

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS COM SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS

Gustavo Bono<sup>a</sup>, Paulo R. M. Lyra<sup>b</sup> e Giuliana F.F. Bono<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Núcleo de Tecnologia – Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Rod. BR-104 km 59, Caruaru-PE, CEP 55002-970, Brasil, bonogustavo@gmail.com, giuliana.franca@gmail.com, <http://www.ufpe.br/caa>*

<sup>b</sup>*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco, Rua Acadêmico Hélio Ramos SN, Recife-PE, CEP 50740-530, Brasil, prmlyra@padmec.org, <http://www.ufpe.br/demec>*

**Palavras chave:** Simulação de Grandes Escalas, escoamento Incompressível, Método dos Elementos Finitos.

**Resumo.** Neste trabalho, apresenta-se um método numérico para a simulação de escoamentos turbulentos incompressíveis. O escoamento é analisado empregando as equações de Navier-Stokes e uma equação de conservação de massa considerando a hipótese de pseudo-compressibilidade. Para a simulação de escoamentos turbulentos, emprega-se a Simulação de Grandes Escalas (LES – Large Eddy Simulation) com os modelos clássico e de Smagorinsky dinâmico para as escalas inferiores à resolução da malha. O Método dos Elementos Finitos é empregado para a discretização do domínio espacial, utilizando o elemento isoparamétrico hexaédrico de oito nós. As matrizes do elemento correspondentes são obtidas analiticamente, empregando integração numérica reduzida. A influência dos modelos LES, do refinamento da malha e do esquema numérico são analisados e os principais parâmetros do escoamento são calculados. Finalmente, resultados numéricos obtidos com o presente modelo são apresentados e analisados para dois exemplos clássicos (escoamento entre duas placas paralelas e cavidade com uma superfície móvel) com diferentes números de Reynolds para demonstrar a viabilidade do código computacional implementado.

## 1 INTRODUÇÃO

O crescente aumento nas capacidades computacionais (memória e velocidade de processamento) somado à eficiência das diferentes arquiteturas de processamento (escalar, vetorial, paralelo, etc.) e desenvolvimento de algoritmos numéricos tornou possível a resolução das equações de Navier-Stokes sobre configurações tridimensionais reais. Esta evolução foi acompanhada pelo desenvolvimento de novos modelos de turbulência para o fechamento das equações médias espaciais e temporais de Navier-Stokes (RANS - Reynolds Averaged Navier-Stokes).

Embora inviáveis para problemas complexos reais (elevado número de Reynolds) devido às atuais limitações computacionais a metodologia de Simulação de Grandes Escalas (LES – Large Eddy Simulation) e a Simulação Numérica Direta (DNS – Direct Numerical Simulation) representam os futuros desafios na simulação de escoamentos turbulentos.

Um largo espectro de energia é uma das mais importantes características dos escoamentos turbulentos. A consequência imediata é que é muito difícil simular todas as escalas que o caracterizam, ou seja, o uso da metodologia DNS somente é possível para exemplos com moderados números de Reynolds e a grande maioria dos escoamentos é caracterizada por altos números de Reynolds.

A metodologia LES, inicialmente proposta por Smagorinsky (1963), consiste em resolver diretamente as maiores estruturas turbulentas, que contêm a maior parte da energia, e modelar apenas as menores estruturas. A metodologia LES baseia-se na premissa de que os movimentos nas menores escalares tendem a ser mais homogêneo e isotrópico, conseqüentemente, menos afetadas pelas condições de contorno. Assim, pode-se esperar que a modelagem dessas escalas tenha um caráter universal, ou seja, uma menor dependência do tipo de escoamento que está sendo simulado.

A mais popular aproximação empregada como modelo sub-malha da metodologia LES tem sido o modelo proposto por Smagorinsky (1963). Neste modelo as tensões de Reynolds sub-malha são aproximadas na forma de um processo de difusão por gradiente, fazendo analogia ao movimento molecular. Através do conceito de viscosidade turbulenta introduzida na hipótese de Boussinesq pode-se realizar o fechamento das equações de Navier-Stokes filtradas.

Neste trabalho, pretende-se validar o esquema numérico de Taylor-Galerkin explícito de dois passos para a simulação de escoamentos incompressíveis, como o método de Simulação de Grandes Escalas de turbulência. O escoamento é analisado empregando as equações de Navier-Stokes e uma equação de conservação de massa considerando a hipótese de pseudo-compressibilidade. Para a simulação de escoamentos turbulentos, emprega-se a Simulação de Grandes Escalas com os modelos clássico e de Smagorinsky dinâmico para as escalas inferiores à resolução da malha. O FEM é empregado para a discretização do domínio espacial, utilizando o elemento isoparamétrico hexaédrico de oito nós. As matrizes do elemento correspondentes são obtidas analiticamente, empregando integração numérica reduzida.

O artigo é organizado da seguinte forma: o modelo matemático do problema é apresentado na Seção 2, a hipótese de pseudo-compressibilidade é dada na Seção 3, as formulações para escoamentos turbulentos com os modelos de Smagorinsky e Smagorinsky dinâmico são descritos na Seção 4. Na Seção 5, apresentamos a formulação numérica. Na Seção 6, apresentam-se alguns exemplos numéricos de validação, e por último apresentamos as principais conclusões e trabalhos futuros.

## 2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

As equações de conservação de massa e de quantidade de movimento são as equações mais gerais para a descrição de um escoamento em um meio contínuo, tridimensional, isotérmico, turbulento e em regime transiente. Desprezando as forças de volume e a existência de fonte/sumidouro as equações que governam o problema podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{em } \Omega. \quad (2)$$

com  $i, j = 1, 2, 3$  onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  e  $(0, T)$  são os domínios espacial e temporal, respectivamente,  $N = 3$  é o número de dimensões espaciais e  $\Gamma$  denota o contorno de  $\Omega$ . As coordenadas espaciais e temporais são denotadas por  $x$  e  $t$ .  $v_i$  é a componente da velocidade na direção da coordenada  $x_i$ ,  $\rho$  é a massa específica,  $p$  é a pressão termodinâmica,  $\tau_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões viscosas e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Considerando a hipóteses de Stokes a equação constitutiva é definida como:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right). \quad (3)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido. Para definir totalmente o problema, devem-se adicionar ao sistema de equações, dado pelas equações (1) e (2), as condições iniciais e de contorno para as variáveis. As condições iniciais, em  $t = t^0$ , são dadas por:

$$v_i = v_i^0, \quad p = p^0. \quad (4)$$

As condições de contorno essenciais (Dirichlet) são as seguintes:

$$v_i = \bar{v}_i \quad \text{em } \Gamma_v. \quad (5)$$

$$p = \bar{p} \quad \text{em } \Gamma_p. \quad (6)$$

onde,  $\bar{v}_i$  e  $\bar{p}$  são os valores prescritos das variáveis  $v_i$  e  $p$  nas partes  $\Gamma_v$  e  $\Gamma_p$  do contorno  $\Gamma$ . As condições de contorno naturais (Neumann) são dadas por:

$$\left( -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \right) n_j = \hat{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma. \quad (7)$$

sendo,  $n_j$  os cossenos diretores da normal externa num ponto de  $\Gamma_\sigma$  com o eixo  $x_j$ ,  $\hat{t}_i$  é a componente de uma força de superfícies na direção do  $x_i$ , atuando na parte  $\Gamma_\sigma$  do contorno.

## 3 HIPÓTESE DE PSEUDO-COMPRESSIBILIDADE

As equações que modelam o escoamento transiente incompressível viscoso numa descrição euleriana em coordenadas cartesianas podem ser escritas considerando a hipótese de pseudo-compressibilidade empregada por Kawahara e Hirano (1983). Esta hipótese modifica a equação de conservação de massa possibilitando escrevê-la em função da derivada temporal da pressão. Esta aproximação foi amplamente empregada por vários autores (Braun e

Awruch, 2005; Petry e Awruch, 2006; Popiolek et al., 2006; entre outros) para a resolução de escoamentos incompressíveis.

Após algumas manipulações algébricas e considerando a velocidade de propagação do som ( $c$ ) para um escoamento isotérmico e isentrópico, obtém-se a nova equação de conservação de massa para um escoamento levemente compressível:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + c^2 \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (8)$$

#### 4 SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS (LES)

Apesar de que as equações de Navier-Stokes são válidas para qualquer tipo de escoamento (laminar e turbulento), o mecanismo conhecido como *cascata de energia* dificulta o tratamento da turbulência. Atualmente um dos grandes desafios da CFD são a simulação e modelagem de escoamentos turbulentos. A maior parte dos escoamentos encontrados nos processos naturais e em aplicações práticas são turbulentos, portanto, este campo de pesquisas está em contínuo estudo no meio acadêmico e industrial. Constantemente os modelos existentes são aprimorados e novas metodologias de modelagem da turbulência são apresentadas.

A metodologia LES baseia-se na idéia de filtrar as variáveis de campo do problema para separar as grandes escalas das pequenas escalas. Após o processo de filtragem cada variável, escreve-se em dois componentes  $f(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{x}, t) + f'(\mathbf{x}, t)$  onde:  $\bar{f}(\mathbf{x}, t)$  é a componente filtrada (resolvida) e  $f'(\mathbf{x}, t)$  é a componente função das pequenas escalas ou sub-malha (modelada). A partir da escolha de um operador de filtragem, a primeira componente fica definida como:

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}', t) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (9)$$

onde a função filtro espacial é definida, na forma de um filtro volumétrico do tipo *box*:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} 1/\bar{\Delta} & \text{se } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq \bar{\Delta}/2 \\ 0 & \text{se } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \bar{\Delta}/2 \end{cases}. \quad (10)$$

onde  $\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z} = \sqrt[3]{\text{volume elemento}}$  é a dimensão do filtro no contexto do FEM.

Aplicando-se este filtro à equação de conservação de massa (8) e de quantidade de movimento (2), obtém-se as equações filtradas. No formato da equação de conservação de massa não há alteração, entretanto, no termo da parcela advectiva na equação de quantidade de movimento, o termo não linear torna-se um produto filtrado, impossibilitando a solução do sistema de equações. Para contornar o problema emprega-se o tensor de Reynolds global sub-malha  $\tau_{ij}^{SGS} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j$ , chegando-se finalmente a seguinte equação filtrada:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \tau_{ij}^{SGS} \right). \quad (11)$$

onde  $\tau_{ij}^{SGS}$  são as componentes do tensor de tensões sub-malhas na equação de conservação de quantidade de movimento. Empregando a hipótese de Boussinesq é possível modelar a parte anisotrópica do tensor de Reynolds global sub-malha, ou seja, escrevendo o mesmo em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidades filtrado:

$$\tau_{ij}^{SGS} - \frac{\tau_{kk}}{3} \delta_{ij} = -2 \nu_t \bar{S}_{ij}. \quad (12)$$

sendo o tensor taxa de deformação  $\bar{S}_{ij}$ , dado por:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right). \quad (13)$$

#### 4.1 Modelo Sub-malha de Smagorinsky

A viscosidade turbulenta  $\nu_t$  proposta por Smagorinsky (1963) é dada como:

$$\nu_t = (C_s \bar{\Delta})^2 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} = (C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}|. \quad (14)$$

onde  $C_s$  é a constante de Smagorinsky, assumindo valores diferentes de acordo ao tipo de escoamento, e  $\bar{\Delta}$  é a dimensão característica associada ao filtro empregado. Com o objetivo de evitar a dependência da constante de proporcionalidade de Smagorinsky, foram desenvolvidos os modelos dinâmicos, onde a constante é função do tempo e espaço.

#### 4.2 Modelo Sub-malha de Smagorinsky Dinâmico

Este modelo está baseado no uso de dois filtros com comprimentos característicos diferentes. Para a primeira filtragem usam-se as dimensões da malha para calcular o seu comprimento característico, ou seja, exatamente como no modelo de Smagorinsky. No segundo filtro usa-se um múltiplo das dimensões da malha para calcular o comprimento característico do filtro teste. O comprimento característico do segundo filtro,  $\langle \bar{\Delta} \rangle$ , é maior que o comprimento característico do filtro no nível da malha,  $\bar{\Delta}$ .

Empregando o modelo sub-malha dinâmico, proposto por Germano et al. (1991) e modificado posteriormente por Lilly (1992), a viscosidade turbulenta fica definida por:

$$\nu_t = C(\mathbf{x}, t) \bar{\Delta}^2 |\bar{S}|. \quad (15)$$

onde  $C(\mathbf{x}, t)$  é o coeficiente dinâmico, o qual é calculado automaticamente em função da posição no espaço  $\mathbf{x}$  e do tempo  $t$ . O coeficiente dinâmico é dado por:

$$C(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}. \quad (16)$$

onde os tensores  $L_{ij}$  e  $M_{ij}$  são definidos segundo Germano et al. (1991):

$$L_{ij} = \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle - \langle \bar{v}_i \rangle \langle \bar{v}_j \rangle. \quad (17)$$

$$M_{ij} = \langle \bar{\Delta} \rangle^2 \langle \bar{S}_{ij} \rangle \langle \bar{S}_{ij} \rangle - \langle \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \rangle. \quad (18)$$

com  $i, j = 1, 2, 3$ . Nas equações (17) e (18) a barra sobreposta indica o primeiro processo de filtragem e o símbolo  $\langle \rangle$  refere-se ao segundo processo de filtragem (filtro teste). Observa-se que os tensores  $L_{ij}$  e  $M_{ij}$  podem ser calculados explicitamente, uma vez que os valores presentes nas equações são todos conhecidos.

## 5 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

As equações de conservação de massa e de quantidade de movimento são resolvidas empregando o método dos elementos finitos (FEM), usando uma série de Taylor e o clássico método de Bubnov-Galerkin para a discretização do tempo e do espaço, respectivamente. O esquema de Taylor-Galerkin (TG) pode ser interpretado como a versão em elementos finitos do método de Lax-Wendroff usado em diferenças finitas.

Neste trabalho, para a resolução das equações de conservação de massa e de Navier-Stokes, foi implementado o esquema de Taylor-Galerkin explícito de dois passos empregado por Braun e Awruch (2005) e Braun (2007). O esquema resultante é de segunda ordem no espaço e no tempo. Para discretizar a geometria emprega-se o elemento hexaédrico trilinear com integração analítica reduzida das matrizes em nível de elemento, a fim de reduzir o tempo de CPU e o consumo de memória.

### 5.1 Esquema de TG de dois passos

O esquema de dois passos introduzido por Kawahara e Hirano (1983) é aplicado sobre as equações que modelam o escoamento incompressível de um fluido newtoniano. Este método foi empregado exitosamente para escoamentos incompressíveis (Braun e Awruch, 2005; Petry e Awruch, 2006; Bono, 2008) e compressíveis (Bono, 2008).

Aplicando o método de Bubnov-Galerkin no contexto do FEM nas equações de conservação de massa e de quantidade de movimento, após expansão em série de Taylor no tempo obtemos o esquema de dois passos, o qual se pode resumir nos seguintes passos:

1 – Determinação da velocidade no passo  $n+1/2$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_i^{n+1/2}$ , e aplicação das condições de contorno:

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{v}}_i^{n+1/2} = \mathbf{M} \mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{1}{\rho} \mathbf{G}_j \delta_{ij} \mathbf{p} - (\mathbf{AD} + \mathbf{BD}) \mathbf{v}_i - \mathbf{D}_{ij} \mathbf{v}_j + \{\tilde{f}_i\} + \{\tilde{b}_{dv_i}\} \right]^n. \quad (19)$$

2 – Determinação da pressão no passo  $n+1/2$ ,  $\mathbf{p}^{n+1/2}$ , e aplicação da condição de contorno:

$$\mathbf{M} \mathbf{p}^{n+1/2} = \mathbf{M} \mathbf{p}^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ (\mathbf{AD} + \mathbf{BD}) \mathbf{p} + \rho c^2 \mathbf{G}_j^T \mathbf{v}_j - \{\tilde{b}_{dp}\} \right]^n. \quad (20)$$

3 – Calcular o incremento de pressão com:

$$\Delta \mathbf{p}^{n+1/2} = \mathbf{p}^{n+1/2} - \mathbf{p}^n. \quad (21)$$

4 – Calcular a correção da velocidade com:

$$\mathbf{v}_i^{n+1/2} = \bar{\mathbf{v}}_i^{n+1/2} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t^2}{8} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \delta_{ij} d\Omega (\Delta \mathbf{p}^{n+1/2}). \quad (22)$$

5 – Calcular a velocidade no passo  $n+1$ ,  $\mathbf{v}_i^{n+1}$ , com:

$$\mathbf{M} \mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{v}_i^n + \Delta t \left[ \frac{1}{\rho} \mathbf{G}_j \delta_{ij} \mathbf{p} - \mathbf{AD} \mathbf{v}_i - \mathbf{D}_{ij} \mathbf{v}_j + \{\tilde{f}_i\} \right]^{n+1/2}. \quad (23)$$

6 – Calcular a pressão no passo  $n+1$ ,  $\mathbf{p}^{n+1}$ , com:

$$\mathbf{M} \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{p}^n - \Delta t \left[ \mathbf{AD} \mathbf{p} + \rho c^2 \mathbf{G}_j^T \mathbf{v}_j \right]^{n+1/2}. \quad (24)$$

As matrizes e vetores mostrados anteriormente são definidos a nível de elemento da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \\
 \mathbf{AD} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{N} \mathbf{v}_i^n) \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \, d\Omega \\
 \mathbf{G}_j &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{N} \, d\Omega \\
 \mathbf{G}_j^T &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \, d\Omega \\
 \mathbf{BD} &= \frac{\Delta t}{4} \int_{\Omega_e} (\mathbf{N} \mathbf{v}_i^n) (\mathbf{N} \mathbf{v}_j^n) \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 \{\tilde{b}_{dv_i}\} &= \frac{\Delta t}{4} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{*T} \left[ (\mathbf{N} \mathbf{v}_j^n) (\mathbf{N} \mathbf{v}_k^n) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_k} \mathbf{v}_i^n \right] n_j \, d\Gamma \\
 \{\tilde{b}_{dp}\} &= \frac{\Delta t}{4} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^{*T} \left[ (\mathbf{N} \mathbf{v}_j^n) (\mathbf{N} \mathbf{v}_k^n) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_k} \mathbf{p}^n \right] n_j \, d\Gamma \\
 \{\tilde{f}_i\} &= \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^{*T} \left[ (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \mathbf{v}_i^n + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \mathbf{v}_j^n \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda}{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_k} \mathbf{v}_k^n \right) \delta_{ij} - \frac{1}{\rho} \mathbf{N} \mathbf{p}^n \right] n_j \, d\Gamma
 \end{aligned} \quad \mathbf{D}_{ij} = \begin{cases} \int_{\Omega_e} \left[ 2(\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) + \frac{\lambda}{\rho} \right] \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \, d\Omega \\ \quad + \int_{\Omega_e} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_k} \, d\Omega \\ \quad \text{se } i = j, \begin{cases} i = 1 \rightarrow k = 2, 3 \\ i = 2 \rightarrow k = 1, 3 \\ i = 3 \rightarrow k = 1, 2 \end{cases} \\ \int_{\Omega_e} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \, d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \, d\Omega \\ \quad \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{26}$$

onde  $\lambda$  é a viscosidade volumétrica,  $\mathbf{N}$  é um vetor que contém as funções de forma de suporte compacto,  $n_j$  são os cossenos diretores da normal ao contorno  $\Gamma_e$  de acordo com a direção de  $x_j$  e  $\mathbf{N}^*$  é um vetor contendo as funções de interpolação avaliadas sobre o contorno  $\Gamma_e$ .

A formulação apresentada foi definida para um elemento genérico, para resolver as equações é preciso primeiramente efetuar a montagem das equações de elemento para obter o sistema completo. Se isto for efetuado utilizando a matriz de massa consistente  $\mathbf{M}$ , o resultado é um sistema de equações acopladas que não podem ser resolvidas explicitamente. No entanto, definindo a matriz de massa diagonal ou discreta  $\mathbf{M}_L$  no lugar da matriz de massa consistente, obtém-se um sistema de equações desacoplado. Esta transformação permite resolver o sistema de equações em forma explícita e representa uma aproximação com pequena perda de acurácia, porém com ampliação no limite de estabilidade (Peraire, 1986).

Para a discretização espacial do domínio, utiliza-se o elemento hexaédrico trilinear com integração analítica das matrizes em nível de elemento e a técnica de controle de modos espúrios proposta por Christon (1997).

Os esquemas explícitos são condicionalmente estáveis, o que significa dizer que devem cumprir alguma condição de estabilidade que limite o valor do incremento de tempo utilizado. No caso de esquema explícito de TG para escoamentos incompressíveis, considerando um problema de advecção dominante, a condição de estabilidade pode ser expressa da seguinte forma:

$$\Delta t_i = CS \frac{L_e}{c + v_i} \tag{27}$$

onde,  $\Delta t_i$  é o incremento de tempo crítico do elemento  $i$ ,  $CS$  é um coeficiente de segurança (sempre  $CS < 1$ ),  $L_e$  é um comprimento característico do elemento (menor aresta),  $c$  é a velocidade do som e  $v_i$  é a velocidade.

## 6 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E RESULTADOS NUMÉRICOS

A metodologia LES é, por definição, aplicada a escoamentos tridimensionais. No presente trabalho ela é aplicada como aproximação à resolução de problemas bidimensionais (2-D). O problema 2-D foi modelado geometricamente como um problema tridimensional (1 elemento hexaédrico na direção perpendicular) sendo adotadas as condições de contorno para simular um escoamento bidimensional.

### 6.1 Escoamento laminar entre duas placas paralelas

A geometria e as condições de contorno do problema do escoamento laminar entre duas placas paralelas são dadas na Figura 1. O domínio computacional compreende a altura  $D$ , e seu comprimento é igual a  $L = 8D$ . Este comprimento garante que o escoamento seja plenamente desenvolvido na seção de saída. A distribuição de velocidade na entrada (aresta AD) é uniforme,  $v_e = 1.0$  [m/s], e fixa-se o número de Reynolds igual a  $Re = (v_e D)/\nu = 100$ .

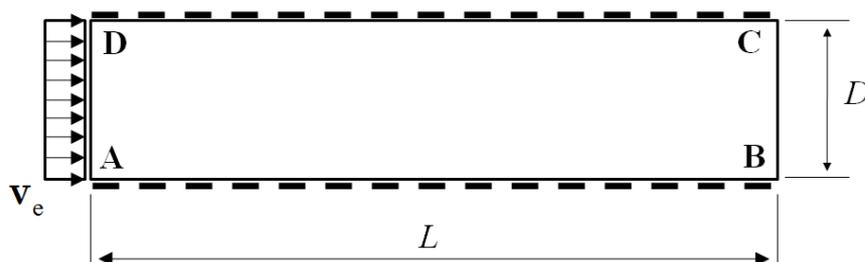


Figura 1: Domínio computacional para o exemplo do escoamento entre duas placas paralelas

As condições de contorno impostas para a velocidade foram as seguintes:  $(v_1, v_2, v_3) = (1.0, 0, 0)$  na aresta AD e  $(v_1, v_2, v_3) = (0, 0, 0)$  para as arestas AB e DC. A pressão  $p = 0$  foi prescrita na aresta BC.

Para este exemplo, empregam-se cinco malhas diferentes (M1 até M5), mantendo constante a razão de refinamento ( $r = \Delta y / \Delta x = cte.$ ) entre elas, como sugerido por Salas (2006). Na Tabela 1, mostram-se para cada malha o número de elementos ( $nele$ ), o número de nós ( $nno$ ) e o incremento de tempo ( $\Delta t$ ).

Malha	$nele$	$nno$	$\Delta t$
M1	8x4x1	90	$2,94 \times 10^{-3}$
M2	16x8x1	306	$1,83 \times 10^{-3}$
M3	32x16x1	1122	$9,19 \times 10^{-4}$
M4	64x32x1	4290	$4,59 \times 10^{-4}$
M5	128x64x1	16770	$2,29 \times 10^{-4}$

Tabela 1: Dados das malhas e principais parâmetros do exemplo do escoamento entre duas placas paralelas.

Na Figura 2, mostra-se o perfil de velocidade adimensional na seção de saída (aresta BC) para as cinco malhas analisadas. Pode-se observar que os melhores resultados são obtidos

com a malha M5, sendo a máxima velocidade igual a 1.4756 [m/s]. A máxima velocidade analítica em  $y = 0.5$  é igual a 1.50 [m/s].

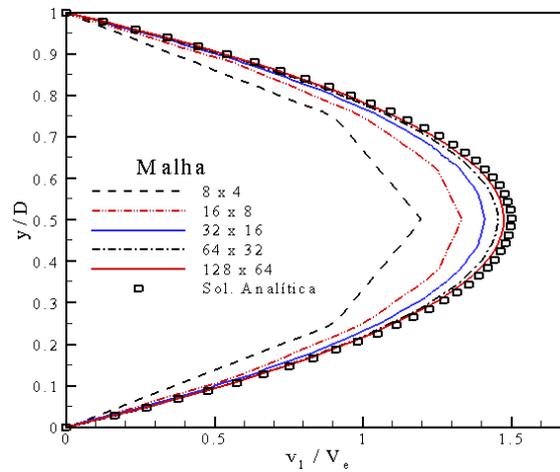


Figura 2: Perfil de velocidade na seção de saída para o exemplo do escoamento entre duas placas paralelas

A existência da solução analítica possibilita um estudo rigoroso das principais características do algoritmo implementado. Na Figura 3, verifica-se a ordem de precisão da simulação numérica medida por diferentes normas do erro da velocidade no plano de saída, onde o escoamento é completamente desenvolvido. As normas do erro  $L_1$  e  $L_2$  podem ser escritas como:

$$L_1 = \frac{1}{nno} \sum_{i=1}^{nno} \left| \frac{\phi_i - \phi_i^e}{\phi_i^e} \right| \quad \text{e} \quad L_2 = \sqrt{\frac{1}{nno} \sum_{i=1}^{nno} \left( \frac{\phi_i - \phi_i^e}{\phi_i^e} \right)^2} \quad (28)$$

onde,  $\phi$  é a componente da velocidade horizontal ( $v_1$ ),  $\phi^e$  é a solução exata da componente da velocidade horizontal ( $v_1^e$ ) e  $nno$  é o número de nós. Como medida do comprimento característico da malha adota-se a relação  $h = (1/nno)^{1/3}$ .

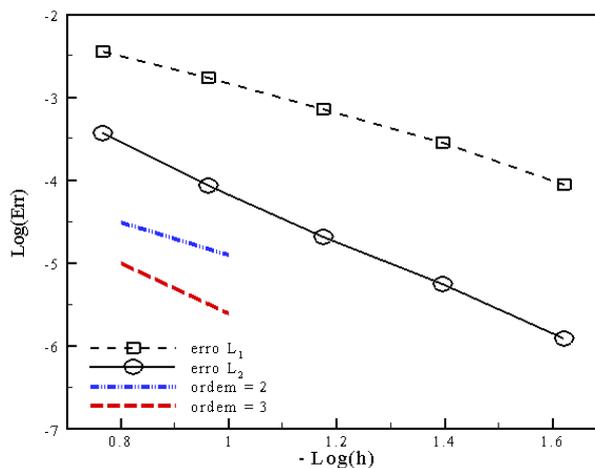


Figura 3: Estudo de convergência para o exemplo do escoamento entre duas placas paralelas

O comportamento do esquema demonstra uma convergência monotônica, reduzindo o erro

na medida em que se diminui o tamanho do elemento. Calculando-se a ordem de convergência do esquema, considerando as duas últimas malhas (M4 e M5), obtêm-se para as normas dos erros  $L_1$  e  $L_2$  os valores 2.21 e 2.87, respectivamente. A ordem do método varia entre 2 e 3, resultando ligeiramente superior ao valor teórico. O erro com a norma  $L_1$  (erro médio) resulta maior que o erro associado à norma  $L_2$ .

## 6.2 Escoamento em cavidades com tampa deslizante

Durante décadas o estudo do escoamento em cavidades retangulares com tampa deslizante tem despertado o interesse de pesquisadores das áreas experimentais e numéricas. Todos os resultados apresentados neste trabalho são para cavidades bidimensionais com relação de aspecto 1:1:0.25. O número de Reynolds,  $Re = (Lv)/\nu$ , é definido a partir do comprimento característico da cavidade ( $L$ ), a velocidade de deslizamento da tampa ( $v$ ) e a viscosidade cinemática ( $\nu$ ). Em todos os casos analisados manteve-se a dimensão característica e a velocidade de deslizamento constante e igual a 1,0 [m/s]. A variação do número de Reynolds obteve-se modificando o valor da viscosidade. Mostra-se na Figura 4, o domínio empregado para todos os exemplos estudados com as coordenadas dadas em metros [m].

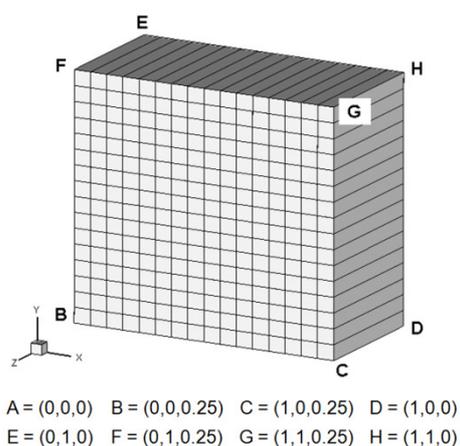


Figura 4: Domínio computacional do exemplo da cavidade

As condições de contorno impostas para a velocidade foram as seguintes:  $(v_1, v_2, v_3) = (1.0, 0, 0)$  para o plano EFGH,  $(v_1, v_2, v_3) = (0, 0, 0)$  para os planos AEFB, ABCD, CGHD e  $v_3 = 0$  para os planos ADHE e BFGC. A pressão  $p = 0$  foi prescrita nos pontos de coordenadas  $(0.5, 0, 0)$  e  $(0.5, 0, 0.25)$ .

Os exemplos analisados são identificados como “CavXY”, onde a letra “X” indica a malha empregada e “Y” identifica o número de Reynolds e o tipo de modelo de turbulência empregado. Na Tabela 2, mostram-se para cada exemplo a identificação da malha, o número de elementos (*nele*), o número de nós (*nno*) e o incremento de tempo ( $\Delta t$ ). As malhas Cav1Y até Cav5Y são uniformes nas duas direções. Na malha, Cav7Y, os elementos são concentrados perto das paredes da cavidade, sendo a relação entre o máximo e o mínimo volume dos elementos igual a 25.

As principais características de todos os casos estudados são apresentadas na Tabela 3. Indicando-se o número de Reynolds ( $Re$ ), o modelo de turbulência (Mod. Turb.) e a constante de Smagorinsky ( $C_S$ ) empregada para o modelo de sub-malha de Smagorinsky (ver item 4.1). Para os casos de  $Re = 1000$ , empregaram-se os modelos sub-malha de Smagorinsky (Smag.) e

de Smagorinsky Dinâmico (Smag. Din.).

Malha	<i>nele</i>	<i>nno</i>	$\Delta t$
Cav1Y	16x16x1	578	$1,95 \times 10^{-3}$
Cav2Y	32x32x1	2178	$4,59 \times 10^{-4}$
Cav3Y	64x64x1	8450	$2,29 \times 10^{-4}$
Cav4Y	128x128x1	33282	$1,14 \times 10^{-4}$
Cav5Y	256x256x1	132098	$5,74 \times 10^{-5}$
Cav7Y	128x128x1	33282	$4,60 \times 10^{-5}$

Tabela 2: Dados das malhas e principais parâmetros do exemplo da cavidade.

Caso	Re	Mod. Turb.	$C_s$
Cav1A	10	não	
Cav1B	100	não	
Cav1C	400	não	
Cav2A	10	não	
Cav2B	100	não	
Cav2C	400	não	
Cav3A	10	não	
Cav3B	100	não	
Cav3C	400	não	
Cav4A	10	não	
Cav4B	100	não	
Cav4C	400	não	
Cav4D1	1000	Smag.	0.15
Cav4D2	1000	Smag.	0.18
Cav4D3	1000	Smag.	0.21
Cav4D4	1000	Smag. Din.	-
Cav5D1	1000	Smag.	0.15
Cav5D4	1000	Smag. Din.	-
Cav7D1	1000	Smag.	0.15
Cav7D2	1000	Smag.	0.18
Cav7D3	1000	Smag.	0.21
Cav7D4	1000	Smag. Din.	-

Tabela 3: Identificação dos exemplos da cavidade.

Na Figura 5 são mostradas as distribuições das componentes de velocidade  $v_1$  e  $v_2$  para a malha (Cav4) com número de Reynolds iguais a 10, 100 e 400, respectivamente. Observa-se que para todos os casos analisados ( $Re = 10, 100$  e  $400$ ) a malha permite capturar os principais fenômenos do escoamento. Pode-se observar que a região de menor velocidade (cor azul) na componente  $v_1$  desloca-se para a direita e para baixo quando o número de Reynolds aumenta. A componente da velocidade  $v_2$  é praticamente simétrica para  $Re = 10$  deixando de ser na medida em que aumenta o número de Reynolds.

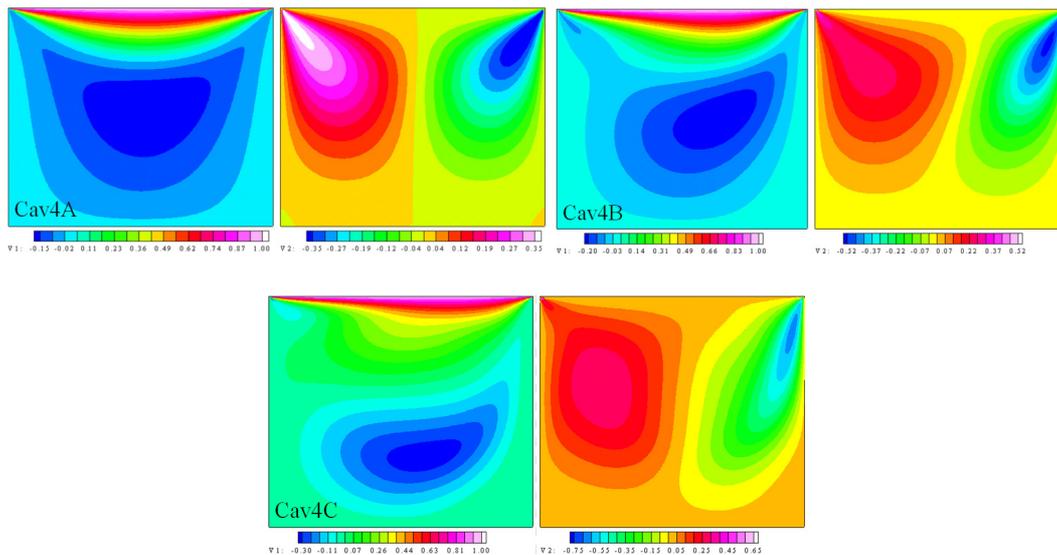


Figura 5: Distribuição da componente de velocidade  $v_1$  e  $v_2$  para a malha Cav4 com  $Re = 10, 100$  e  $400$

O comportamento das linhas de corrente e a distribuição da pressão para os números de Reynolds igual a 10, 100 e 400 com a malha (Cav4) apresenta-se na Figura 6. A topologia do escoamento para os três números de Reynolds analisados são muito parecidas: um vórtice principal na região central e vórtices secundários nos cantos inferiores que aumentam seu tamanho com o aumento do número de Reynolds. O crescimento sempre é maior no vórtice do canto inferior direito.

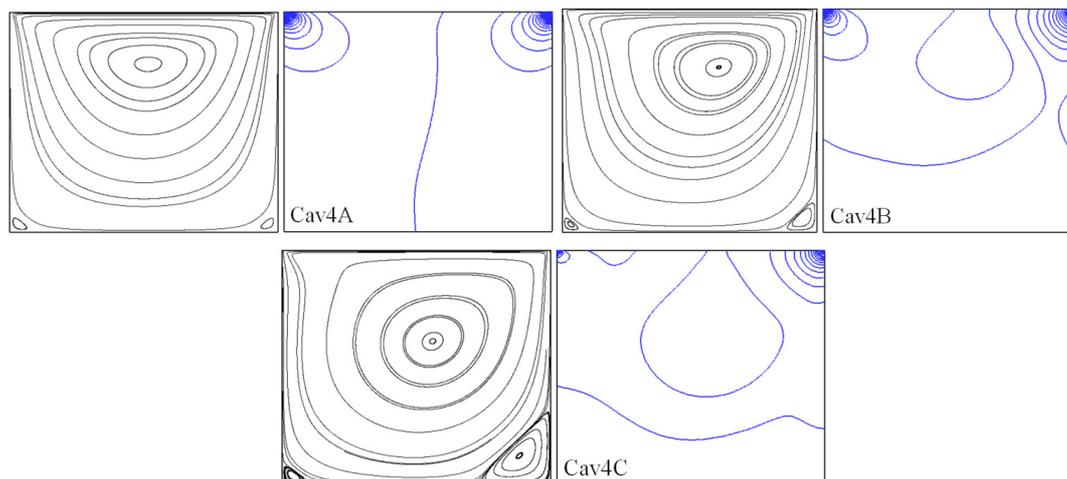


Figura 6: Distribuição das linhas de corrente e pressão para a malha Cav4 com  $Re = 10, 100$  e  $400$

Na Tabela 4, são apresentadas as coordenadas  $(x, y)$  do centro do vórtice primário obtidas com as malhas Cav1 e Cav4 para os números de Reynolds iguais a 10, 100 e 400 e sua comparação com os resultados obtidos por outros pesquisadores. Observa-se que não existe uma grande discrepância entre os resultados obtidos com a malha grosseira (Cav1) e a malha refinada (Cav4). Os resultados obtidos com a malha Cav4 apresentam uma boa concordância com os resultados apresentados na literatura.

Ref.	$Re = 10$	$Re = 100$	$Re = 400$
Cav1	(0.5154, 0.7642)	(0.6108, 0.7392)	(0.5541, 0.5942)
Cav4	(0.5166, 0.7646)	(0.6157, 0.7373)	(0.5613, 0.6123)
Ghia et al. (1982)	---	(0.6172, 0.7344)	(0.5547, 0.6055)
Gupta e Kalita (2005)	---	(0.6125, 0.7375)	(0.5500, 0.6125)
Hou et al. (1995)	---	(0.6196, 0.7373)	(0.5608, 0.6078)
Marchi et al. (2009)	---	(0.6162, 0.7373)	(0.5537, 0.6054)

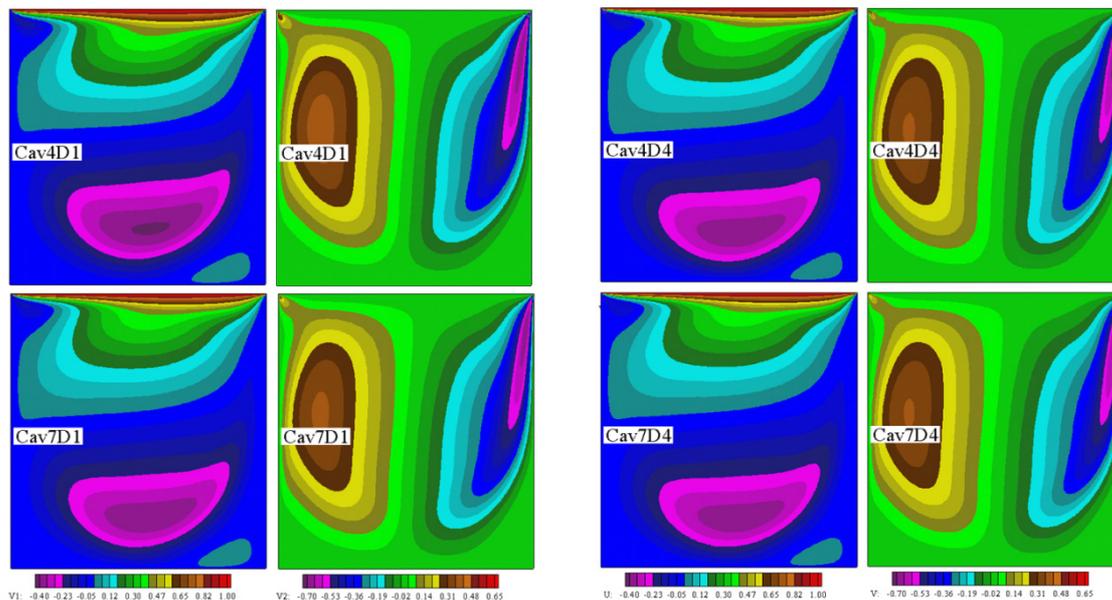
Tabela 4: Posição  $(x, y)$  do centro do vórtice primário.

As coordenadas do centro dos vórtices secundários obtidos com a malha Cav4 são mostradas na Tabela 5, para os números de Reynolds igual a 100 e 400. Na mesma tabela também são apresentados resultados encontrados na literatura. Da Tabela 5, pode-se concluir que existe uma ótima concordância entre os resultados obtidos no presente trabalho e os apresentados por outros pesquisadores.

Na Figura 7, são mostradas as distribuições das componentes de velocidade  $v_1$  e  $v_2$  para as malhas de  $128 \times 128$  elementos (Cav4 e Cav7) com os modelos de turbulência de Smagorinsky e Smagorinsky Dinâmico e número de Reynolds igual a 1000. Devido ao fato de que a diferença na distribuição de velocidade é mínima entre os casos analisados, somente são mostrados os casos Cav4D1, Cav7D1, Cav4D4 e Cav7D4.

Ref.	Re = 100		Re = 400	
	inferior izquierdo	inferior derecho	inferior izquierdo	inferior derecho
Cav4	(0.0339, 0.0341)	(0.9427, 0.0615)	(0.0436, 0.0410)	(0.8838, 0.1257)
Ghia et al. (1982)	(0.0313, 0.0391)	(0.9453, 0.0625)	(0.0508, 0.0469)	(0.8906, 0.1250)
Gupta e Kalita (2005)	(0.0375, 0.0375)	(0.9375, 0.0625)	(0.0500, 0.0500)	(0.8875, 0.1250)
Hou et al. (1995)	(0.0392, 0.0353)	(0.9451, 0.0627)	(0.0549, 0.0510)	(0.8902, 0.1255)

Tabela 5: Posição (x, y) dos centros dos vórtices secundários.

Figura 7: Distribuição das componentes de velocidade  $v_1$  e  $v_2$  para a malha uniforme (Cav4) e concentrada (Cav7) com  $Re = 1000$ .

As linhas de corrente permitem visualizar a topologia do escoamento, ficando evidente o vórtice principal na região central da cavidade e os dois vórtices secundários na parte inferior. Na Figura 8, mostram-se as linhas de corrente apenas para os casos Cav4D1, Cav7D1, Cav4D4 e Cav7D4. As linhas de corrente entre os quatro casos analisados apresentam uma boa concordância e com relação aos resultados encontrados na literatura.

Na Figura 9, mostra-se em mais detalhes a região perto do vórtice secundário direito. Observa-se que no caso do modelo sub-malha de Smagorinsky a malha (Cav4 ou Cav7) influencia a posição e tamanho do vórtice, entretanto, no caso do modelo sub-malha de Smagorinsky Dinâmico a influência do tipo de malha é mínima.

As linhas de corrente na proximidade do vórtice secundário direito para a malha mais refinada (Cav5), mostra-se na Figura 10, no caso dos dois modelos sub-malhas de Smagorinsky. Observa-se que a posição e tamanho do vórtice são coincidentes com os resultados obtidos empregando o modelo sub-malha de Smagorinsky Dinâmico, ver Figura 9. Vale salientar que as diferenças observadas entre os dois modelos de Smagorinsky para a malha de  $128 \times 128$  elementos uniformemente espaçados são desprezíveis na malha de  $256 \times 256$  elementos.

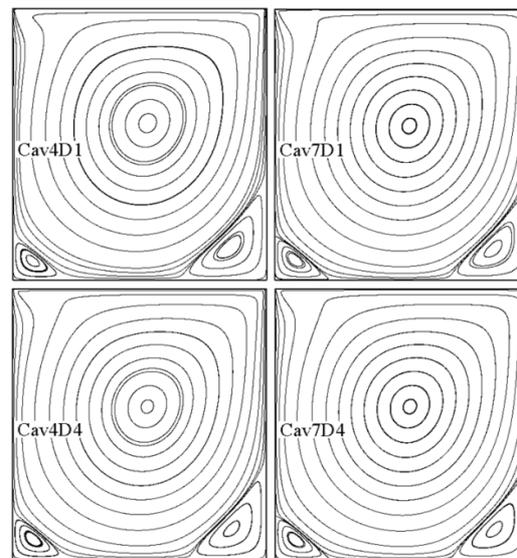


Figura 8: Distribuição das linhas de corrente para  $Re = 1000$

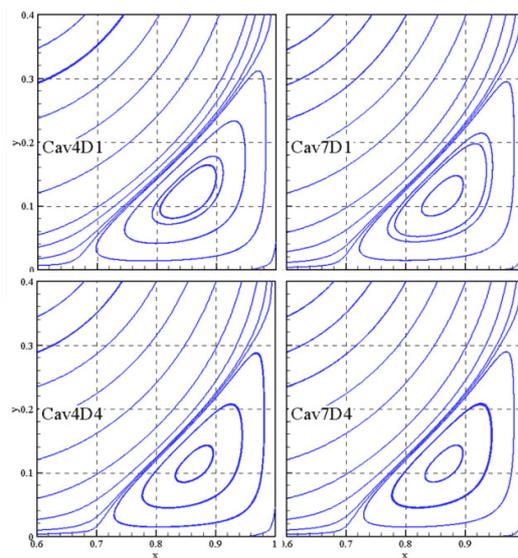


Figura 9: Distribuição das linhas de corrente nas proximidades do vórtice secundário direito na malha de  $128 \times 128$  elementos para  $Re = 1000$

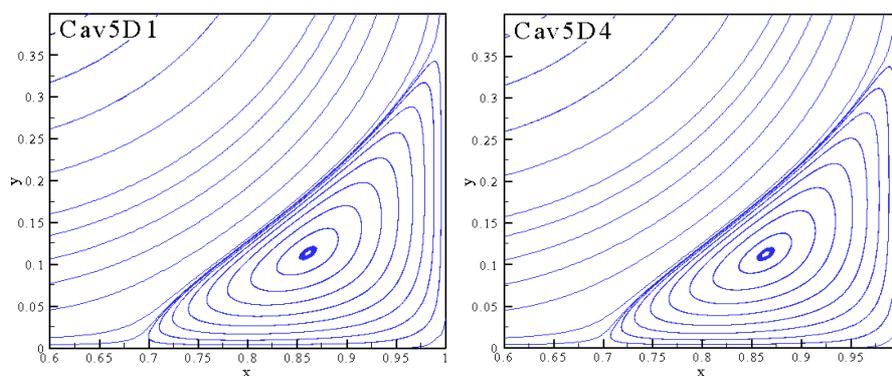


Figura 10: Distribuição das linhas de corrente nas proximidades do vórtice secundário direito na malha de  $256 \times 256$  elementos para  $Re = 1000$

Na Tabela 6, mostram-se as coordenadas do vórtice primário (VP) e dos vórtices secundários (VS) para todos os casos analisados. Também são apresentados os resultados encontrados na literatura. Observa-se que todos os resultados obtidos no presente trabalho mostram uma boa concordância com os resultados apresentados por outros pesquisadores.

Na Figura 11, apresenta-se o perfil da componente de velocidade  $v_1$ , na linha vertical do centro da cavidade,  $x = 0.5$ , e o perfil da componente de velocidade  $v_2$ , na linha horizontal do centro da cavidade,  $y = 0.5$ . Os resultados do presente trabalho mostram uma ótima concordância quando comparados com os resultados obtidos por Ghia et al. (1982).

Ref.	VP	VS inf. esq.	VS inf. dir.
Cav4D1	(0.5320,0.5779)	(0.0795,0.0701)	(0.8536,0.1190)
Cav7D1	(0.5323,0.5687)	(0.0818,0.0744)	(0.8623,0.1139)
Cav4D2	(0.5309,0.5806)	(0.0803,0.0714)	(0.8512,0.1202)
Cav7D2	(0.5310,0.5689)	(0.0824,0.0759)	(0.8615,0.1137)
Cav4D3	(0.5301,0.5834)	(0.0811,0.0724)	(0.8484,0.1215)
Cav7D3	(0.5308,0.5701)	(0.0824,0.0761)	(0.8606,0.1140)
Cav4D4	(0.5328,0.5656)	(0.0824,0.0757)	(0.8650,0.1123)
Cav7D4	(0.5325,0.5667)	(0.0822,0.0756)	(0.8650,0.1125)
Cav5D1	(0.5294,0.5676)	(0.0830,0.0778)	(0.8610,0.1130)
Cav5D4	(0.5310,0.5653)	(0.0831,0.0776)	(0.8642,0.1118)
Ghia et al. (1982)	(0.5250,0.5625)	(0.0875,0.0750)	(0.8625,0.1125)
Gupta e Kalita (2005)	(0.5333,0.5647)	(0.0902,0.0784)	(0.8667,0.1137)
Hou et al. (1995)	(0.5313,0.5625)	(0.0859,0.0781)	(0.8594,0.1094)
Marchi et al. (2009)	(0.5312,0.5654)	---	---

Tabela 6: Posição (x, y) do centro do vórtice primário (VP) e dos vórtices secundários (VS) para  $Re = 1000$ .

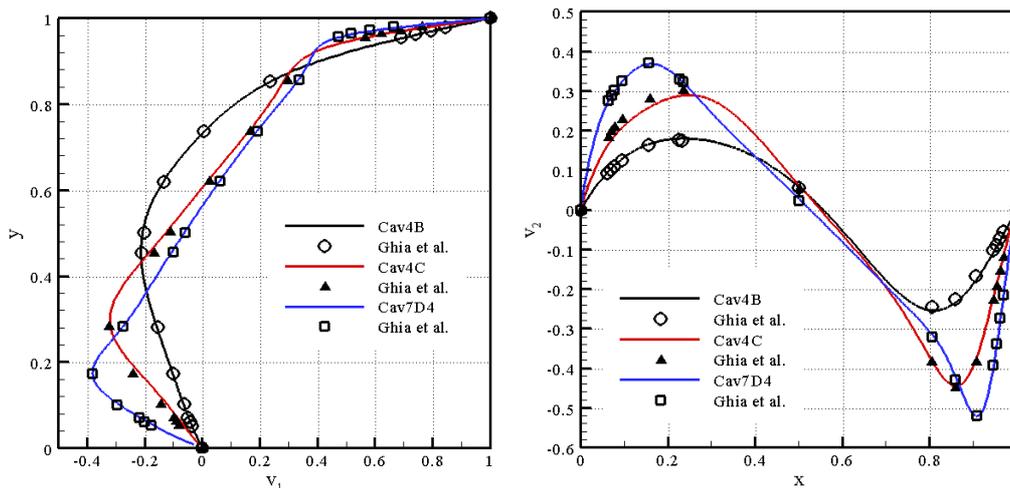


Figura 11: Comparação dos perfis das componentes de velocidade  $v_1$  (em  $x = 0.5$ ) e  $v_2$  (em  $y = 0.5$ ) para  $Re = 100, 400$  e  $1000$

A influência que o modelo de sub-malha (Smagorinsky ou Smagorinsky Dinâmico) e o tipo de malha (Cav4 ou Cav7) têm sobre os perfis das componentes de velocidade são analisados a seguir. Na Figura 12, mostra-se o perfil da componente de velocidade  $v_1$ , na linha vertical do centro da cavidade,  $x = 0.5$ , para os dois modelos sub-malha e os dois tipos de

malha. Pode-se observar que os resultados obtidos empregando a malha não uniforme (Cav7) apresentam os melhores resultados quando comparados com os resultados obtidos por Ghia et al. (1982), independentemente do modelo sub-malha utilizado. Comparando os dois modelos sub-malha pode-se concluir que o modelo sub-malha de Smagorinsky Dinâmico apresenta sempre ótimos resultados independentemente da malha empregada.

O perfil da componente de velocidade  $v_2$ , na linha horizontal do centro da cavidade,  $y = 0.5$ , apresenta-se na Figura 13 para os dois modelos sub-malha e os dois tipos de malha. Neste caso também se chega às mesmas conclusões obtidas para a componente de velocidade  $v_1$ .

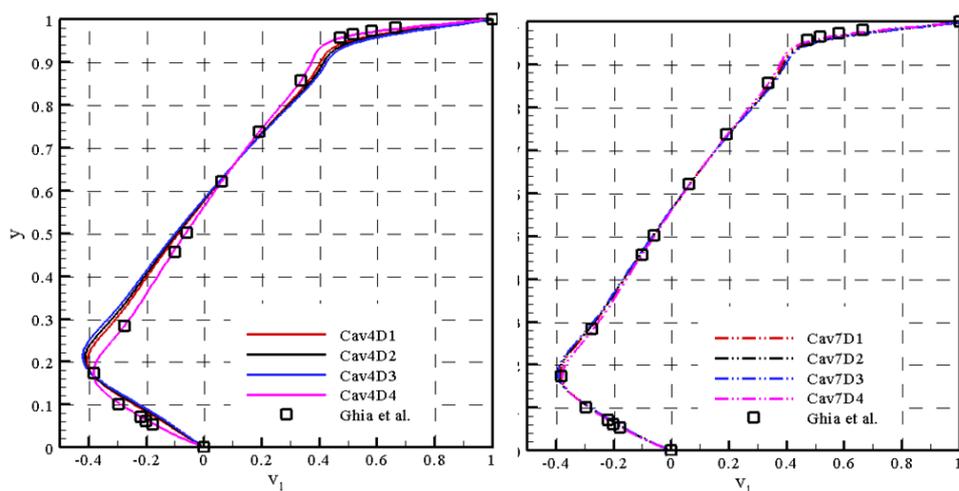


Figura 12: Comparação do perfil da componente de velocidade  $v_1$  em  $x = 0.5$  para  $Re = 1000$

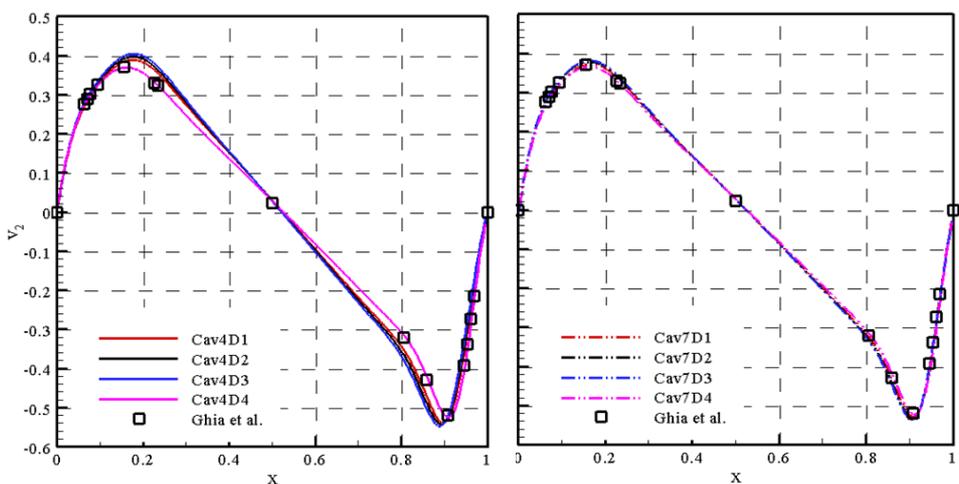


Figura 13: Comparação do perfil da componente de velocidade  $v_2$  para  $y = 0.5$  para  $Re = 1000$

Na Figura 14, mostra-se uma ampliação dos perfis das componentes de velocidade nas regiões dos maiores gradientes para as malhas Cav4 e Cav5. Como já foi observado anteriormente os melhores resultados são obtidos para o caso de modelo sub-malha Dinâmico de Germano/Lilly tanto para a malha de elementos uniformes (Cav4 e Cav5) como para a malha de elementos não uniformes (Cav7), ver Figuras 12 e 13. No caso do modelo sub-malha de Smagorinsky os melhores resultados são obtidos quando se emprega o mínimo valor da constante de Smagorinsky utilizada neste trabalho,  $C_S = 0.15$ .

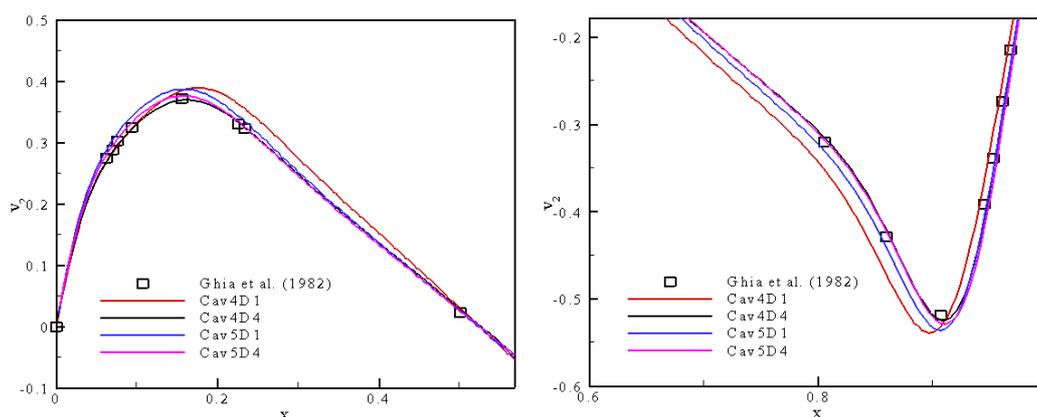


Figura 14: Comparação do perfil da componente de velocidade  $v_2$  nas malhas Cav4 e Cav5 para  $Re = 1000$

## 7 CONCLUSÕES

No presente trabalho, apresentou-se um esquema de Taylor-Galerkin explícito de dois passos para a simulação de escoamentos incompressíveis, com o método de Simulação de Grandes Escalas de turbulência (LES). As equações de Navier-Stokes e uma equação de conservação de massa considerando a hipótese de pseudo-compressibilidade são resolvidas empregando o Método dos Elementos Finitos, usando uma série de Taylor e o clássico método de Bubnov-Galerkin para a discretização do tempo e do espaço, respectivamente. Para a simulação de escoamentos turbulentos, emprega-se a Simulação de Grandes Escalas com os modelos clássico e de Smagorinsky dinâmico para as escalas inferiores à resolução da malha.

Para a discretização do domínio espacial emprega-se o elemento isoparamétrico hexaédrico de oito nós. As matrizes do elemento correspondentes são obtidas analiticamente, empregando integração numérica reduzida.

Para demonstrar a viabilidade do código computacional implementado foram estudados dois clássicos exemplos: escoamento laminar entre duas placas paralelas e o problema da cavidade com uma superfície móvel para diferentes números de Reynolds. Os resultados obtidos sempre mostraram uma ótima concordância quando comparados com os resultados analíticos (caso laminar) e/ou numéricos apresentados na literatura.

As principais conclusões com relação ao esquema, tipo de malha e à metodologia LES podem ser resumidas em:

- o esquema apresenta ordem de precisão ligeiramente superior ao valor teórico para o primeiro exemplo analisado;
- a malha não uniforme com refinamento na região da camada limite sempre apresenta os melhores resultados quando comparados com os resultados obtidos na literatura, independentemente do modelo sub-malha utilizado;
- comparando os dois modelos sub-malha pode-se concluir que o modelo sub-malha de Smagorinsky Dinâmico apresenta sempre ótimos resultados independentemente da malha empregada;
- no caso do modelo sub-malha de Smagorinsky os melhores resultados são obtidos quando se emprega o mínimo valor da constante de Smagorinsky.

A presente pesquisa está em andamento, portanto, trabalhos futuros verificarão a robustez e eficiência da ferramenta computacional implementada para problemas com geometrias complexas tridimensionais. Também se estudará em maiores detalhes como o tipo de malha e os parâmetros da metodologia LES afetam os resultados.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia de Pernambuco (FACEPE) e ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) pelo apoio financeiro recebido durante a realização deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- Bono, G., *Simulação numérica de escoamentos em diferentes regimes utilizando o método dos elementos finitos*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PROMEC, 2008.
- Braun, A.L., *Simulação numérica na engenharia do vento incluindo efeitos de interação fluido-estrutura*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGEC, 2007.
- Braun, A.L., Awruch, A.M., Aerodynamic and aeroelastic analysis of bundled cables by numerical simulation, *Journal of Sound and Vibration*, 45:51-73, 2005.
- Christon, M.A., A domain-decomposition message-passing approach to transient viscous incompressible flow using explicit time integration, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148:329-352, 1997.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., Cabot, W.H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Physics Fluids A* 3, 7:1760-1765, 1991.
- Ghia, U., Ghia, K.N., e Shin, C.T., High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *Journal of Computational Physics*, 48:387-411, 1982.
- Gupta, M.M., e Kalita, J.C., A new paradigm for solving Navier-Stokes equations: streamfunction-velocity formulation, *Journal of Computational Physics*, 207:52-68, 2005.
- Hou, S., Zou, Q., Chen, S., Doolen, G., e Cogley, A., Simulation of cavity flows by the lattice Boltzmann method, *Journal of Computational Physics*, 118:329-347, 1995.
- Kawahara, M., Hirano, H., A finite element method for high Reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3:137-163, 1983.
- Lilly, D.K., A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method, *Physics Fluids A* 4, 3:633-635, 1992.
- Marchi, C.H., Suero, R., e Araki, L.K., The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024x1024 grid, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 31:186-198, 2009.
- Peraire, j., *A finite element for convection dominated flows*, Ph. D. Thesis, Dpto. of Civil Engineering, University College of Swansea, 1986.
- Petry, A.P., Awruch, A.M., Large eddy simulation of three-dimensional turbulent flows by the finite element method, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 28:352-363, 2006.
- Popiolek, T.L., Awruch, A.M., Teixeira, P.R.F., Finite element analysis of laminar and turbulent flows using LES and subgrid-scales models ", *Applied Mathematical Modelling*, 30:177-199, 2006.
- Salas, M.D., Some observations on grids convergence. *Computers & Fluids*, 35:688-692, 2006.
- Smagorinsky, J., General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment, *Monthly Weather Review*, 91:99-164, 1963.