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_c^l \left[\rho_2(x) A_2(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 - E_2(x) I_2(x) \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - T_2(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 - Q_2(x) u(x,t) - M_2(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] dx \right\} dt \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ r_1 \left(\frac{\partial u(0^+,t)}{\partial x} \right)^2 + r_c \left(\frac{\partial u(c^-,t)}{\partial x} \right)^2 + r_2 \left(\frac{\partial u(l^-,t)}{\partial x} \right)^2 \right\} dt \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ r_{12} \left(\frac{\partial u(c^+,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(c^-,t)}{\partial x} \right)^2 + t_{12} \left(u(c^+,t) - u(c^-,t) \right)^2 \right\} dt \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ t_1 u^2(0^+,t) + t_c \left(u(c,t) \right)^2 + t_2 u^2(l^-,t) \right\} dt. \end{aligned} \tag{4}$$

La condición de funcional estacionario, requiere que se cumpla:

$$\delta F(u;v) = 0, \forall v \in D_a, \tag{5}$$

donde D_a denota al espacio de direcciones admisibles.

Para determinar la variación $\delta F(u;v)$ del funcional F en el punto u y en la dirección v , se generaliza el concepto de derivada direccional de una función real definida en \mathbb{R}^n (Grossi, 2010), de forma tal que es:

$$\delta F(u;v) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} F(u + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0}. \tag{6}$$

El espacio D de funciones admisibles para el funcional F está dado por:

$$D = \left\{ u; u(x,\bullet) \in C^2[t_a, t_b], u(\bullet, t) \Big|_{\bar{\Omega}_i} \in C^4(\bar{\Omega}_i), i = 1, 2, u(x, t_a) \text{ y } u(x, t_b) \text{ dadas} \right\}, \text{ donde los}$$

dominios considerados son: $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{0, l\}$ con $\Omega = (0, l)$ y $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \{0, c\}$, $\bar{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup \{c, l\}$ con $\Omega_1 = (0, c)$ y $\Omega_2 = (c, l)$.

En consecuencia el espacio de direcciones admisibles D_a está dado por:

$$D_a = \left\{ v; v(x, \bullet) \in C^2[t_a, t_b], v(\bullet, t) \Big|_{\bar{\Omega}_i} \in C^4(\bar{\Omega}_i), i = 1, 2, \right. \\ \left. v(x, t_a) = v(x, t_b) = 0, \forall x \in [0, l] \right\}.$$

Si se aplica la definición dada por la Eq. (6) al funcional definido por la Eq. (4) resulta

$$\begin{aligned} \delta F(u; v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c \rho_1(x) A_1(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} dx \right. \\ & \left. + \int_c^l \rho_2(x) A_2(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} dx \right\} dt \\ & - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c E_1(x) I_1(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial v^2(x, t)}{\partial x^2} dx \right. \\ & \left. + \int_c^l E_2(x) I_2(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial v^2(x, t)}{\partial x^2} dx \right\} dt \\ & - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c \left[T_1(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + Q_1(x) v(x, t) + M_1(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right] dx \right. \\ & \left. + \int_c^l \left[T_2(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + Q_2(x) v(x, t) + M_2(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right] dx \right\} dt \\ & - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ r_1 \frac{\partial u(0^+, t)}{\partial x} \frac{\partial v(0^+, t)}{\partial x} + r_c \frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} \frac{\partial v(c^-, t)}{\partial x} \right. \\ & \left. + r_2 \frac{\partial u(l^-, t)}{\partial x} \frac{\partial v(l^-, t)}{\partial x} \right\} dt \\ & - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ r_{12} \left(\frac{\partial u(c^+, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v(c^+, t)}{\partial x} - \frac{\partial v(c^-, t)}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + t_{12} \left(u(c^+, t) - u(c^-, t) \right) \left(v(c^+, t) - v(c^-, t) \right) \right\} dt \\ & - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ t_1 u(0^+, t) v(0^+, t) + t_c u(c, t) v(c, t) + t_2 u(l^-, t) v(l^-, t) \right\} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Al integrar por partes los distintos miembros de la Eq. (7) y al adoptar $v(x, t_a) = v(x, t_b) = 0 \quad \forall x \in [0, l]$, se obtiene:

$$\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c \rho_1(x) A_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} dx \right\} dt =$$

$$- \int_{t_a}^{t_b} \int_0^c \rho_1(x) A_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} v(x,t) dx dt, \tag{8}$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_c^l \rho_2(x) A_2(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} dx \right\} dt =$$

$$- \int_{t_a}^{t_b} \int_c^l \rho_2(x) A_2(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} v(x,t) dx dt, \tag{9}$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \int_0^c E_1(x) I_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} dx dt =$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_1(x) I_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) v(x,t) dx \right.$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(E_1(c^-) I_1(c^-) \frac{\partial^2 u(c^-,t)}{\partial x^2} \right) v(c^-,t)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(E_1(0^+) I_1(0^+) \frac{\partial^2 u(0^+,t)}{\partial x^2} \right) v(0^+,t)$$

$$+ E_1(c^-) I_1(c^-) \frac{\partial^2 u(c^-,t)}{\partial x^2} \frac{\partial v(c^-,t)}{\partial x}$$

$$\left. - E_1(0^+) I_1(0^+) \frac{\partial^2 u(0^+,t)}{\partial x^2} \frac{\partial v(0^+,t)}{\partial x} \right\} dt, \tag{10}$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \int_c^l E_2(x) I_2(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} dx dt =$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_c^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_2(x) I_2(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) v(x,t) dx \right.$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(E_2(l^-) I_2(l^-) \frac{\partial^2 u(l^-,t)}{\partial x^2} \right) v(l^-,t)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(E_2(c^+) I_2(c^+) \frac{\partial^2 u(c^+,t)}{\partial x^2} \right) v(c^+,t)$$

$$+ E_2(l^-) I_2(l^-) \frac{\partial^2 u(l^-,t)}{\partial x^2} \frac{\partial v(l^-,t)}{\partial x}$$

$$\left. - E_2(c^+) I_2(c^+) \frac{\partial^2 u(c^+,t)}{\partial x^2} \frac{\partial v(c^+,t)}{\partial x} \right\} dt, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c T_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} dx \right\} dt = \\
\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c -\frac{\partial}{\partial x} \left(T_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) v(x,t) dx \right. \\
\left. + T_1(c^-) \frac{\partial u(c^-,t)}{\partial x} v(c^-,t) - T_1(0^+) \frac{\partial u(0^+,t)}{\partial x} v(0^+,t) \right\} dt,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_c^l T_2(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} dx \right\} dt = \\
\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_c^l -\frac{\partial}{\partial x} \left(T_2(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) v(x,t) dx \right. \\
\left. + T_2(l^-) \frac{\partial u(l^-,t)}{\partial x} v(l^-,t) - T_2(c^+) \frac{\partial u(c^+,t)}{\partial x} v(c^+,t) \right\} dt,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c M_1(x) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} dx \right\} dt = \\
\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c -\frac{\partial}{\partial x} (M_1(x)) v(x,t) dx + M_1(c^-) v(c^-,t) - M_1(0^+) v(0^+,t) \right\} dt,
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_c^l M_2(x) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} dx \right\} dt = \\
\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_c^l -\frac{\partial}{\partial x} (M_2(x)) v(x,t) dx + M_2(l^-) v(l^-,t) - M_2(c^+) v(c^+,t) \right\} dt.
\end{aligned} \tag{15}$$

Si se introducen las expresiones definidas por las Eqs. (8) a (15) en la Eq. (7) y se agrupan términos según $v(x,t)$, $v(0^+,t)$, $v(c^-,t)$, $v(c^+,t)$, $v(l^-,t)$ y las derivadas $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial v(0^+,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial v(c^-,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial v(c^+,t)}{\partial x}$ y $\frac{\partial v(l^-,t)}{\partial x}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\delta F(u;v) = & - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c \left[\rho_1(x) A_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_1(x) I_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + Q_1(x) - \frac{\partial}{\partial x} (M_1(x)) \right] v(x,t) dx \right\} dt \\
& - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_c^l \left[\rho_2(x) A_2(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_2(x) I_2(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_2(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + Q_2(x) - \frac{\partial}{\partial x} (M_2(x)) \right] v(x,t) dx \right\} dt + Er,
\end{aligned} \tag{16}$$

con

$$\begin{aligned}
Er = & - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_1(0^+) I_1(0^+) \frac{\partial^2 u(0^+,t)}{\partial x^2} \right) - T_1(0^+) \frac{\partial u(0^+,t)}{\partial x} \right. \right. \\
& \left. \left. - M_1(0^+) + t_1 u(0^+,t) \right] v(0^+,t) \right\} dt \\
& + \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[E_1(0^+) I_1(0^+) \frac{\partial^2 u(0^+,t)}{\partial x^2} - r_1 \frac{\partial u(0^+,t)}{\partial x} \right] \frac{\partial v(0^+,t)}{\partial x} \right\} dt \\
& + \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_1(c^-) I_1(c^-) \frac{\partial^2 u(c^-,t)}{\partial x^2} \right) - T_1(c^-) \frac{\partial u(c^-,t)}{\partial x} \right. \right. \\
& \left. \left. - M_1(c^-) - t_c u(c^-,t) + t_{12} (u(c^+,t) - u(c^-,t)) \right] v(c^-,t) \right\} dt \\
& - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[E_1(c^-) I_1(c^-) \frac{\partial^2 u(c^-,t)}{\partial x^2} + r_c \frac{\partial u(c^-,t)}{\partial x} \right. \right. \\
& \left. \left. - r_{12} \left(\frac{\partial u(c^+,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(c^-,t)}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial v(c^-,t)}{\partial x} \right\} dt \\
& - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_2(c^+) I_2(c^+) \frac{\partial^2 u(c^+,t)}{\partial x^2} \right) - T_2(c^+) \frac{\partial u(c^+,t)}{\partial x} \right. \right. \\
& \left. \left. - M_2(c^+) + t_{12} (u(c^+,t) - u(c^-,t)) \right] v(c^+,t) \right\} dt \\
& + \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[E_2(c^+) I_2(c^+) \frac{\partial^2 u(c^+,t)}{\partial x^2} - r_{12} \left(\frac{\partial u(c^+,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(c^-,t)}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial v(c^+,t)}{\partial x} \right\} dt \\
& + \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_2(l^-) I_2(l^-) \frac{\partial^2 u(l^-,t)}{\partial x^2} \right) - T_2(l^-) \frac{\partial u(l^-,t)}{\partial x} \right. \right. \\
& \left. \left. - M_2(l^-) - t_2 u(l^-,t) \right] v(l^-,t) \right\} dt \\
& - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[E_2(l^-) I_2(l^-) \frac{\partial^2 u(l^-,t)}{\partial x^2} + r_2 \frac{\partial u(l^-,t)}{\partial x} \right] \frac{\partial v(l^-,t)}{\partial x} \right\} dt.
\end{aligned}$$

Si se adoptan direcciones tales que es

$$\begin{aligned}
 v(0^+, t) &= v(c^-, t) = v(c^+, t) = v(l^-, t) = 0, \\
 \frac{\partial v(0^+, t)}{\partial x} &= \frac{\partial v(c^-, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(c^+, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(l^-, t)}{\partial x} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

la variación dada por la Eq. (16) se reduce de forma tal que la condición de funcional estacionario queda expresada por:

$$\begin{aligned}
 \delta F(u; v) &= - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^c \left[\rho_1(x) A_1(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_1(x) I_1(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + Q_1(x) - \frac{\partial}{\partial x} (M_1(x)) \right] v(x, t) dx \right\} dt \\
 &\quad - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_c^l \left[\rho_2(x) A_2(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_2(x) I_2(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_2(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + Q_2(x) - \frac{\partial}{\partial x} (M_2(x)) \right] v(x, t) dx \right\} dt = 0, \forall v \in D_a.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Dado que v es una función suficientemente regular que se anula junto con sus derivadas de primer orden en el contorno del dominio $[0, l] \times [t_a, t_b]$, el lema fundamental del cálculo de variaciones permite afirmar que las restricciones de la función u deben satisfacer las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + M(x) \right) \\
 + \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = Q(x), \forall x \in (0, c); t \geq 0,
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + M(x) \right) \\
 + \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = q(x), \forall x \in (c, l); t \geq 0,
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \begin{cases} E_1(x), \forall x \in (0, c) \\ E_2(x), \forall x \in (c, l) \end{cases}; \quad I(x) = \begin{cases} I_1(x), \forall x \in (0, c) \\ I_2(x), \forall x \in (c, l) \end{cases}; \\
 \rho(x) &= \begin{cases} \rho_1(x), \forall x \in (0, c) \\ \rho_2(x), \forall x \in (c, l) \end{cases}; \quad A(x) = \begin{cases} A_1(x), \forall x \in (0, c) \\ A_2(x), \forall x \in (c, l) \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Si se quitan las restricciones dadas por las Eqs. (17) y dado que u es solución de las Eqs. (19) y (20), la condición de funcional estacionario se reduce a:

$$\begin{aligned}
 \delta F(u; v) = & - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_1(0^+) I_1(0^+) \frac{\partial^2 u(0^+, t)}{\partial x^2} \right) - T_1(0^+) \frac{\partial u(0^+, t)}{\partial x} \right. \right. \\
 & \left. \left. - M_1(0^+) + t_1 u(0^+, t) \right] v(0^+, t) \right\} dt \\
 & + \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[E_1(0^+) I_1(0^+) \frac{\partial^2 u(0^+, t)}{\partial x^2} - r_1 \frac{\partial u(0^+, t)}{\partial x} \right] \frac{\partial v(0^+, t)}{\partial x} \right\} dt \\
 & + \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_1(c^-) I_1(c^-) \frac{\partial^2 u(c^-, t)}{\partial x^2} \right) - T_1(c^-) \frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} \right. \right. \\
 & \left. \left. - M_1(c^-) - t_c u(c^-, t) + t_{12} (u(c^+, t) - u(c^-, t)) \right] v(c^-, t) \right\} dt \\
 & - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[E_1(c^-) I_1(c^-) \frac{\partial^2 u(c^-, t)}{\partial x^2} + r_c \frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} \right. \right. \\
 & \left. \left. - r_{12} \left(\frac{\partial u(c^+, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial v(c^-, t)}{\partial x} \right\} dt \\
 & - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_2(c^+) I_2(c^+) \frac{\partial^2 u(c^+, t)}{\partial x^2} \right) - T_2(c^+) \frac{\partial u(c^+, t)}{\partial x} \right. \right. \\
 & \left. \left. - M_2(c^+) + t_{12} (u(c^+, t) - u(c^-, t)) \right] v(c^+, t) \right\} dt \\
 & + \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[E_2(c^+) I_2(c^+) \frac{\partial^2 u(c^+, t)}{\partial x^2} - r_{12} \left(\frac{\partial u(c^+, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial v(c^+, t)}{\partial x} \right\} dt \\
 & + \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_2(l^-) I_2(l^-) \frac{\partial^2 u(l^-, t)}{\partial x^2} \right) - T_2(l^-) \frac{\partial u(l^-, t)}{\partial x} \right. \right. \\
 & \left. \left. - M_2(l^-) - t_2 u(l^-, t) \right] v(l^-, t) \right\} dt \\
 & - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[E_2(l^-) I_2(l^-) \frac{\partial^2 u(l^-, t)}{\partial x^2} + r_2 \frac{\partial u(l^-, t)}{\partial x} \right] \frac{\partial v(l^-, t)}{\partial x} \right\} dt = 0, \forall v \in D_a.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Siendo que las funciones dadas por $v(\bullet, t)$ y $\frac{\partial v(\bullet, t)}{\partial x}$ son regulares y arbitrarias en $[0, l]$, la condición de funcional estacionario expresada en la Eq. (5) y aplicada para la variación de la Eq. (21) permite obtener las condiciones de contorno y de transición correspondientes. Así, si se adoptan direcciones tales que es:

$$\begin{aligned}
 v(c^-, t) = v(c^+, t) = v(l^-, t) = 0, \\
 \frac{\partial v(0^+, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(c^-, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(c^+, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(l^-, t)}{\partial x} = 0,
 \end{aligned} \tag{22}$$

de la Eq. (21) se obtiene:

$$t_1 u(0^+, t) = T_1(0^+) \frac{\partial u(0^+, t)}{\partial x} + M_1(0^+) - \frac{\partial}{\partial x} \left(E_1(0^+) I_1(0^+) \frac{\partial^2 u(0^+, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} Q_1(0^+). \tag{23}$$

Trabajando en forma análoga, se determinan las restantes condiciones de contorno y las condiciones en c de la transición entre ambos tramos de la viga. De esta forma se obtiene:

$$t_1 u(0^+, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(E_1(0^+) I_1(0^+) \frac{\partial^2 u(0^+, t)}{\partial x^2} \right) + T_1(0^+) \frac{\partial u(0^+, t)}{\partial x} + M_1(0^+) - \frac{1}{2} Q_1(0^+), \quad (24)$$

$$r_1 \frac{\partial u(0^+, t)}{\partial x} = E_1(0^+) I_1(0^+) \frac{\partial^2 u(0^+, t)}{\partial x^2}, \quad (25)$$

$$t_c u(c^-, t) - t_{12} (u(c^+, t) - u(c^-, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_1(c^-) I_1(c^-) \frac{\partial^2 u(c^-, t)}{\partial x^2} \right) - T_1(c^-) \frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} - M_1(c^-), \quad (26)$$

$$r_c \frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} - r_{12} \left(\frac{\partial u(c^+, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} \right) = -E_1(c^-) I_1(c^-) \frac{\partial^2 u(c^-, t)}{\partial x^2}, \quad (27)$$

$$t_{12} (u(c^+, t) - u(c^-, t)) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(E_2(c^+) I_2(c^+) \frac{\partial^2 u(c^+, t)}{\partial x^2} \right) + T_2(c^+) \frac{\partial u(c^+, t)}{\partial x} + M_2(c^+), \quad (28)$$

$$r_{12} \left(\frac{\partial u(c^+, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(c^-, t)}{\partial x} \right) = E_2(c^+) I_2(c^+) \frac{\partial^2 u(c^+, t)}{\partial x^2}, \quad (29)$$

$$t_2 u(l^-, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_2(l^-) I_2(l^-) \frac{\partial^2 u(l^-, t)}{\partial x^2} \right) - T_2(l^-) \frac{\partial u(l^-, t)}{\partial x} - M_2(l^-), \quad (30)$$

$$r_2 \frac{\partial u(l^-, t)}{\partial x} = -E_2(l^-) I_2(l^-) \frac{\partial^2 u(l^-, t)}{\partial x^2}. \quad (31)$$

Las Eqs. (26) a (29) expresan las condiciones del problema en la transición de la viga analizada.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

En el presente apartado se muestran resultados numéricos obtenidos con el modelo matemático desarrollado. Se determinaron valores de un coeficiente de frecuencias adimensional y los correspondientes modos de vibración para una viga con distintos valores de las restricciones elásticas en los extremos y en el punto intermedio. Dado que el algoritmo desarrollado es general y muy versátil para la obtención de resultados bajo distintas condiciones de restricción en extremos y en el punto intermedio, se seleccionaron varios casos relevantes para presentar mediante tablas y figuras.

Para establecer las distintas condiciones de apoyo en los extremos de la viga, se adopta la siguiente notación:

A: extremo articulado donde los desplazamientos son nulos pero no las rotaciones,

E: extremo empotrado donde los desplazamientos y las rotaciones son nulos,

L: extremo libre de restricciones,

ER: extremo elásticamente restringido.

En la [Tabla 1](#) se indica la forma en que se obtiene cada condición de apoyo, al asignar

valores a las correspondientes rigideces de las restricciones de los extremos.

Condiciones de los extremos	t_1	r_1	t_2	r_2
AA	∞	0	∞	0
EA	∞	∞	∞	0
ER	1000	1000	100	100

Tabla 1: Valores de las restricciones elásticas para representar algunas condiciones de apoyo en los extremos.

Los resultados que se determinaron corresponden al coeficiente de frecuencias naturales dado por

$$\lambda_{i,n} = \sqrt{\sqrt{\frac{\rho_i A_i}{E_i I_i}} \omega_n l}, \quad (32)$$

donde el subíndice n indica el modo y el subíndice i denota al tramo correspondiente de la viga. Así es $i=1$ para el primer tramo e $i=2$ para el segundo tramo. Para el caso en que es $\rho = \rho_1 = \rho_2, I = I_1 = I_2, A = A_1 = A_2$ y $E = E_1 = E_2$, el coeficiente de frecuencias se reduce a:

$$\lambda_{1,n} = \sqrt{\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \omega_n l}. \quad (33)$$

En el caso en que todas las fuerzas externas actuantes sobre la viga son nulas, y la densidad y rigidez a la flexión son constantes a lo largo de cada tramo de la viga, es posible utilizar el método de separación de variables y adoptar como soluciones de las ecuaciones diferenciales dadas por la Eq. (19) y la Eq. (20) a las funciones definidas por:

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{1,n}(x) \cos(\omega t), \quad (34)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2,n}(x) \cos(\omega t), \quad (35)$$

donde $u_{i,n}(x)$ denota al n -ésimo modo natural de vibración del tramo i .

Si se introduce el cambio de variables $\bar{x} = x/l$ en las Eqs. (24) a (31), las soluciones correspondientes están dadas por

$$u_{1,n}(\bar{x}) = C_1 \cosh(\lambda_{1,n} \bar{x}) + C_2 \sinh(\lambda_{1,n} \bar{x}) + C_3 \cos(\lambda_{1,n} \bar{x}) + C_4 \sin(\lambda_{1,n} \bar{x}), \quad (36)$$

$$u_{2,n}(\bar{x}) = C_5 \cosh(\lambda_{2,n} \bar{x}) + C_6 \sinh(\lambda_{2,n} \bar{x}) + C_7 \cos(\lambda_{2,n} \bar{x}) + C_8 \sin(\lambda_{2,n} \bar{x}). \quad (37)$$

Si se reemplazan las expresiones dadas por la Eq. (36) y la Eq. (37) en la Eq. (34) y la Eq. (35) y luego en las condiciones de contorno y transición dadas por las Eqs. (24) a (31), se obtiene un sistema de ocho ecuaciones homogéneas con incógnitas C_i . Dado que el sistema es homogéneo, para que exista una solución no trivial, el determinante de los coeficientes debe ser nulo. Este procedimiento lleva a construir la ecuación de frecuencias:

$$G(T_i, R_i, T_c, R_c, T_{12}, R_{12}, \lambda_{1,n}, c) = 0, \quad (38)$$

donde las expresiones adoptadas para los coeficientes de rigidez están dadas por:

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{t_i l^3}{EI}; T_c = \frac{t_c l^3}{EI}; T_{12} = \frac{t_{12} l^3}{EI}; \\ R_i &= \frac{r_i l}{EI}; R_c = \frac{r_c l}{EI}; R_{12} = \frac{r_{12} l}{EI}, \end{aligned} \quad (39)$$

con $i=1,2$. Los valores del coeficiente de frecuencia $\lambda_{1,n}$, fueron obtenidos con el método clásico de bisección.

4 CAMBIO MODAL ANTE LA PRESENCIA DE UNA RESTRICCIÓN ELÁSTICA TRASLACIONAL INTERMEDIA

El modelo desarrollado es general dado que permite obtener una gran variedad de resultados con distintas condiciones de contorno, incluyendo las condiciones de contorno clásicas y donde además se pueden evaluar diferentes condiciones de restricciones intermedias. Esta característica del modelo permite obtener una inmensa cantidad de resultados para futuros análisis, no obstante, es de interés en el presente trabajo el análisis centrado en un comportamiento particular, que corresponde a la influencia de la restricción elástica traslacional intermedia.

En particular se obtuvieron los valores de las frecuencias naturales y los modos de vibración al colocar cierta restricción elástica intermedia, debido a la cual se observan inversiones en las formas modales y cruces de frecuencias naturales entre algunos modos afectados. Este análisis se considera importante dado que las formas modales y sus correspondientes frecuencias naturales de una viga, donde se encuentra restringida por un soporte intermedio, dependen fuertemente de la constante de rigidez de este soporte. Esto pone en evidencia el rol fundamental del vínculo intermedio cuando se pretende desarrollar actividades de diseño y en particular cuando se desea analizar los modos y frecuencias naturales del sistema estructural en estudio.

El procedimiento realizado para detectar este fenómeno es el siguiente:

En primer lugar se determinan los ceros de las formas modales cuando no existen restricciones intermedias. A dichos puntos se los denota por c_{mn} donde m indica el modo analizado y n indica la numeración de los ceros de la forma modal correspondiente. Luego en los puntos c_{mn} (ver Figura 2) se ubica una restricción elástica traslacional t_c . Como ejemplo, en la Figura 3 se observa la forma modal del modo 3 de una viga restringida elásticamente en ambos extremos, en la misma se encuentra el primer cero de la forma modal c_{31} y el segundo cero es c_{32} . Para obtener los valores de c_{mn} , se adopta $t_c = r_c = 0$ y $t_{12} = r_{12} = \infty$. Los valores de c_{mn} obtenidos se presentan en la Tabla 2.

Una vez ubicada la restricción elástica t_c , se determina el valor de rigidez traslacional que hace que ocurra el fenómeno de inversión de las formas modales.

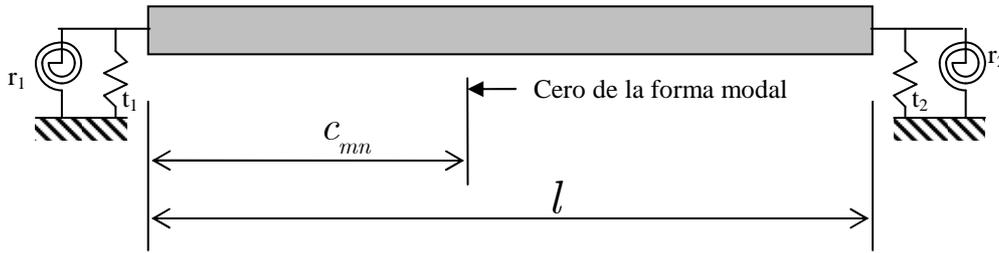


Figura 2: Viga analizada con el punto intermedio c_{mn} : nodo n del modo m

CB	c_{21}	c_{31}	c_{32}	c_{42}	c_{63}	c_{84}
AA	0.50000	0.33333	0.66667	0.50000	0.50000	0.50000
EA	0.55750	0.38596	0.69225	0.52936	0.52000	0.51515
RE	0.65182	0.40109	0.78802	0.53571	0.50624	0.50302

Tabla 2: Valor de los ceros de las formas modales para distintas condiciones de apoyo en los extremos. RE: $T_1 = R_1 = 1000$, $T_2 = R_2 = 100$

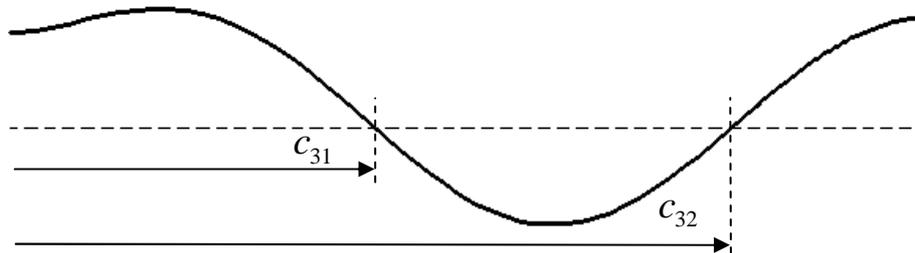


Figura 3: Ubicación del primer cero c_{31} y del segundo cero c_{32} de la forma modal 3 para una viga restringida elásticamente en ambos extremos

CB	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$	$\lambda_{1,5}$	$\lambda_{1,6}$	$\lambda_{1,7}$	$\lambda_{1,8}$
AA	3.141592	6.283185	9.424777	12.566370	15.707963	18.849555	21.991148	25.132741
EA	3.926602	7.068582	10.210176	13.351768	16.493361	19.634954	22.776546	25.918139
RE	3.809326	5.634569	7.932922	10.167847	12.831213	15.788583	18.845199	21.938205

Tabla 3: Valores de $\lambda_{1,i}$ con $i = 1, 2, \dots, 8$ y sus correspondientes formas modales para las distintas condiciones de apoyo en los extremos. RE: $T_1 = R_1 = 1000$, $T_2 = R_2 = 100$

Se analizaron los casos correspondientes a una viga cuyas condiciones de apoyo están descritas en la [Tabla 1](#). Para ello, se consideró una restricción elástica intermedia proporcionada por un resorte traslacional ubicado en la posición c_{mn} tal como se muestra en la [Figura 4](#) y para cada caso se analizaron los resultados de los valores extremos de un intervalo en el cual se observa el fenómeno de inversión modal. El valor de rigidez del resorte T_c donde ocurre exactamente el cambio modal y cambio de frecuencia entre el modo $m - 1$ y modo m

se lo nombra T_c^E .

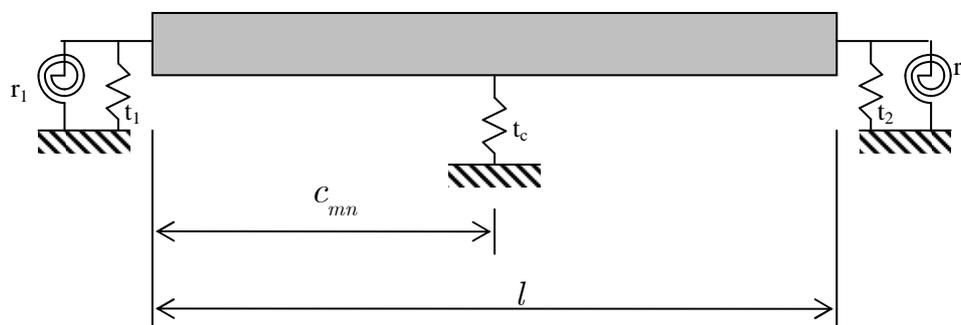


Figura 4: Viga analizada con la restricción elástica traslacional intermedia

4.1 Caso AA

Para analizar el presente caso se consideró $t_1 = \infty$, $r_1 = 0$, $t_2 = \infty$ y $r_2 = 0$ y una restricción elástica traslacional intermedia en $c_{21} = c_{42} = 0.5$. Para determinar el valor de rigidez T_c^E para el cual se produce el cambio de modos y frecuencias, se reemplaza en la Eq. (38), los valores de $\lambda_{1,2}$ y c_{21} . De esta forma se obtuvo el valor exacto $T_c^E = 995.91354$ que corresponde al valor donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 1 y del modo 2. En la Tabla 4 se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ con sus correspondientes formas modales para los valores de $T_c = T_c^E - \delta$ y $T_c = T_c^E + \delta$ donde es $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

T_c	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$
995.9	6.28317136 	6.28318530 	10.05260274 	12.56637061
996.0	6.28318530 	6.28327428 	10.05266614 	12.56637061

Tabla 4: Valores de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio entre los modos 1 y 2 con $c_{21} = 0.5$

Al realizar el mismo análisis para observar el cambio modal entre los modos 3 y 4, se obtiene $T_c^E = 7937.66219$, que corresponde al valor donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 3 y del modo 4. En la Tabla 5 se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ con sus correspondientes formas modales para los valores de $T_c = T_c^E - \delta$ y $T_c = T_c^E + \delta$ donde $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

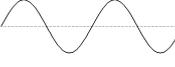
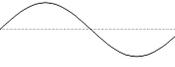
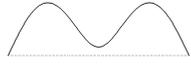
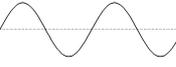
T_c	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$
7930	6.28318530	7.60452961	12.56506301	12.56637061
				
7940	6.28318530	7.60484404	12.56637061	12.56676921
				

Tabla 5: Valores de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio entre los modos 3 y 4 con $c_{24} = 0.5$

Si se considera a la restricción elástica traslacional en $c_{31} = 1/3$, que corresponde al primer nodo de la forma modal 3, se obtiene $T_c^E_{31} = 3354.95472$, que corresponde al valor donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 2 y del modo 3. En la [Tabla 6](#) se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ con sus correspondientes formas modales para los valores de $T_c = T_c^E_{31} - \delta$ y $T_c = T_c^E_{31} + \delta$ donde $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

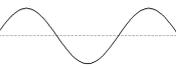
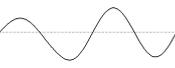
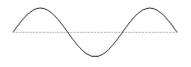
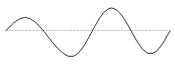
T_c	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$
3354.9	5.24623045	9.42475656	9.42477796	13.23027960
				
3355.0	5.24623311	9.42477796	9.42479566	13.23029833
				

Tabla 6: Valores de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ y sus correspondientes formas modales para observar el modal entre los modos 2 y 3 con $c_{31} = 1/3$

Si se ubica la restricción elástica traslacional en $c_{32} = 2/3$, punto que corresponde al segundo nodo de la forma modal 3, se obtienen los mismos valores de frecuencias que para el caso en que la restricción se encuentra en $c_{31} = 1/3$, y las formas modales son simétricas respecto a un eje perpendicular al eje de la viga que pasa por el centro de la misma. También se obtiene que $T_c^E_{32} = T_c^E_{31}$. Por lo tanto, los resultados se observan en la [Tabla 6](#) con la observación de la forma modal señalada anteriormente.

4.2 Caso EA

Para analizar el presente caso se consideró $t_1 = \infty$, $r_1 = \infty$, $t_2 = \infty$ y $r_2 = 0$ con una restricción elástica traslacional intermedia en $c_{21} = 0.55750$. Para determinar el valor de rigidez T_c^E para el cual se produce el cambio de modos y frecuencias, se reemplaza en la Eq. (38), los valores de $\lambda_{1,2}$ y c_{21} . De esta forma se obtuvo el valor exacto $T_c^E_{21} = 1377.58123$ que corresponde al valor justo donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 1 y del modo 2. En la [Tabla 7](#) se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ con sus correspondientes formas modales para los valores

de $T_c = T_c^{E_{21}} - \delta$ y $T_c = T_c^{E_{21}} + \delta$ donde es $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

T_c	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$
1377.5	7.06851843	7.06858274	10.87126233	13.39714624
1377.6	7.06858274	7.06859760	10.87131054	13.39715007

Tabla 7: Valores de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio modal entre los modos 1 y 2 con $c_{21} = 0.55750$

Al realizar el mismo análisis pero para observar el cambio modal entre los modos 3 y 4, se obtiene $T_c^{E_{42}} = 9532.38300$, que corresponde al valor donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 3 y del modo 4. En la **Tabla 8** se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ con sus correspondientes formas modales para los valores de $T_c = T_c^{E_{42}} - \delta$ y $T_c = T_c^{E_{42}} + \delta$ donde $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

T_c	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$
9520.0	6.97929067	8.43566591	13.34997025	13.35176877
9540.0	6.97931871	8.43621980	13.35176877	13.35287340

Tabla 8: Valores de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio modal entre los modos 3 y 4 con $c_{42} = 0.52936$

Si se considera a la restricción elástica traslacional en $c_{31} = 0.38596$, que corresponde al primer nodo de la forma modal 3, se obtiene $T_c^{E_{31}} = 4143.69111$ que corresponde al valor donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 2 y del modo 3. En la **Tabla 9** se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ con sus correspondientes formas modales para los valores de $T_c = T_c^{E_{31}} - \delta$ y $T_c = T_c^{E_{31}} + \delta$ donde $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

T_c	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$
4143.6	5.69888092	10.21014748	10.21017612	14.18637798
4143.7	5.69888360	10.21017612	10.21017891	14.18639755

Tabla 9: Valores de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio modal entre los modos 2 y 3 con $c_{31} = 0.38596$

Si ahora se considera a la restricción elástica traslacional en $c_{32} = 0.69225$, que corresponde al segundo nodo de la forma modal 3, se obtiene $T_c^E = 4270.65082$ que corresponde al valor donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 2 y del modo 3. En la **Tabla 10** se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ con sus correspondientes formas modales para los valores de $T_c = T_c^E - \delta$ y $T_c = T_c^E + \delta$ donde $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

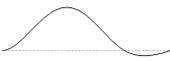
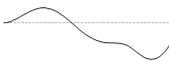
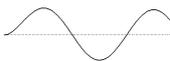
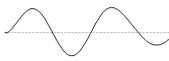
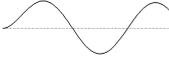
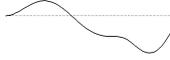
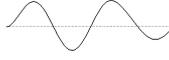
T_c	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$
4270.6	6.16443629	10.21015958	10.21017612	13.98586941
				
4270.7	6.16443861	10.21017612	10.21019212	13.98588331
				

Tabla 10: Valores de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio modal entre los modos 2 y 3 con $c_{32} = 0.69225$

4.3 Caso RE

Para analizar el presente caso se consideró $T_1 = R_1 = 1000$ en un extremo y $T_2 = R_2 = 100$ en el otro extremo de la viga con una restricción elástica traslacional intermedia en $c_{21} = 0.65182$. Para determinar el valor de rigidez T_c^E para el cual se produce el cambio de modos y frecuencias, se reemplaza en la Eq. (38), los valores de $\lambda_{1,2}$ y c_{21} . De esta forma se obtuvo el valor exacto $T_c^E = 602.64531$ que corresponde al valor justo donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 1 y del modo 2. En la **Tabla 11** se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ con sus correspondientes formas modales para los valores de $T_c = T_c^E - \delta$ y $T_c = T_c^E + \delta$ donde es $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

T_c	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$
590.0	5.61763046	5.63456929	8.26027911	10.37585293
				
610.0	5.63456929	5.64424606	8.27099513	10.38371828
				

Tabla 11: Valores de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio modal entre los modos 1 y 2 con $c_{21} = 0.65182$

Al realizar el mismo análisis pero para observar el cambio modal entre los modos 3 y 4, se obtiene $T_c^E = 4236.24337$, que corresponde al valor donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 3 y del modo 4. En la **Tabla 12** se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ con sus correspondientes

formas modales para los valores de $T_c = T_c^E_{42} - \delta$ y $T_c = T_c^E_{42} + \delta$ donde $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

T_c	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$
4220	5.21392078	7.07156307	10.16359191	10.16784749
4250	5.21406231	7.07229983	10.16784749	10.16882847

Tabla 12: Valores de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio modal entre los modos 3 y 4 con $c_{42} = 0.53571$

Al realizar el mismo análisis pero para observar el cambio modal entre los modos 5 y 6, se obtiene $T_c^E_{63} = 15740.34131$ que corresponde al valor donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 5 y del modo 6. En la [Tabla 13](#) se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,3}$, $\lambda_{1,4}$, $\lambda_{1,5}$ y $\lambda_{1,6}$ con sus correspondientes formas modales para los valores de $T_c = T_c^E_{63} - \delta$ y $T_c = T_c^E_{63} + \delta$ donde $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

T_c	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$	$\lambda_{1,5}$	$\lambda_{1,6}$
15730	9.98665721	11.16618208	15.78765565	15.78858305
15750	9.98672	11.16659	15.78858	15.78944

Tabla 13: Valores de $\lambda_{1,3}$, $\lambda_{1,4}$, $\lambda_{1,5}$ y $\lambda_{1,6}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio modal entre los modos 3 y 4 con $c_{63} = 0.50624$

Al realizar el mismo análisis pero para observar el cambio modal entre los modos 7 y 8, se obtiene $T_c^E_{84} = 42234.34684$ que corresponde al valor donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 7 y del modo 8. En la [Tabla 14](#) se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,5}$, $\lambda_{1,6}$, $\lambda_{1,7}$ y $\lambda_{1,8}$ con sus correspondientes formas modales para los valores de $T_c = T_c^E_{84} - \delta$ y $T_c = T_c^E_{84} + \delta$ donde $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

T_c	$\lambda_{1,5}$	$\lambda_{1,6}$	$\lambda_{1,7}$	$\lambda_{1,8}$
42220	15.78067117	16.77049430	21.93767692	21.93820541
42250	15.78067447	16.77091231	21.93820541	21.93878169

Tabla 14: Valores de $\lambda_{1,5}$, $\lambda_{1,6}$, $\lambda_{1,7}$ y $\lambda_{1,8}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio modal entre los modos 3 y 4 con $c_{84} = 0.50302$

Si se considera a la restricción elástica traslacional en $c_{31} = 0.40109$, que corresponde al

primer nodo de la forma modal 3, se obtiene $T_c^E = 1846.79443$ que corresponde al valor donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 2 y del modo 3. En la **Tabla 15** se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ con sus correspondientes formas modales para los valores de $T_c = T_c^E - \delta$ y $T_c = T_c^E + \delta$ donde $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

T_c	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$
1830	4.63869576 	7.92429194 	7.93292293 	10.91197442 
1860	4.63978194 	7.93292293 	7.93963543 	10.92484093 

Tabla 15: Valores de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio modal entre los modos 2 y 3 con $c_{31} = 0.40109$

Si ahora se considera a la restricción elástica traslacional en $c_{32} = 0.78802$, que corresponde al segundo nodo de la forma modal 3, se obtiene $T_c^E = 1832.10816$ que corresponde al valor donde ocurre el fenómeno de cambio modal y donde coinciden los valores de las frecuencias del modo 2 y del modo 3. En la **Tabla 16** se presentan los valores de las frecuencias $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ con sus correspondientes formas modales para los valores de $T_c = T_c^E - \delta$ y $T_c = T_c^E + \delta$ donde $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$.

T_c	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$	$\lambda_{1,4}$
1820	5.11810960 	7.92494436 	7.93292293 	10.38094493 
1840	5.11882761 	7.93292293 	7.93809118 	10.38343189 

Tabla 16: Valores de $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{1,3}$ y $\lambda_{1,4}$ y sus correspondientes formas modales para observar el cambio modal entre los modos 2 y 3 con $c_{32} = 0.78802$

En la **Tabla 17** se presentan los valores de T_c^E calculados en el presente trabajo.

CB	T_c^E ₂₁	T_c^E ₃₁	T_c^E ₃₂	T_c^E ₄₂	T_c^E ₆₃	T_c^E ₈₄
AA	995.91354	3354.95472	3354.95472	7937.66219	26789.42340	63500.85464
EA	1377.58123	4143.69111	4270.65082	9532.38300	30277.99180	69642.19191
RE	602.64531	1846.79443	1832.10816	4236.24943	15740.34131	42234.34684

Tabla 17: Resumen de los valores de T_c^E calculados

5 COMPARACIÓN CON RESULTADOS EXPERIMENTALES

Se realizaron ensayos experimentales para obtener los valores de T_c^E ₂₁ para los casos AA y

EA, para lo cual se midieron valores anteriores y posteriores al valor de T_c^E buscado; de esta manera se pudo determinar el comportamiento anterior y posterior de la forma modal y el valor de las frecuencias modales correspondientes.

En la **Figura 5** se observa el cambio modal obtenido en forma teórica y experimental para el caso AA donde $c_{21} = 0.5$ y $T_c^E = 995.91354$.

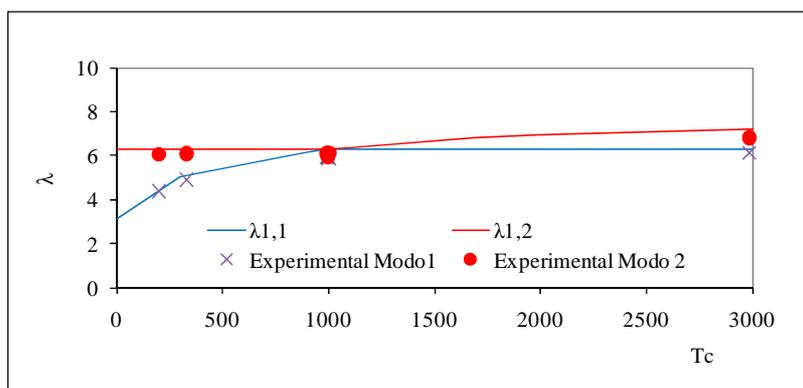


Figura 5: Cambio modal obtenido con el presente trabajo en forma teórica y experimental para el caso AA donde $c_{21} = 0.5$ y $T_c^E = 995.91354$

En la **Figura 6** se observa el cambio modal obtenido en forma teórica y experimental para el caso EA donde $c_{21} = 0.5$ y $T_c^E = 1377.58123$

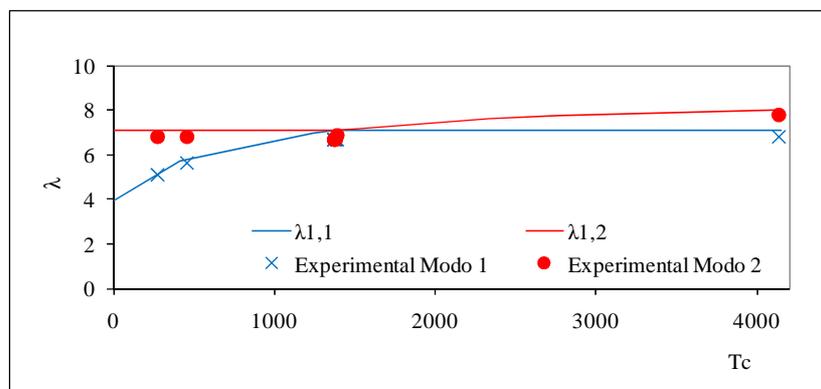


Figura 6: Cambio modal obtenido con el presente trabajo en forma teórica y experimental para el caso EA donde $c_{21} = 0.557501$ y $T_c^E = 1377.58123$

En la **Figura 7** se observan los valores de T_c^E para los nodos centrales del modo CM, con CM=2, 4, 6 y 8, para los valores de CM donde CM es el segundo modo involucrado en el cambio modal. Por ejemplo, para cambio modal entre modo 1 y 2, CM=2.

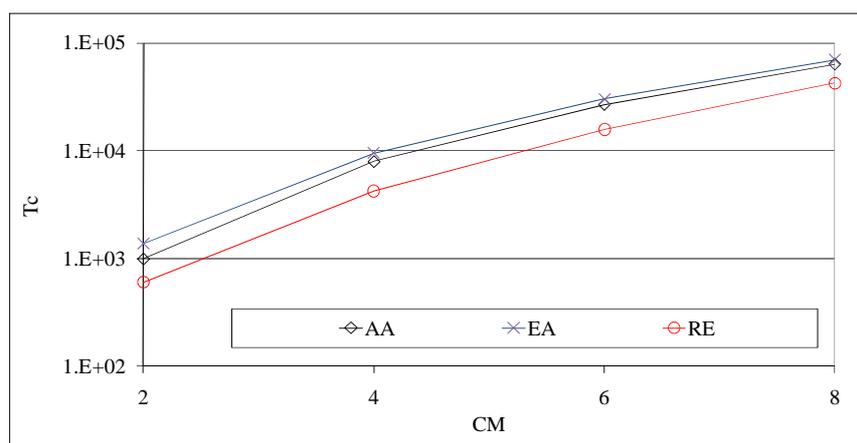


Figura 7: Valores de T_c^E para los nodos centrales y para los valores de CM donde CM es el segundo modo involucrado en el cambio modal. Ejemplo, para cambio modal entre modo 1 y 2, $CM=2$.

6 CONCLUSIONES

Se aplicaron las técnicas del cálculo de variaciones para obtener el modelo matemático del comportamiento de una viga tipo Bernoulli con los extremos elásticamente restringidos de rotaciones y traslaciones y con una restricción elástica general en un punto intermedio.

Se demostró la existencia de cambios en las formas modales y en las frecuencias para ciertos valores y ubicación de la restricción elástica traslacional intermedia. También se investigó los efectos sobre las frecuencias y modos de vibrar de la variación de las restricciones elásticas en los extremos de la viga y en el punto intermedio.

Se ampliaron los resultados obtenidos por Albarracín et al. (2004) donde se presentó un estudio sobre el comportamiento de las frecuencias de vibración y de los modos de vibración de una viga simplemente apoyada en sus extremos, cuando la rigidez de un resorte intermedio es variada dentro de un cierto intervalo.

Mediante el modelo desarrollado se obtuvieron los valores exactos del valor de la constante elástica de la restricción elástica intermedia que provoca el cambio modal.

Para los casos particulares con restricciones clásicas AA y EA se realizó adicionalmente una comparación con resultados experimentales del primer valor de la restricción elástica general en un punto intermedio, donde se observó que hubo una muy buena concordancia entre los valores medidos y los calculados con el modelo desarrollado.

La buena concordancia entre los valores teóricos y los experimentales ofrecen una adecuada validación del modelo matemático obtenido.

REFERENCIAS

- Albarracín, C. M., Zannier, L., Grossi, R. O., Some observations in the dynamics of beams with intermediate supports, *Journal of Sound and Vibration*, 271:475-480, 2004.
- Arenas, B. B., Grossi, R. O., Vibration frequencies for a beam with a rotational restraint in an adjustable position, *Applied Acoustics*, 57:197-202, 1999.
- Cortinez, H., Laura, P. A. A., Vibration and buckling of a non-uniform beam elastically restrained against rotation at one end and with concentrated mass at the other, *Journal of Sound and Vibration*, 99:144-148, 1985.
- De Rosa, M. A., Bellés, P. M., Maurizi, M. J., Free vibrations of stepped beams with intermediate elastic supports, *Journal of Sound and Vibration*, 181:905-910, 1995.

- Dym, C., Shames, I., *Solid Mechanics: A Variational Approach*, Mc Graw Hill Book Company, New York, 1973.
- Elsigoltz, L., *Calculus of Variations*, Addison-Wesley, 1962.
- Gelfand, I., Fomin, S., *Calculus of Variations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
- Giaquinta, M., Hildebrandt, S., *Calculus of Variations I*, Springer-Verlag, Berlín, 1996.
- Goel, P., Free vibrations of a beam-mass system with elastically restrained ends, *Journal of Sound and Vibration*, 47:9-14, 1976a.
- Goel, P., Transverse vibrations of tapered beams, *Journal of Sound and Vibration*, 47:1-7, 1976b.
- Grant, A., Vibration frequencies for a uniform beam with one end elastically supported and carrying a mass at the other end, *Journal of Applied Mechanics*, 42: 878-880, 1975.
- Grossi, R. O., Albarracín, C., Eigenfrequencies of generally restrained beams, *Journal of Applied Mathematics*, 10:503-516, 2003.
- Grossi, R. O., Aranda, A., Bhat, R. B., Vibration of tapered beams with one end spring hinged and the other end with tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 160:175-178, 1993.
- Grossi, R. O., Bhat, R. B., A note on vibrating tapered beams, *Journal of Sound and Vibration*, 47:174-178, 1991.
- Grossi, R. O., Laura, P. A. A., Further results on a vibrating beam with a mass and spring at the end subjected to an axial force, *Journal of Sound and Vibration*, 84:593-594, 1982.
- Grossi, R. O., Quintana, M. V., The transition condition in the dynamics of elastically restrained beams, *Journal of Sound and Vibration*, 316:274-297, 2008.
- Grossi, R. O., *Cálculo de Variaciones: teoría y aplicaciones*. Edit. Dsignum, CIMNE, Barcelona, España, 2010.
- Hibbeler, C., Free vibrations of a beam supported with unsymmetrical spring-hinges, *Journal of Applied Mechanics*, 42:501-502, 1975.
- Hildebrand, F., *Methods of Applied Mathematics*, Prentice Hall, New Jersey, 1965.
- Kantorovich, L., Krylov, V., *Approximate Methods of Higher Analysis*, Interscience Publishers, New York, 1964.
- Lau, J. H., Vibration frequencies and mode shapes for a constrained cantilever, *Journal of Applied Mechanics*, 57:182-187, 1984.
- Laura, P.A.A., Grossi, R. O., Alvarez, S., Transverse vibrations of a beam elastically restrained at one end and with a mass and spring at the other subjected to an axial force, *Nuclear Engineering and Design*, 74:299-302, 1982.
- Laura, P. A., Gutierrez, R. H., Vibration of an elastically restrained cantilever beam of varying cross section with tip mass of finite length, *Journal of Sound and Vibration*, 108:123-131, 1986.
- Maurizi, R., Rossi, R., Reyes, J., Vibration frequencies for a uniform beam with one end spring hinged and subjected to a translational restraint at the other end, *Journal of Sound and Vibration*, 48:565-568, 1976.
- Nallim, L., Grossi, R. O., A general algorithm for the study of the dynamical behaviour of beams, *Applied Acoustics*, 57:345-356, 1999.
- Rao, C. K., Frequency analysis of clamped-clamped uniform beams with intermediate elastic support, *Journal of Sound and Vibration*, 133:502-509, 1989.
- Rao, C. K., Mirza, S., Note on vibrations of generally restrained beams, *Journal of Sound and Vibration*, 130:453-465, 1989.
- Rutemberg, A., Vibration frequencies for a uniform cantilever with a rotational constraint at a point, *Journal of Applied Mechanics*, 45:422-423, 1978.

- Troutman, J. L., *Variational Calculus and Optimal Control*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- Weinstock, R., *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering*, Dover Publications, New York, 1974.