

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ENGENHARIA

Sergio P.B. Proença

*Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, Av.Trabalhador São-carlense 400, 13566-590 São Carlos, Brasil, persival@sc.usp.br,
<http://www.set.eesc.usp.br/docentes/sergio>*

Palavras-chave: Ensino em Engenharia, Método dos Elementos Finitos.

Resumo. Relata-se uma experiência e metodologia adotada de ensino do Método dos Elementos Finitos (MEF), inserido na ementa das disciplinas relativas ao tema "Mecânica das Estruturas Aeronáuticas" oferecidas para o curso de graduação em Engenharia Aeronáutica da Escola de Engenharia de São Carlos. Os assuntos são apresentados em aulas teóricas e práticas. As disciplinas dispõem de material didático de apoio composto por apostilas, notas de aulas e tutoriais elaborados para as aulas práticas com computador. Em "Mecânica das Estruturas Aeronáuticas I" o tema é apresentado fundamentando-se no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) como formulação fraca para problemas estruturais, limitados, nesta disciplina, às estruturas planas de barras sob força normal e flexão em regime de comportamento linear. A técnica dos elementos finitos é então introduzida com o objetivo de geração de soluções aproximadas. Análises estáticas de treliças e pórticos planos constituem os exemplos de aplicação desenvolvidos. Discutem-se aspectos de discretização e qualidade da aproximação. As aulas práticas realizam-se com o programa ANSYS[®], sendo sua versão educacional explorada para a análise dos mesmos exemplos desenvolvidos anteriormente e variações sobre eles. Na disciplina "Mecânica das Estruturas Aeronáuticas II" a mesma metodologia é estendida para a análise linear de sólidos bidimensionais e placas. Para os sólidos bidimensionais apresentam-se as aproximações atreladas aos elementos triangulares lineares e quadrilaterais bilineares. Com o apoio do programa ANSYS[®], aulas de experimentação numérica são realizadas discutindo-se aspectos relativos à qualidade dos resultados obtidos como: continuidade das soluções e convergência dos resultados. A disciplina "Complementos de Estruturas Aeronáuticas" é optativa e aborda formulações baseadas no PTV e aplicação do MEF para problemas de análise não-linear física, geométrica e de contato. Desenvolvem-se diversas simulações numéricas ainda com o apoio do programa ANSYS[®]. Os alunos matriculados nas disciplinas mencionadas têm demonstrado uma resposta muito positiva em termos de aprendizado na medida em que verificam que todos os aspectos conceituais apresentados em sala de aula são efetivamente empregados nas simulações. Além disso, os alunos desenvolvem trabalhos, complementares para a avaliação das disciplinas, que contemplam análises de estruturas aeronáuticas de interesse por eles mesmos propostas.

1 INTRODUÇÃO

A simulação teórica do comportamento dos sólidos e das estruturas tem por base a formulação de modelos matemáticos e sua resolução em forma analítica ou numérica. Os pilares mestres para a construção dessa modelagem são a Mecânica do Contínuo (Spencer, 1980) e os Métodos Numéricos (Zienkiewicz e Morgan, 1983).

A Mecânica do Contínuo fornece os princípios gerais para a formulação de modelos teóricos capazes de representar com maior ou menor rigor o comportamento físico real, sempre se admitindo a hipótese fundamental de continuidade do meio material. Os métodos numéricos, por sua vez, decorrem do desenvolvimento de estratégias consistentes e eficientes de busca de solução suficientemente aproximada dos modelos matemáticos formulados.

Nesse sentido, disciplinas relacionadas aos dois grandes temas mencionados possuem destacada importância para a formação conceitual de engenheiros.

Neste texto, relata-se a experiência de ensino do Método dos Elementos Finitos (MEF), inserido nas ementas das disciplinas intituladas "Mecânica das Estruturas Aeronáuticas", oferecidas para o curso de graduação em Engenharia Aeronáutica da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

As disciplinas possuem módulos semestrais, I e II, de caráter obrigatório, e um módulo eletivo denominado "Complementos de Mecânica das Estruturas Aeronáuticas".

Nas disciplinas obrigatórias, fundamentalmente a técnica dos elementos finitos é introduzida com o objetivo de geração de soluções aproximadas para os problemas de Mecânica das Estruturas formulados pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Nas aulas práticas, com o auxílio do programa ANSYS[®] em sua versão educacional, desenvolvem-se análises estáticas de estruturas de barras, sólidos bidimensionais e placas. Nesses exemplos de aplicação, discutem-se, em cada caso, aspectos de discretização e qualidade da aproximação.

A disciplina eletiva trata da aplicação do Método dos Elementos Finitos aos problemas não-lineares, com destaque para as estratégias de solução passo-a-passo.

Em todas as disciplinas os alunos são estimulados a desenvolver análises complementares aos exemplos estudados nas aulas práticas. Quase sempre os alunos elaboram análises de estruturas aeronáuticas de interesse, tratando de aspectos adicionais aos vistos em sala de aula, particularmente quanto à representação dos resultados.

O conteúdo deste artigo reúne, inicialmente, um breve resumo dos aspectos conceituais abordados nas disciplinas. Na sequência descrevem-se aspectos metodológicos gerais de ensino adotados. Finalmente, comentam-se as respostas obtidas por parte dos alunos e apresentam-se as conclusões finais.

2 CONCEITUAÇÃO GERAL DOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS ABORDADOS

Na Mecânica dos Sólidos problemas de interesse para a engenharia estrutural, que consistem na avaliação do comportamento das estruturas e sua interação com o meio externo, são modelados matematicamente com o auxílio de leis da física. Essas leis impõem restrições sobre o conjunto de variáveis de interesse, e, em termos gerais, o modelo matemático se exprime mediante equações diferenciais ou integrais.

Em linhas gerais, a modelagem teórica deve partir de uma abordagem conceitual preliminar com o objetivo de caracterizar o tipo de análise que será mais representativa do problema em questão: estática ou dinâmica, linear ou não-linear, por exemplo. Segue-se, então, a etapa de formulação propriamente dita, consistindo da representação matemática do problema, incluindo-se aí a sua geometria. Nessa etapa normalmente se adotam condicionantes sobre a regularidade das funções que relacionam as variáveis envolvidas, e

que quase sempre levam a uma idealização, mais ou menos simplificada, dos fenômenos estudados.

Uma hipótese fundamental na passagem para o modelo matemático é a continuidade do meio. Nessa idealização não existem vazios e pontos do meio, ditos pontos materiais, podem ser individualizados por um conjunto de coordenadas. Além disso, como o meio inicialmente contínuo deve permanecer contínuo depois de aplicado o carregamento externo, no modelo matemático pode-se admitir que as funções que descrevem os campos incógnitos sejam também contínuas e tenham regularidade estendida às suas ordens de derivadas.

Dispondo de um modelo matemático, descrever o comportamento de uma estrutura ou de um sólido significa determinar, em qualquer um de seus pontos, os campos de deslocamentos, tensões e deformações, para uma dada condição de carregamento externo e vinculação no contorno. Portanto, as variáveis envolvidas no modelo matemático são, justamente, as componentes de deslocamentos, tensões e deformações. O conjunto de incógnitas deve, então, verificar as restrições de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva, representadas diretamente no modelo matemático.

2.1 Sobre o conjunto de restrições que constitui o modelo matemático

Na formulação das restrições mencionadas normalmente se adotam hipóteses simplificadoras, mas que permitam uma representação suficientemente aproximada do comportamento estrutural real. Uma dessas simplificações consiste, por exemplo, em admitir que os campos de deslocamentos e suas variações ponto a ponto sejam muito pequenos em relação às dimensões características do sólido ou estrutura. Tal hipótese tem validade num amplo espectro de problemas, no entanto ela não constitui condição necessária para a modelagem, simplesmente conduzindo a uma simplificação do modelo matemático.

Ainda com relação ao conjunto de restrições, podem-se conceituar cada uma delas de forma bastante sucinta. A condição de equilíbrio pressupõe que uma parte qualquer do corpo deve estar submetida a um conjunto equilibrado de forças (de resultante nula), e se isso valer para todas as suas partes então todo o corpo estará em equilíbrio. Essa condição impõe diretamente uma restrição sobre a distribuição e variação das tensões internas de ponto a ponto do corpo. A condição de compatibilidade implica em que o campo de deslocamentos, obedecendo às restrições impostas pelos vínculos de contorno, deve ter variação suficientemente regular de ponto a ponto, no sentido de preservar a hipótese de continuidade também no corpo deformado. Nessas condições as deformações que decorrem das variações relativas dos campos regulares de deslocamentos são ditas compatíveis. Finalmente, a condição constitutiva diz respeito à resposta do material e estabelece que ao regime de deformações, deve corresponder um regime de tensões internas cuja intensidade depende das propriedades mecânicas (de rigidez) do material.

2.2 Sobre a resolução do modelo matemático

Uma vez estabelecido o modelo matemático, a principal questão que se põe é relativa à sua resolução. Na maior parte dos problemas a possibilidade de encontrar a solução matemática exata por métodos analíticos é bastante restrita. Os métodos numéricos constituem-se, então, em alternativas a serem exploradas, podendo fornecer aproximações suficientemente precisas para a solução.

Tendo-se em vista exclusivamente a aplicação de métodos numéricos, pode-se partir de duas formas distintas de representação do modelo matemático. Na primeira, dita forte ou local, considera-se diretamente a equação ou o conjunto de equações diferenciais originais representativas do conjunto de restrições do problema. Na segunda, considera-se uma

representação dita variacional, expressa mediante integração ponderada sobre a equação ou conjunto de equações diferenciais do problema. Nesse caso, a forma mais usual é combinar previamente as equações de modo a reduzi-las a uma única relação função de um único campo incógnito, normalmente o campo de deslocamentos. Tem-se, assim, a formulação dita em deslocamentos. Essa representação variacional se caracteriza, ainda, pela integração por partes da integral ponderada e que proporciona a forma variacional fraca.

Há, contudo, maneiras de gerar diretamente a forma fraca que dispensam o conhecimento prévio da equação ou equações diferenciais do problema. Uma maneira decorre do emprego dos chamados Princípios Variacionais. Um Princípio Variacional está fundamentado em conceitos de energia e pode ser estabelecido de modo ‘natural’ ou de modo ‘restrito’. Aqueles estabelecidos em modo natural abrangem um número menor de casos e não podem ser aplicados para qualquer problema, já os outros podem, mas inserem novas incógnitas, a depender do tipo de restrição apresentada pelo problema, como os multiplicadores de Lagrange, ou novos parâmetros como os fatores de penalização. À parte os Princípios Variacionais, há ainda outra maneira de caráter geral para se obter a forma variacional fraca: o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Independente de como tenha sido deduzida a forma variacional fraca, preserva-se uma hipótese básica a respeito de uma solução aproximativa: ela pode ser escrita em dimensão finita como uma combinação linear de uma base de funções com boa capacidade de representação. A chamada Técnica dos Elementos Finitos pode, então, ser empregada como procedimento geral para a geração sistemática das funções aproximativas.

3 UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Os aspectos conceituais comentados norteiam as ementas de duas disciplinas obrigatórias e uma eletiva sobre Mecânica das Estruturas Aeronáuticas oferecidas ao curso de graduação em Engenharia Aeronáutica da Escola de Engenharia de São Carlos. Cada uma delas possui duração semestral, adotando-se uma metodologia comum de apresentação dos assuntos em duas partes: modelos teóricos simplificados e obtenção de soluções aproximadas.

Nas disciplinas obrigatórias os modelos teóricos são baseados nos chamados teoremas de energia, com destaque para os teoremas de Castigliano e o princípio das forças virtuais. Tais modelos são ditos simplificados porque se baseiam em hipóteses simplificadoras do comportamento dos materiais (resposta elástico-linear) e dos elementos estruturais (pequenos deslocamentos e deformações).

O Princípio dos Trabalhos Virtuais vem apresentado numa sequência natural e a obtenção de soluções aproximadas é então induzida e fortemente associada ao Método dos Elementos Finitos. Deste ponto em diante as características essenciais deste método são enfatizadas.

As aulas práticas envolvem tanto exercícios sobre aplicação dos métodos simplificados quanto exemplos numéricos para a geração de soluções aproximadas desenvolvidos com auxílio de computador. Em muitos casos simulam-se numericamente os mesmos exemplos resolvidos mediante os métodos simplificados, destacando-se, então, desse confronto, as características de cada uma das abordagens.

Todas as disciplinas possuem material didático de apoio na forma de apostilas (Proença, 2009) e notas de aula disponibilizadas no sistema on-line de disciplinas do Departamento de Engenharia de Estruturas (<http://www.set.eesc.usp.br/disciplinas/>)

3.1 As disciplinas obrigatórias de Mecânica das Estruturas Aeronáutica I e II

As disciplinas seguem a metodologia descrita iniciando com os problemas de menor grau de complexidade e passando aos de maior grau de complexidade. Assim, em Mecânica das

Estruturas Aeronáuticas I tratam-se das estruturas de barras, e em Mecânica das Estruturas Aeronáuticas II apresentam-se os modelos para sólidos planos e placas.

Mais especificamente, na primeira disciplina discutem-se alguns modelos simplificados que permitem a obtenção de soluções analíticas para problemas de menor grau de complexidade envolvendo estruturas de barras. Como já comentado anteriormente, os teoremas de Castigliano e o Princípio dos Trabalhos Virtuais compõem a base fundamental de tais modelos. Nos exemplos de aplicação incluem-se as treliças planas e tridimensionais, as barras em flexão e os pórticos planos.

Na sequência, apresenta-se a forma fraca dos problemas de valor de contorno, destacando-se sua obtenção seja pelo Princípio da Mínima Energia Potencial quanto pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Ênfase especial passa então a ser dada aos métodos numéricos de obtenção de soluções aproximativas. Em particular, explora-se a geração da aproximação para a solução pela técnica dos Elementos Finitos. Discutem-se, então, os elementos de barras simples e gerais (em flexão) e os diferentes graus de continuidade que proporcionam para a aproximação global. As aplicações numéricas desenvolvidas em classe procuram evidenciar os conceitos de matriz de rigidez e vetor de forças nodais equivalentes, bem como da montagem do sistema de equações resolvente.

Na disciplina de Mecânica das Estruturas Aeronáuticas II, tratam-se de arranjos estruturais mais complexos que compõem partes das aeronaves, como asas e fuselagens. Nesse caso passam a ser apresentados os modelos simplificados para análises de painéis reforçados e placas. Nos painéis reforçados desenvolvem-se particularmente análises de equilíbrio e análises de estabilidade. Quanto às placas, apresenta-se a teoria clássica de placas finas e as soluções para placas circulares sob carregamento com simetria axial e retangulares simplesmente apoiadas no contorno. No que diz respeito à aplicação do método dos elementos finitos, detalha-se a geração de aproximações atreladas a elementos planos triangulares lineares e quadrilaterais bilineares. Para as placas apresenta-se uma breve conceituação daqueles elementos, considerando-se as aproximações e graus de liberdade envolvidos. As simulações numéricas com auxílio de computador procuram reproduzir os resultados dos casos resolvidos analiticamente nas aulas práticas e também explorar os recursos do método para situações mais complexas.

3.2 A disciplina de Complementos de Mecânica das Estruturas Aeronáuticas

A disciplina tem caráter eletivo, isto é, não é obrigatória e trata da modelagem do comportamento não-linear dos sólidos e estruturas. Para esse comportamento contribuem os efeitos da resposta do material, das mudanças de geometria (proporcionadas por deslocamentos lineares ou angulares, ou de forma mais geral, grandes deformações) e das condições de contorno em força e/ou deslocamento.

Para além dos aspectos de formulação dos modelos matemáticos, abordam-se, com algum nível de detalhe, técnicas numéricas de resolução dos problemas não-lineares de valor de contorno expressos em forma fraca. Nesse particular, destacam-se os procedimentos incrementais e iterativos baseados no Método de Newton, bem como sua associação ao Método dos Elementos Finitos.

No que se refere à não-linearidade física, por uma questão de limitação do conteúdo, apresentam-se com maior destaque as teorias constitutivas que se aplicam aos materiais dúcteis, como a elasto (visco)plasticidade em regime de pequenas deformações.

A não-linearidade geométrica é apresentada explorando-se a descrição geral da condição de equilíbrio na posição deslocada proporcionada pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Conceituam-se, em particular, as chamadas descrições lagrangiana total e atualizada do

equilíbrio na posição deslocada. Em relação às aplicações, todas se limitam às estruturas de barras.

A não-linearidade de contato é apresentada em forma resumida para os problemas de contato sem atrito, dando-se destaque à caracterização conceitual das condições de impenetrabilidade e de consistência. Segue uma breve descrição das estratégias de verificação daquelas condições, construídas com o recurso aos multiplicadores de Lagrange ou aos procedimentos de penalização inseridos na formulação em forma fraca do problema.

As aulas práticas com auxílio de computador prevêem a realização sequencial de uma série de simulações que incluem análises estáticas e dinâmicas envolvendo cada uma das não-linearidades destacadamente ou sua eventual combinação.

4 RESPOSTAS DOS ESTUDANTES

4.1 Nas disciplinas obrigatórias

Os alunos matriculados nas disciplinas mencionadas têm demonstrado uma resposta muito positiva em termos de frequência nas aulas e aprendizado. Cabe observar que as turmas das disciplinas obrigatórias possuem em média 45 alunos matriculados.

Os aspectos conceituais são apresentados limitando-se o nível de aprofundamento e rigorismo matemático de forma julgada compatível com a formação de graduação, levando-se em conta, ainda, o tempo disponível para o desenvolvimento dos cursos (em média os semestres letivos compreendem quinze semanas com quatro horas de aula por semana).

Por outro lado, é importante observar que os alunos de engenharia aeronáutica passam por um rigoroso processo de seleção para o ingresso no curso e estão entre aqueles de melhor nível, considerando-se todos os cursos da Universidade de São Paulo. Nesse sentido, os alunos possuem ótima compreensão dos aspectos conceituais, ao mesmo tempo em que exigem do professor alguma habilidade para prender sua atenção particularmente nos assuntos de menor complexidade. Da mesma forma as aulas práticas, principalmente aquelas com auxílio de computador, precisam ser conduzidas segundo um roteiro bem definido previamente, caso contrário alguns alunos tendem a se distrair, por exemplo, ativando e testando recursos do programa com utilização não prevista.

Apesar de não ser exigido qualquer trabalho específico de programação em computador do método dos elementos finitos, o que em princípio seria um importante recurso para a fixação dos conceitos apresentados nas aulas teóricas, a alternativa do uso de um software pronto tem-se mostrado um complemento eficaz nesse sentido.

Alguns dos exemplos analisados possuem um tutorial básico a partir do qual são sugeridas variações para a sequência de exemplos desenvolvidos em sala, individualmente ou em equipe, neste caso com número limitado de participantes.

A Figura 1 ilustra um trecho de tutorial relativo à definição de geometria de exemplo específico para o ANSYS® na sua versão educacional.

3. Visualização e listagem das forças e tensões normais em cada barra

Main Menu: General Postproc – Element Table – Define Table – by sequence Num
 Obs: Estudar o elemento Link 1 (help do Ansys) e observar as possibilidades de saída, através das tabelas, que este elemento oferece.

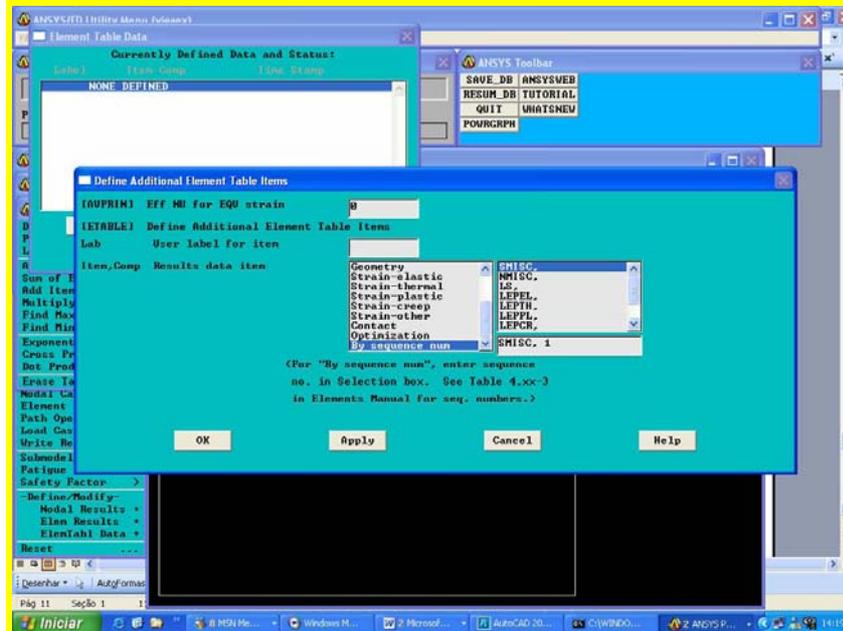


Figura 12 – Visualização e listagem das forças e tensões nas barras.

Figure 1: Trecho de tutorial

É importante observar que nas avaliações realizadas mediante provas escritas são restritas exclusivamente aos aspectos conceituais, não sendo cobrado qualquer detalhe mais específico relativo ao software utilizado nas aulas práticas.

4.2 Na disciplina optativa

A disciplina de Complementos de Mecânica de Estruturas Aeronáuticas pelo seu caráter eletivo atrai, naturalmente, um número menor de participantes (as turmas possuem em média quinze alunos), porém com elevado grau de interesse.

Trata-se de disciplina de formação complementar e a metodologia seguida consiste em dividir igualmente os horários previstos entre aulas teóricas e práticas. Como resultado, o uso do programa ANSYS® como instrumento de apoio às aulas práticas é mais intenso comparativamente às disciplinas obrigatórias. Além disso, como os alunos já possuem um bom domínio sobre a utilização do software é possível explorar recursos complementares particularmente interessantes para as análises não-lineares.

Nas aulas teóricas destacam-se, sobretudo, as estratégias de resolução dos problemas não-lineares divididos entre aqueles de natureza física, geométrica e de contato. Com o objetivo de limitar a abordagem aos aspectos conceituais considerados mais importantes, os modelos teóricos são restritos aos regimes de pequenas deformações. Não obstante, as simulações numéricas incluem análises estáticas e dinâmicas, neste caso procurando destacar os algoritmos explícitos e implícitos de integração no tempo.

Nesta disciplina, em particular, a avaliação é baseada em trabalho de curso, que consiste em reproduzir o mesmo conjunto de simulações propostas nas aulas práticas agora sobre uma

estrutura de avião definida pelos próprios alunos. Os trabalhos podem ser realizados individualmente ou em grupo de dois alunos, sendo apresentados na forma de um relatório final contendo uma descrição dos modelos adotados, comentários e conclusões sobre as simulações conduzidas.

Na Figura 2 ilustram-se alguns exemplos de estruturas aeronáuticas e suas idealizações propostas pelos alunos em seus trabalhos de curso (Mestrinelli e Poblete (2011), Espírito Santo (2011), Carvalho e Hortêncio (2011)).

O trabalho de curso é desenvolvido ao longo de todo o semestre, havendo um acompanhamento progressivo desde a concepção estrutural inicial até a entrega final. Esse acompanhamento é possível uma vez que relatórios parciais são cobrados, avaliados e devolvidos aos alunos com eventuais sugestões.

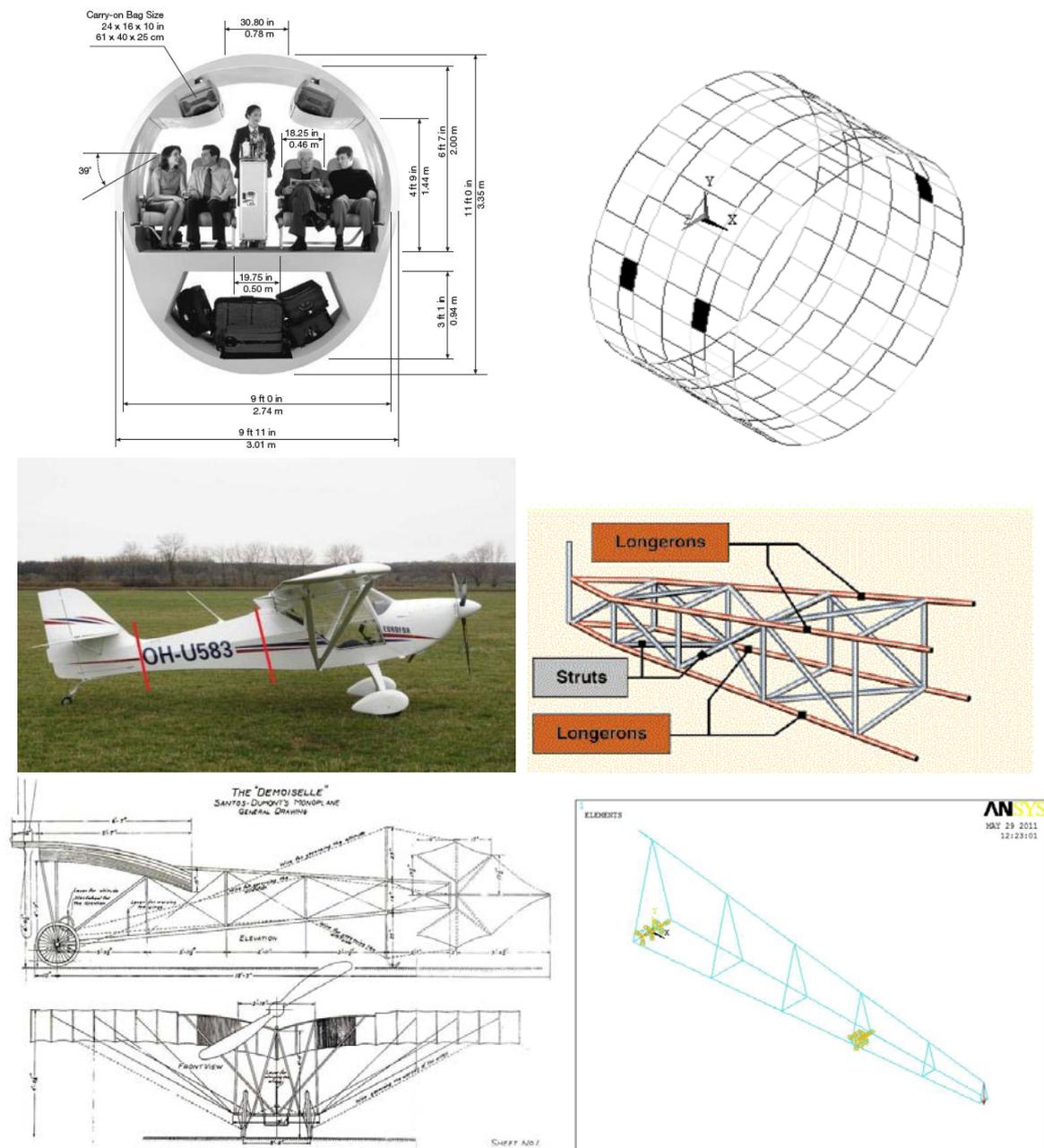


Figure 2: Exemplos de estruturas e idealizações para trabalhos de curso

5 CONCLUSÕES

Há, naturalmente, alguns aspectos menos positivos da metodologia adotada. Em princípio, o fato de ser empregado um programa de análise estrutural, mesmo que seja em sua versão educacional, exigiria algum tempo das aulas práticas dedicado para o treinamento inicial no seu uso. Para reduzir essa exigência, optou-se pela elaboração de tutoriais de alguns exemplos básicos. Por outro lado, as aulas práticas tendem a ganhar a preferência dos alunos em relação às teóricas, o que pode levar a uma menor ênfase nos aspectos conceituais, bem como ao uso menos criterioso do programa e limitação na interpretação dos resultados.

Todavia, tendo-se em vista que as avaliações das disciplinas indicam um rendimento médio dos alunos considerado muito bom, pode-se concluir que a experiência de ensino descrita tem se mostrado efetiva. Além disso, como em algumas aulas chama-se a atenção para a extensão das modelagens numéricas, como sua aplicação na simulação do comportamento de materiais compostos e problemas multi-físicos de interação sólido-fluido, nota-se, claramente, o interesse dos alunos pelo aprofundamento no conhecimento do Método dos Elementos Finitos e suas aplicações, particularmente no âmbito da engenharia aeronáutica.

A resposta positiva fica ainda melhor caracterizada quando se avalia o rendimento na disciplina eletiva, o que é natural uma vez que normalmente são os alunos mais interessados que a cursam. O que se destaca nessa resposta é a qualidade dos trabalhos de curso apresentados, pois os alunos tendem a escolher problemas de interesse real, cuja abordagem certamente contribui para a sua formação profissional.

REFERÊNCIAS

- Carvalho, F.G. de, Hortêncio, M.E.O. *Trabalho de Curso apresentado à disciplina Complementos de Mecânica das Estruturas Aeronáuticas – SET0182*. Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC/USP, 2011, 52 p.
- Espírito Santo, J.S. *Trabalho de Curso apresentado à disciplina Complementos de Mecânica das Estruturas Aeronáuticas – SET0182*. Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC/USP, 2011, 44 p.
- Mestrinelli, M., Pobleto, F.R. *Trabalho de Curso apresentado à disciplina Complementos de Mecânica das Estruturas Aeronáuticas – SET0182*. Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC/USP, 2011, 20 p.
- Proença, S.P.B. *Mecânica das Estruturas Aeronáuticas*, volumes I e II. Serviço Gráfico da Escola de Engenharia de São Carlos, 2009.
- Spencer, A.J.M. *Continuum Mechanics*. Dover Publications, Inc, 1980.
- Zienkiewicz, O.C., and Morgan, K. *Finite Elements and Approximation*. John Wiley & Sons, 1983.