

## EXTRUSIÓN NO ESTRUCTURADA DE MALLAS DE CUADRILÁTEROS

**Pablo J. Novara y Nestor A. Calvo**

*Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, Ciudad Universitaria,  
Santa Fe, Argentina, zaskar\_84@yahoo.com.ar*

*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería - CIMEC (INTEC). Parque  
Tecnológico Litoral Centro, Santa Fe, Argentina.*

**Palabras Clave:** Hexaedros, Mallas 2.5d, refinamiento.

**Resumen.** Se conoce como mallas 2.5 dimensionales a aquellas mallas que se generan aplicando algún mecanismo de extrusión a una malla 2d no estructurada. Este procedimiento es muy común en muchas aplicaciones de ingeniería, en especial cuando se requieren mallas de hexaedros para aprovechar las propiedades del cálculo sobre este tipo de elemento. Uno de los mayores inconvenientes radica en que el tamaño de los elementos sólo puede controlarse libremente en la superficie 2d de base, ya que el espesor de los mismos en la dirección de extrusión se ve restringido por el método de extrusión. En este trabajo se presenta un algoritmo para refinar selectivamente una malla 2.5d de hexaedros y obtener una malla 3d también de solo hexaedros en la cual el tamaño de elemento puede variar en todas las direcciones de acuerdo a un campo de densidad  $h$  definido por los requerimientos del problema. Este método mantiene intacta la superficie 2d de base y su densidad de elementos y produce refinamientos en direcciones paralelas a esta superficie. Esto significa que el espesor de los elementos ya no será necesariamente el mismo en todo el volumen entre dos copias de la malla base 2d. El método puede automatizarse y aplicarse a cualquier malla generada por extrusión y con cualquier campo de densidades  $h$  con poco esfuerzo computacional utilizando una estrategia de sustitución de elementos basada en plantillas de hexaedros.

## 1. INTRODUCCIÓN

Una malla 2.5 dimensional (o semiestructurada) es una malla de hexaedros y/o wedges construida a partir de una malla de superficie, que puede no ser estructurada y presentar tamaños de elementos variables, utilizando cualquier método de extrusión convencional. En este trabajo se analizarán solamente mallas de hexaedros. Esto quiere decir que esta malla habrá sido construida a partir de colocar múltiples copias de una misma malla de cuadriláteros a lo largo de una curva (eje de extrusión), resultando una malla de hexaedros estructurada en una dirección, normalmente perpendicular a la superficie de base. Se denominará  $Z$  a esta dirección, aún cuando pueda no coincidir con el eje  $Z$ , o ser una curva, y malla máster a la malla de superficie original. El espesor de los elementos en la dirección de  $Z$  está determinado por el paso de extrusión (distancia entre dos copias consecutivas de la malla máster) y eventualmente también por la curvatura del eje de extrusión. Esto implica que si el eje es recto todos los elementos de una capa (entre dos copias de la malla máster) tendrán el mismo espesor. Si el eje es curvo los elementos ubicados en el lado interior de la curva necesariamente tendrán un espesor menor que los elementos ubicados del lado exterior de la misma, siendo imposible modificar la diferencia sin alterar la curva.

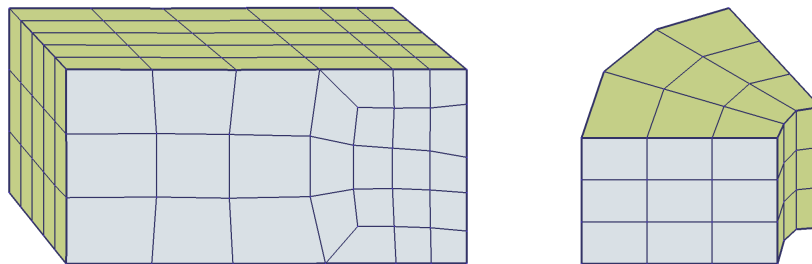


Figura 1: Problemas de la extrusión convencional: anisotropía no deseada

Este tipo de mallas es muy utilizado por su fácil y rápida generación, o por la naturaleza esencialmente 2.5d de muchos problemas de simulación en ingeniería. Sin embargo, las restricciones antes mencionadas en los espesores en  $Z$  de sus elementos obligan a sacrificar precisión en algunos casos o tiempo de cálculo y consumo de memoria en otros, ya que para obtener un refinamiento en  $Z$  en las zonas de mayor interés se debe reducir el paso de extrusión, lo cual implica un refinamiento idéntico en toda la malla. Para resolver este problema se debe utilizar indefectiblemente una malla 3d. En este trabajo se propone y analiza un algoritmo de refinamiento en  $Z$  para transformar una malla 2.5d en una malla 3d, manteniendo la estructura de la malla máster intacta, que permite controlar la propagación de dichos refinamientos. El algoritmo se basa en la utilización de plantillas multi-bloque y operaciones de edición local, por lo cual es de esperar que su implementación sea sencilla y eficiente, de modo que el proceso de generación de una malla 3d combinando técnicas de extrusión convencional con este método de refinamiento resulte comparativamente mucho menos costoso (en tiempo de CPU y consumo de memoria) que un proceso de generación de mallas de hexaedros no estructuradas más general. A diferencia de otros mecanismos propuestos en trabajos anteriores (Novara, 2009), este procedimiento no impone restricción alguna sobre las mallas de superficie a utilizar para la extrusión, razón por la cual puede aplicarse directamente sobre la malla 2.5d.

## 2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL MÉTODO

La figura 2 muestra el esquema general del proceso. El refinamiento toma como entrada una malla 2.5d gruesa en la dirección Z, y un campo escalar que indica el espesor final de elemento deseado ( $h$ ) en cada zona de la misma. La malla máster utilizada para la generación de la malla 2.5d será preservada en el resultado final, por lo que debe presentar desde el comienzo el tamaño de elemento deseado. El paso de extrusión debe ser tal que el mínimo espesor presente en la malla de entrada coincida con el máximo espesor esperado en la malla de salida. Es decir, la malla master debe tener la densidad de elementos adecuada para el problema de cálculo que se pretende resolver, pero el paso de extrusión debe ser suficientemente grande, ya que se corregirá solo por refinamiento (no se aplicarán operaciones de desrefinamiento en ningún paso). Para simplificar la presentación del método, se considerará que el campo de  $h$  es también un campo 2.5d, aunque se verá que esta restricción no es estrictamente necesaria.

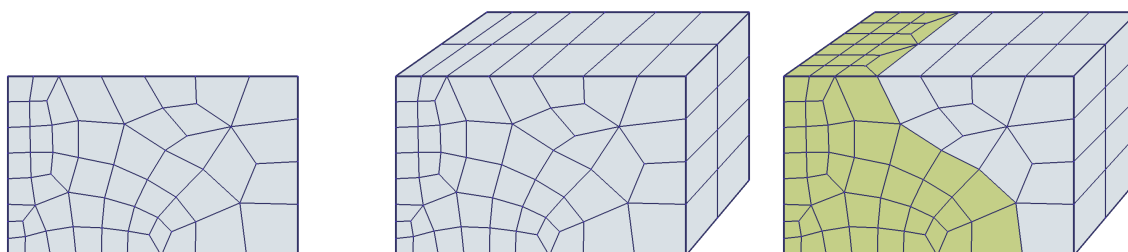


Figura 2: Etapas del proceso: malla máster, extrusión convencional, refinamiento

La malla máster será subdividida en zonas de  $h$  aproximadamente constante (donde se refinará la extrusión solo en Z hasta llegar al  $h$  adecuado), y se reemplazarán tantas capas de elementos en las interfaces entre zonas por capas de transición construidas ad-hoc como sea necesario para preservar una relación de aspecto adecuada en los mismos y garantizar la conformidad de la malla resultante. Una capa de transición es una capa construida a partir de plantillas de elementos predefinidas en combinación con algunas operaciones de edición locales, que guían la dirección del refinamiento en el límite entre dos zonas de  $h$  constante diferente. Esto quiere decir que la ubicación y dirección de estas capas estará determinada por un conjunto de curvas de  $h$  aproximadamente constante según el campo de  $h$  dado.

El análisis dual (Calvo, 2005) permite simplificar el análisis de la estructura interna de una malla de hexaedros, y muestra las dificultades del proceso cuando la malla máster no es una malla estructurada. Se utilizarán superficies duales como la que se muestra en la figura 3 para producir el refinamiento. La estructura de elementos donde la superficie dual se curva en forma de U será la estructura de las plantillas multi-bloque. Al colocar la primera capa de transición, los elementos de la capa original se reemplazan por estas plantillas, y las dos zonas restantes de la malla mantienen su estructura 2.5d, pero reduciendo el paso de extrusión en una de ellas. De esta forma, se genera una zona de refinamiento donde el espesor de los elementos se reduce en  $1/3$ , o  $1/2$ . Se deben resolver entonces dos problemas principales: cómo ubicar las capas de transición y qué operaciones realizar con las plantillas para controlar la dirección de propagación de la superficie dual que produce el refinamiento.

Desde este punto en adelante, se utilizará  $h$  para referirse únicamente a los espesores de los elementos, y no al tamaño en general, ya que el espesor puede ser independiente del tamaño de elemento en la malla máster, y éste último no afecta al procedimiento de refinamiento.

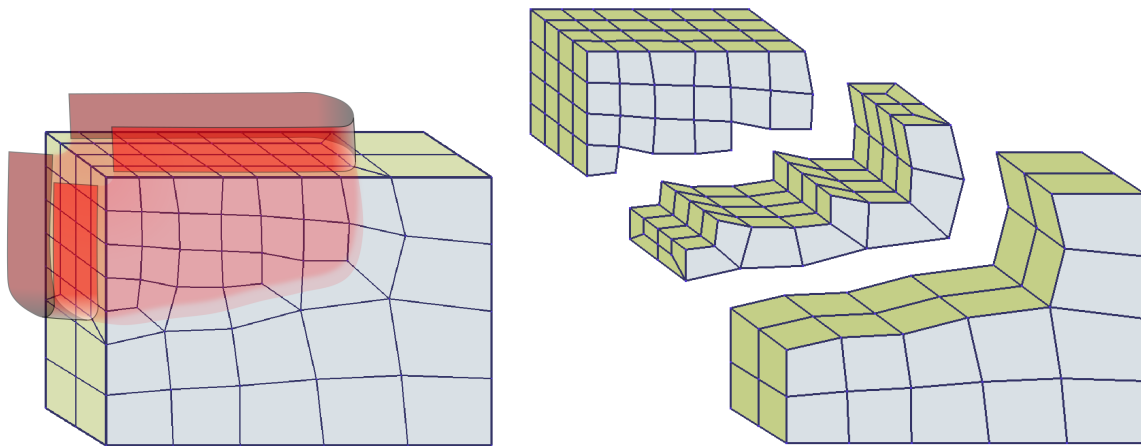


Figura 3: Izquierda: superficie dual introducida para producir el refinamiento. Derecha: detalle de las tres zonas de la malla

El primer problema se resuelve analizando la malla máster. Para generar un nivel de refinamiento, el primer objetivo es identificar una secuencia de cuadriláteros conectados que divida la malla en zonas de  $h$  aproximadamente constante. Para ello se comienza asignando a cada nodo de la malla máster un valor para el espesor deseado en ese punto, y un valor que representa el espesor real que presenta la malla al inicio. Se analiza entonces la relación entre ambos valores para determinar si ésta se encuentra por encima o debajo de un cierto umbral predefinido que depende el tipo de refinamiento utilizado (que en este caso será 3 a 1). Se buscan luego todos los elementos de la malla que simultáneamente contengan nodos de ambos grupos. La figura 5 ejemplifica la selección con una malla máster con dos zonas de  $h$  constante donde se han marcado con los signos + y - los nodos que están por encima y por debajo del umbral respectivamente. Los elementos resaltados son los que deberán conformar la capa de transición.

Sobre estos elementos se deberá propagar la forma en U de la superficie dual. Considerando esta idea se pueden analizar las potenciales configuraciones para determinar el número de casos y diseñar las plantillas y/o operaciones que deban realizarse para cada uno. Como los campos de  $h$  son continuos (se considerará ahora como una interpolación de los valores asociados a los nodos), el perfil en U de la superficie dual puede extenderse desde una arista de frontera de la malla máster hacia otra arista también de frontera, o cerrarse sobre sí misma quedando totalmente contenido en el interior de la malla máster, pero no puede presentar bifurcaciones. Es por esto que se puede construir por cada superficie dual una curva imaginaria que atraviesa un conjunto ordenado de aristas de la malla máster, y que nunca se cruza a sí misma ni a otras curvas correspondientes a otras capas. El perfil en U de la superficie dual deberá seguir la curva. La mayor dificultad se presenta cuando la curva no coincide con una curva del dual de la malla de cuadriláteros. Teniendo esto en cuenta, se pueden distinguir cuatro situaciones posibles para un elemento de la malla máster:

1. dos vértices vecinos son positivos: este será el caso más fácil de resolver, ya que la curva dual coincide con la curva de la capa de transición. Es decir que la misma ingresa al elemento por una arista determinada y sale por la arista opuesta.
2. un solo vértice es positivo: en este caso la curva entra y sale del elemento por aristas que comparten un nodo. Las dos aristas restantes del elemento se conectan a zonas negativas de la malla, mientras que ninguna se conecta a zonas positivas.

3. un solo vértice es negativo: la curva ingresa y egresa por aristas que comparten un nodo de forma similar al caso anterior, pero en este caso las dos aristas restantes se conectan a zonas positivas de la malla mientras que ninguna arista se conecta a zonas negativas de la misma.
4. dos vértices opuestos son negativos: en este caso todas las aristas tiene un vértice positivo y un vértice negativo, por lo que todas ellas serán atravesadas por la curva. Analizando solamente lo que ocurre en el elemento se observa que lo atraviesan dos tramos de curva (que pueden corresponder o no a la misma capa de refinamiento). Pueden presentarse dos configuraciones: a) ambos tramos ingresan por una arista y egresan por otra conectada a la primera, de forma que no se cruzan en el interior, b) las curvas se cruzan en el interior. Estos casos obligan a generar plantillas más elaboradas y con mayor número de elementos, lo cual en general no es deseable. Un a forma fácil de evitar este problema consiste en invertir el signo de uno de los nodos del elemento (ver figura 4). De esta forma, el elemento pasa a tratarse como en los casos 3 o 4, conteniendo sólo un tramo de curva en su interior, y desplazando el tramo restante a un elemento vecino. En general, si la malla máster no es excesivamente gruesa esto no genera mayores inconvenientes. Al cambiar un signo + por un signo - se está refinando un elemento más, mientras en el caso contrario se podría estar refinando un elemento menos.

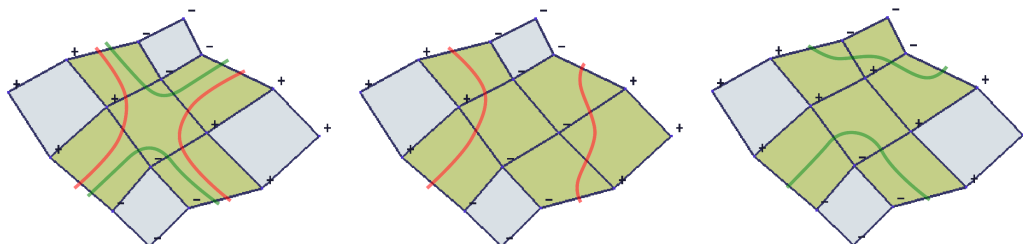


Figura 4: Dos posibles soluciones para transformar el caso nro. 4 (izquierda) en en el caso 2 (centro) o en el caso 3 (derecha)

La figura 5 muestra una malla máster y su dual. Sobre cada elemento de la capa de transición se indica el número de caso según la clasificación presentada. Se observa que los casos 2 y 3 ocurren en los elementos en los que la curva que atraviesa las aristas donde cambian los signos (marcada en rojo) no coincide con la curva dual de la superficie.

### 3. PLANTILLAS MULTI-BLOQUE Y OPERACIONES LOCALES

Para completar el algoritmo descrito en la sección anterior, se presentarán aquí las plantillas seleccionadas y las operaciones de edición local necesarias para cada uno de los tres primeros casos presentados. Como se señaló al comienzo, estas plantillas deberán presentar el perfil dual en U en dos de sus caras, y una estructura regular en las restantes, evitando dividir las caras anterior y posterior, ya que serán las que reemplazarán al cuadrilátero original de la malla máster.

El caso 1 es el más simple. El bloque para resolverlo consiste simplemente en la extrusión (con un solo paso) del perfil en U de la superficie dual. Hay dos plantillas posibles para esta tarea: 4-2, y 3-1. La elección de una u otra plantilla condiciona el proceso en los dos casos restantes, razón por la cual se seleccionará la segunda opción (bloque 1 a 3). Las figuras 6 y 7 muestran la estructura interna y externa de ambos bloques.

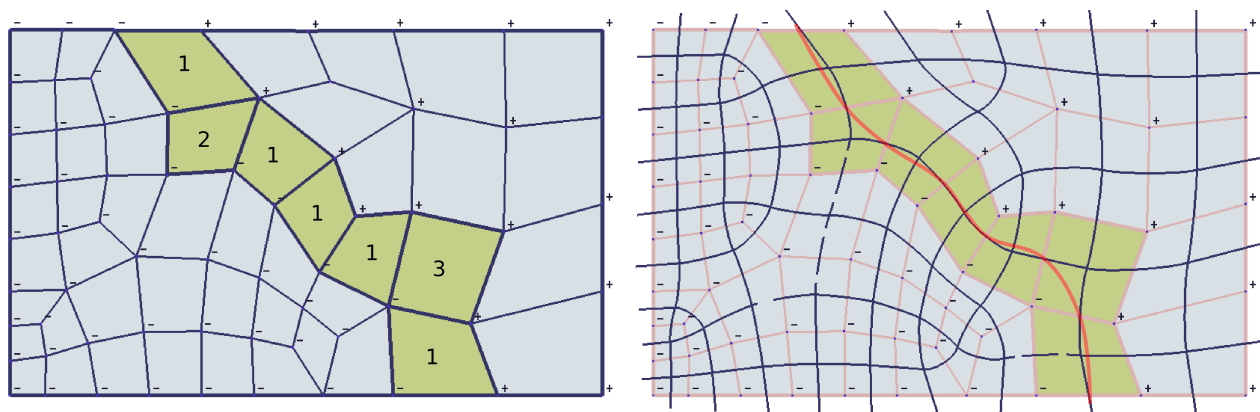


Figura 5: Ejemplo de una malla simple con sus nodos etiquetados según el umbral de la primer capa de transición

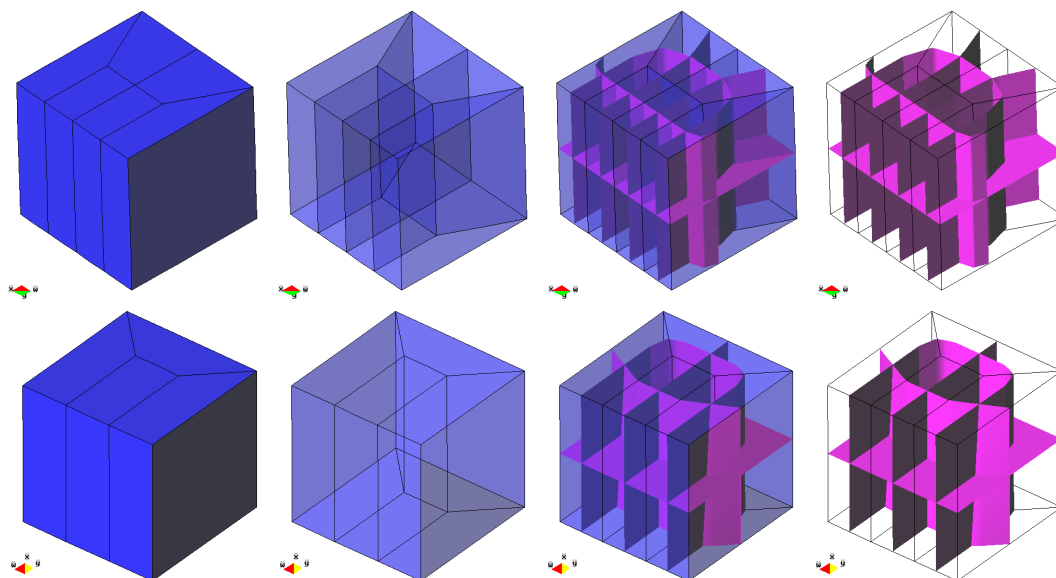


Figura 6: Posibles plantillas multi-bloque para el caso de refinamiento nro 1. Arriba bloque 4-2, abajo bloque 3-1. Frontera en azul, superficies duales en magenta

La figura 8 muestra las fronteras que obligadamente deben presentar las plantillas para los casos 2 y 3 para poder utilizarse según el procedimiento presentado anteriormente. El problema se reduce a mallar estos volúmenes solo con hexaedros respetando dichas fronteras y evitando colocar un número excesivo de elementos. La solución para el caso 2 se presenta en la figura 9.

Sin embargo, para el último caso (3) no se ha podido encontrar una solución adecuada considerando el bloque de manera aislada. La figura 10 muestra las superficies duales de dicho bloque. La dificultad para hallar una solución está asociada a la presencia de dos vértices de valencia 5 en la frontera. La solución alternativa propuesta utilizará un bloque que respeta la estructura conectiva de cada frontera, pero que no permite mantener sobre la superficie los nodos añadidos en el interior de las caras del cubo original que atraviesa el perfil en U, ya que se basa en colapsar los mismos, haciendo que las caras marcadas en rojo en la figura sean en realidad la misma cara. Esto implica fusionar directamente dos caras de los elementos vecinos. De esta forma, el volumen que resta mallar ya no es un cubo, y sí puede ser resultado reemplazándolo di-

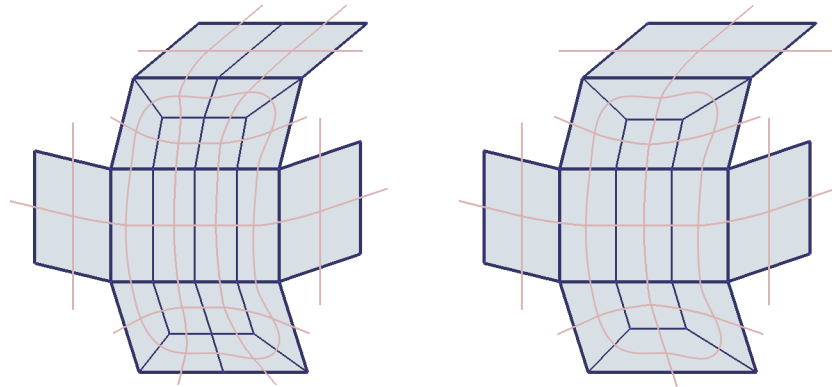


Figura 7: Fronteras desplegadas de los potenciales bloques para el caso nro 1 y sus curvas duales de superficie

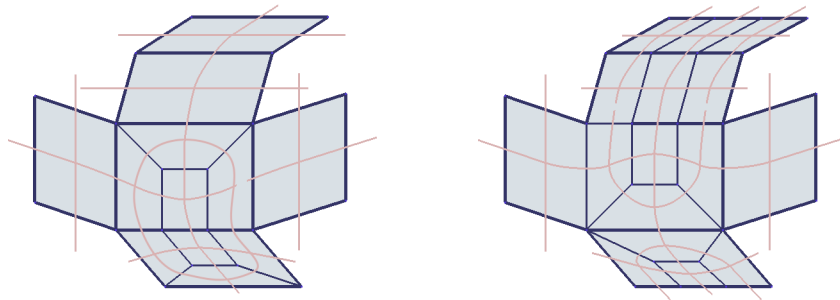


Figura 8: Estructura de la frontera impuesta para los casos 2 y 3

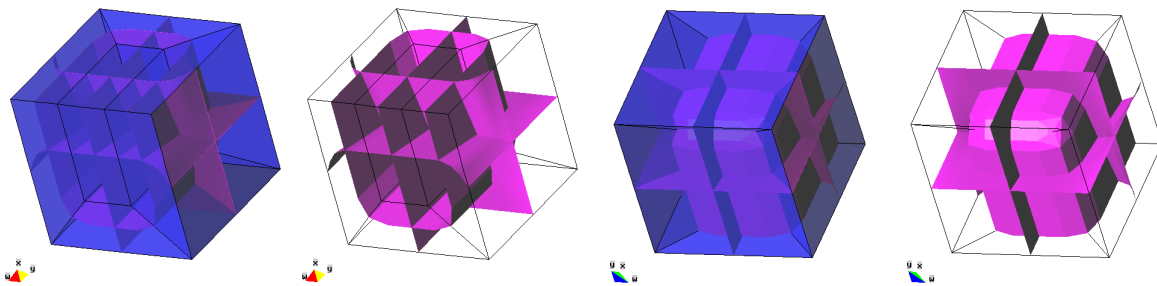


Figura 9: Estructura del bloque diseñado para el caso 2 y sus superficies duales

rectamente por una plantilla con un número suficientemente bajo de elementos. Esta operación puede considerarse una operación adicional de edición local, o analizarse como una plantilla mayor que en realidad abarca 3 elementos originales. Dado que los elementos vecinos pueden contener la estructura de cualquiera de los 3 casos, el enfoque como operación de edición local resulta más simple. La figura 11 ilustra el ensamble de este bloque. El bloque no completa el volumen del cubo original, y la edición consiste en fusionar las caras marcadas en rojo, modificando así los dos bloques adyacentes.

Finalmente, se han presentado las soluciones propuestas para cada caso potencial comple-

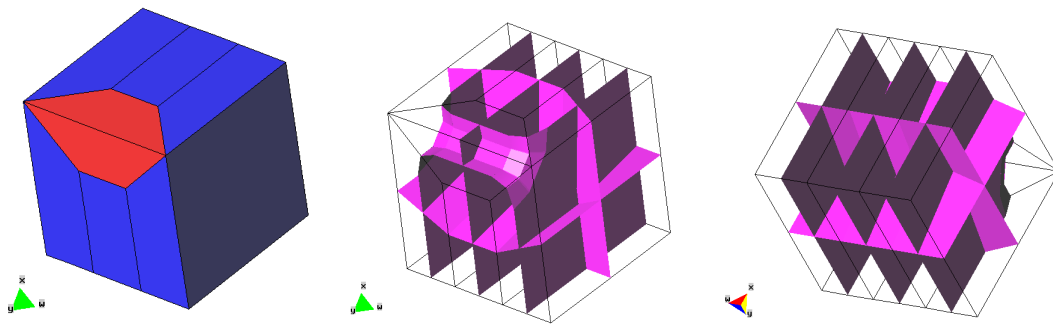


Figura 10: Estructura del bloque diseñado para el caso 2 y sus superficies duales

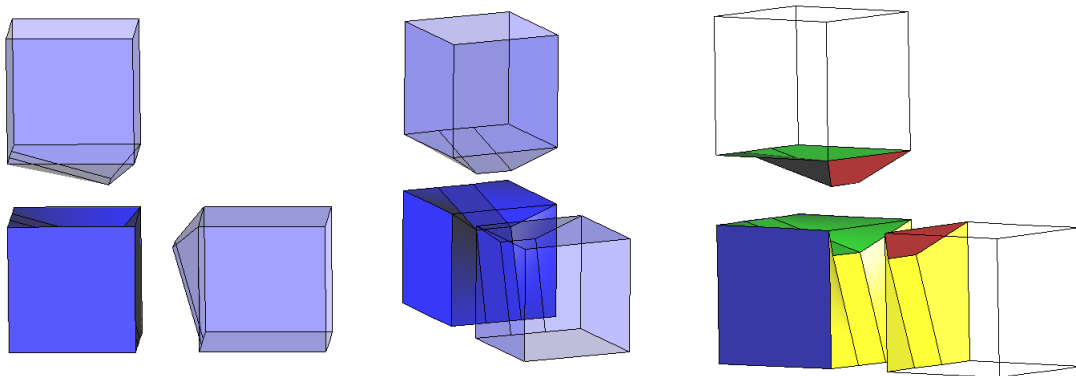


Figura 11: Ensamble del bloque diseñado para el caso 3 modificando además los elementos vecinos

tando así todos los elementos necesarios para aplicar el algoritmo.

#### 4. CONCLUSIONES

Se presentó un método para refinar una malla 2.5d en la dirección en que los algoritmos de extrusión convencionales no pueden hacerlo. Las operaciones de edición que realiza el método pueden simplificarse como operaciones de reemplazo de elementos por plantillas multibloque y una operación adicional de edición local en algunos casos. De esta forma, el análisis y la implementación de dichas operaciones se simplifica considerablemente, por lo que es de esperar que la generación de mallas de hexaedros 3d en geometrías 2.5d combinando este algoritmo con las técnicas de extrusión convencionales (también de fácil y eficiente implementación) pueda realizarse con un esfuerzo computacional comparativamente bajo.

#### REFERENCIAS

- Calvo N. Generación de mallas tridimensionales por métodos duales. Tesis de doctorado, Doctorado en Ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, 2005.
- Novara P. Generación de mallas para análisis de problemas de soldadura por el método de elementos finitos. Tesina de grado, Ingeniería en Informática de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, 2009.