Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXX, págs. 2375-2387 (artículo completo)
Oscar Möller, Javier W. Signorelli, Mario A. Storti (Eds.)
Rosario, Argentina, 1-4 Noviembre 2011

DINÁMICA DE UN OSCILADOR AEROELÁSTICO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

Eduardo Totter, Daniel Ambrosini, Silvia Raichman

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.
etotter@fing.uncu.edu.ar, dambrosini@uncu.edu.ar, sraichman@uncu.edu.ar

Palabras clave: dinámica, oscilador aeroelástico, matemática avanzada.

Resumen. La enseñanza de métodos numéricos en carreras de Ingeniería, brinda la atrayente posibilidad de aplicar los mismos a problemas reales de interés, presentando de esta manera a los alumnos una oportunidad de potenciar el aprendizaje significativo de los temas desarrollados. Sin embargo, esto constituye un desafío importante para los docentes de las asignaturas involucradas, ya que implica el desarrollo e implementación de una propuesta didáctica que utilice estrategias articuladas coherentemente entre sí, con el objeto de incrementar la comprensión de los contenidos específicos involucrados en la misma. Este trabajo describe el diseño de una propuesta orientada a potenciar el aprendizaje significativo de métodos numéricos asociados a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, a los efectos de su implementación en el marco de asignaturas tales como Matemática Avanzada, Cálculo Avanzado o Dinámica Estructural en carreras de Ingeniería. Se describe el estudio dinámico de un oscilador aeroelástico de dos grados de libertad, a partir del análisis y caracterización de todas aquellas variables que influyen en su respuesta, junto con el modelo físico y matemático adoptado para el mismo. Se analiza el problema en vibraciones libres y para el caso de una carga externa de viento. Se describen las ecuaciones matriciales a las que se arriban para los casos de estudio, correspondientes a vibraciones libres no amortiguadas y a vibraciones forzadas, así como también los métodos numéricos que implementarán los estudiantes para la resolución de dichos problemas.

1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la investigación educativa sugiere que los esfuerzos de los equipos docentes a la hora de diseñar una propuesta pedagógica adecuada a determinados objetivos, deben estar orientados en enfatizar el desarrollo de estrategias educativas que tiendan a fomentar el desarrollo del pensamiento complejo y a iniciar un acercamiento de los estudiantes a la investigación y la innovación.

En la enseñanza de carreras de Ingeniería, es posible encontrar una variedad importante de propuestas, llevadas a cabo aún desde los primeros años, que desarrollan en forma parcial o completa todos aquellos criterios que es necesario tener en cuenta para la aplicación de este tipo de innovaciones educativas.

En el campo de la enseñanza de los métodos numéricos en este tipo de carreras, predominaron hasta hace algunos años los enfoques enciclopedistas centrados en el profesor como eje de las propuestas. Este proceso además en muchos casos se circunscribía a la mera transmisión de conocimientos disciplinares y a la práctica aislada de contextos reales y significativos para los mismos.

Los actuales desarrollos tecnológicos y las características propias y específicas del ámbito en el cual se van a desempeñar los futuros profesionales, requieren de la Universidad el replanteo de metodologías de enseñanza estáticas, por modelos pedagógicos dinámicos y actualizados, (Rinaudo, et.al., 1998).

De esta manera, una reformulación de estrategias docentes bajo un enfoque que tome al pensamiento complejo como eje sobre el cual se articulan las actividades, implica delimitar claramente el alcance de los aprendizajes, analizar las situaciones y contextos en los cuales los mismos se desarrollan y trabajar con una serie de acciones y recursos tales como actividades significativas de aprendizaje, el denominado ABP (aprendizaje basado en problemas), estudio de casos, entre otros, (Verdejo y Freixas, 2009).

Es conocido el hecho que los aprendizajes complejos y la comprensión clara de los contenidos estudiados, se potencia cuando se coloca al estudiante en un contexto por el cual el mismo se enfrenta a una situación real, pedagógicamente mediada para su inserción en la propuesta educativa de la que forma parte. Así, la enseñanza de los métodos numéricos, brinda la posibilidad cierta de aplicar en forma articulada y coherente, sobre un problema relevante de interés ingenieril, procedimientos numéricos específicos con el objeto de potenciar el aprendizaje significativo de los estudiantes.

Lo mencionado en párrafos anteriores, constituye un desafío para el equipo docente desde el punto de vista de la elección de los problemas a incluir en la propuesta y de su mediación pedagógica, tanto desde el tratamiento del contenido propiamente dicho, como así también de la articulación de cada una de sus partes con el resto de las actividades y recursos de la asignatura.

En este trabajo se describe el diseño y elaboración de una intervención educativa orientada a potenciar el aprendizaje significativo de métodos numéricos asociados a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales en carreras de Ingeniería. El problema elegido es el análisis dinámico de un oscilador aeroelástico de dos grados de libertad, estudiando el mismo para el caso de oscilaciones libres y cargas externas de viento.

Se describe en forma adicional la articulación de la propuesta y su inserción, prevista para el ciclo lectivo 2011, dentro del marco de la asignatura Matemática Avanzada, correspondiente a la carrera de Ingeniería en Mecatrónica que se dicta en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo.

2 DESCRIPCIÓN DE LA ASIGNATURA

2.1 Generalidades

Matemática Avanzada es una asignatura que se desarrolla en el cuarto semestre de la carrera de Ingeniería en Mecatrónica y forma parte de las asignaturas básicas de dicha especialidad. La misma provee al estudiante los conocimientos y habilidades necesarias para el estudio y comprensión de los conceptos fundamentales que sustentan la formulación matemática de modelos de sistemas dinámicos reales de interés en Ingeniería, brindando a los mismos las herramientas necesarias para su resolución mediante la utilización de métodos analíticos y numéricos apropiados. El dictado de la asignatura se desarrolla bajo una excelente relación docente-alumno, ya que anualmente cursan la misma entre 15 y 20 estudiantes, con un plantel conformado por 3 docentes.

Por su relación con el presente trabajo se citan a continuación algunos de los objetivos generales planteados para el desarrollo de la asignatura:

- Estimular el interés del estudiante por el dominio de los instrumentos analíticos y numéricos propios del ingeniero.
- Conocer las distintas etapas en el proceso de formulación y resolución de modelos de sistemas dinámicos reales.
- Plantear y resolver modelos matemáticos de interés en Ingeniería en Mecatrónica que involucran ecuaciones diferenciales.
- Comparar la potencialidad y limitaciones de los distintos métodos analíticos y numéricos aplicados a la resolución de problemas que involucran ecuaciones diferenciales en su formulación.
- Realizar experimentación numérica mediante el uso de herramientas computacionales adecuadas para estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos lineales.

La asignatura se desarrolla según un modelo pedagógico de estrategias didácticas orientadas a promover el desarrollo del pensamiento complejo, acercando al mismo tiempo a los estudiantes a la investigación científica y a la innovación.

2.2 Estrategias didácticas utilizadas por la asignatura

El éxito en la concreción de los objetivos mencionados en el párrafo anterior, se encuentra asociado a la apropiada utilización durante el cursado de la asignatura y en el marco del modelo pedagógico de la misma, de una variedad de estrategias didácticas que se vinculan en forma articulada y coherente con el resto de los recursos y las actividades, a los efectos de enriquecer e incrementar la calidad del aprendizaje significativo de los contenidos involucrados. La totalidad de las estrategias mencionadas pueden clasificarse en tres grandes grupos:

- Estrategias áulicas teórico-prácticas, a partir del desarrollo presencial de módulos con los contenidos teóricos y prácticos del programa de la asignatura.
- Estrategias áulicas y extra-áulicas con la utilización de recursos tecnológicos, basadas en la utilización en forma sincrónica y asincrónica de herramientas computacionales interactivas y no interactivas, desarrolladas específicamente para la asignatura, junto con actividades significativas de aprendizaje para la utilización de las mismas.
- Estrategias extra-áulicas de desarrollo y elaboración de Trabajos Integradores de Investigación. Los mismos están sustentados en la profunda comprensión del problema real a tratar, en el proceso de obtención del correspondiente modelo físico y matemático del problema, en la resolución y análisis del mismo y en el uso y desarrollo de implementaciones computacionales propias de los estudiantes, las que a partir de los

métodos numéricos y analíticos utilizados les brindan las herramientas necesarias para la experimentación numérica de los temas por ellos elegidos. Se promueve en los estudiantes la utilización de software libre, por lo cual se los instruye en el uso de programas tales como Scilab, Octave y Maxima.

La temática seleccionada y desarrollada para la presente intervención educativa, es utilizada en el marco de las estrategias extra-áulicas de desarrollo y elaboración de Trabajos Integradores de Investigación. De esta manera se convierte en un eje sobre el que se articulan el resto de las actividades que se desarrollan durante el ciclo lectivo, resignificando los contenidos desarrollados en clase y mejorando en forma sustancial los procesos de construcción del conocimiento. La propuesta permite además un acercamiento y una mayor comprensión de problemas centrales de la Ingeniería, integrando adecuadamente al proceso de enseñanza y aprendizaje, contenidos teóricos y prácticos sobre una determinada situación problema planteada.

3 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA A DESARROLLAR EN LA PROPUESTA

En virtud de la diversidad y profundidad de contenidos y teniendo en cuenta los aspectos de vinculación que presenta la asignatura Matemática Avanzada con una importante cantidad de temas relacionados a la Ingeniería, se plantea el desarrollo por parte de los estudiantes de Trabajos Integradores de Investigación dentro del marco de las estrategias extra-áulicas mencionadas. Éstos les ofrecen a los mismos la oportunidad de profundizar en temas de interés, promoviendo el desarrollo de capacidades relacionadas a la investigación e innovación y acercándose al mismo tiempo a la problemática específica de su carrera de Ingeniería.

Las áreas temáticas propuestas, entre las cuales los estudiantes pueden elegir libremente el tema de interés a investigar, están relacionadas a la aplicación de conceptos de Matemática Avanzada a problemas específicos en distintos ámbitos de la Ingeniería, tales como modelación de sistemas físicos complejos, investigación sobre amortiguamiento y resonancia en sistemas masa-resorte-amortiguador, estudio y análisis de la solución ante cambios en los parámetros del problema para el caso de la ecuación de la onda, ecuación del calor y ecuación de Laplace, así como también el estudio de la estabilidad de sistemas autónomos planos, entre otros.

De esta manera, la presente propuesta de trabajo “Dinámica de un oscilador aeroelástico de dos grados de libertad”, se inscribe en el marco de esta convocatoria para el desarrollo de estrategias educativas extra-áulicas de elaboración de un Trabajo Integrador de Investigación, que los mismos pueden realizar en forma individual o en grupos. El trabajo es de carácter obligatorio ya que es una de las condiciones de regularidad de la asignatura, se desarrolla a lo largo del ciclo lectivo, presenta una tutoría y seguimiento periódico de los avances por parte de los docentes de la asignatura y se presenta al final del cursado en un informe escrito, el cual constituye una memoria de todos los aspectos desarrollados, de los análisis numéricos y analíticos realizados y de las conclusiones obtenidas por los estudiantes a partir del análisis de los resultados obtenidos. Al mismo tiempo, se destina una clase a la exposición oral de los trabajos de los distintos grupos, simulando una sesión técnica temática de un Congreso o Jornada. Se promueve así, el desarrollo de capacidades comunicacionales, tanto orales como escritas y aquellas asociadas al trabajo en equipo.

Con el objeto de no descuidar la vinculación problema real–modelo, es importante presentar a los estudiantes que participarán de la propuesta, una introducción al tema tal como una descripción del problema a tratar, que tenga en cuenta todos aquellos elementos que constituyen el factor de motivación que impulsará el trabajo a elaborar.

3.1 Motivación al estudio del problema

La disponibilidad de modernos métodos y teorías de análisis estructural, apoyados por la utilización de equipos de cómputo con gran capacidad de cálculo, junto con el continuo avance de la Ingeniería y de las ciencias de los materiales, permite que algunas de las estructuras diseñadas por el hombre sean cada vez más sensibles a los efectos que producen las cargas de viento que inciden sobre las mismas. Existe una gran cantidad de factores que tienen una participación importante en la variación de aquellos parámetros que hacen que una estructura determinada presente una mayor o menor sensibilidad ante las acciones dinámicas del viento (Davenport, 1998).

La descripción del comportamiento mecánico de este tipo de estructuras, sometidas a la acción del viento, presenta un desafío interesante desde el punto de vista de la mediación del problema para su implementación en un curso de Matemática Avanzada. Factores de fundamental importancia para el fenómeno como por ejemplo: velocidad y turbulencia del viento incidente, distribución de cargas aerodinámicas sobre la estructura, fenómenos de interacción fluido-estructuras y posible aparición de fenómenos de inestabilidad aeroelástica, son algunos de los elementos que deben ser mediados adecuadamente para su implementación como estrategia didáctica en el modelo pedagógico de la asignatura.

3.2 Breve descripción del fenómeno aeroelástico

Cuando una masa de aire en movimiento tal como el viento atmosférico, incide sobre un cuerpo de forma geométrica establecida, existe una determinada configuración de cargas debidas a la incidencia de la masa de aire, denominadas cargas aerodinámicas, que se producen sobre la superficie del mismo. Una variedad de factores importantes, influyen sobre las características de estas cargas. Aspectos tales como geometría del cuerpo, velocidad del viento incidente, propiedades dinámicas del mismo y movimiento de la estructura, entre otras, son las más destacables, (Meseguer Ruiz, 2001).

Si el cuerpo mencionado, por acción de las cargas se mueve o deforma en el seno del fluido incidente, provoca necesariamente una reconfiguración de las líneas de flujo del mismo, lo cual trae aparejado una variación en la distribución de cargas de presión sobre el cuerpo, modificando nuevamente el patrón de movimiento. Esta interacción entre el viento incidente y el movimiento de la estructura es conocido como interacción fluido-estructura o fenómeno aeroelástico.

De acuerdo a lo descripto, la dinámica de un oscilador aeroelástico de n grados de libertad, involucra la consideración en el problema de ciertas fuerzas, como son las aerodinámicas producidas por la acción del viento sobre la superficie del cuerpo, las fuerzas elásticas debidas a la deformación y las fuerzas de inercia, las cuales se encuentran asociadas a las diversas aceleraciones que experimenta el cuerpo durante el movimiento producido bajo la acción del viento. Es importante destacar el valor que poseen los osciladores aeroelásticos en la comprensión y análisis de fenómenos de interacción fluido estructura de gran complejidad, tales como el fenómeno de buffeting en puentes arriostrados, (Castelló et al. 2003).

3.3 Definición del modelo físico y matemático del problema tratado

La estrategia educativa por la cual el alumno construye conocimiento a partir de la experiencia realizada, requiere una profunda comprensión de cada uno de los pasos del proceso en el que se encuentra inmerso. Esto implica iniciar el estudio del problema de Ingeniería a partir de una correcta interpretación del sistema físico tratado. Entendemos por sistema físico al conjunto de objetos materiales que interactúan entre sí de determinada forma, con la finalidad de cumplir una cierta función. De la misma manera se denomina modelado matemático al proceso mediante el cual un problema, es interpretado en términos de símbolos abstractos. La descripción abstracta, que incluye una formulación matemática, se denomina modelo matemático del problema original.

El proceso de obtención de modelos matemáticos para el análisis de sistemas físicos reales, requiere que en primer lugar se identifique claramente cuál es el fenómeno del mundo real que se desea conocer. Luego se seleccionan los objetos materiales representativos del problema y se determinan las relaciones entre ellos y su forma de interacción. De esta manera se define el denominado modelo físico. Éste constituye una simplificación o idealización del sistema físico real a partir del cual es posible realizar la formulación correspondiente para la obtención del modelo matemático.

A continuación, la Figura 1 permite observar algunas de las definiciones y conceptos previos que es necesario especificar con el objeto de iniciar el proceso de obtención de los modelos físico y matemático señalados.

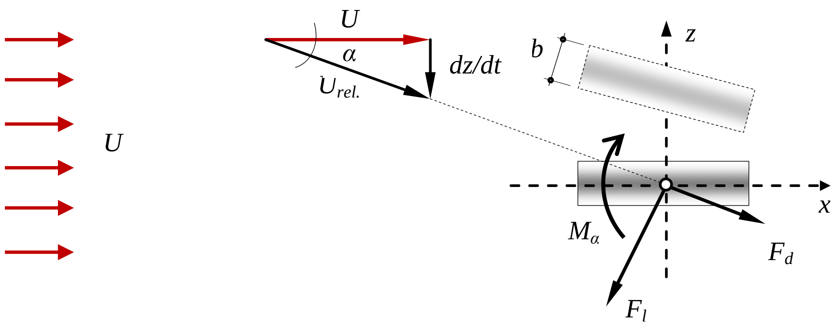

Figura 1: Cargas aerodinámicas y velocidad relativas.

En la misma, b es el ancho de la estructura, U es la velocidad media del viento incidente, dz/dt es la velocidad de desplazamiento de la estructura en el sentido del eje z, U_{rel} es la velocidad relativa que percibe un observador situado sobre el cuerpo en movimiento, α es el denominado ángulo de ataque, F_d es la fuerza aerodinámica resultante por unidad de longitud en la dirección de la velocidad relativa, denominada resistencia aerodinámica, F_l es la resultante por unidad de longitud de las fuerzas aerodinámicas en dirección perpendicular a la velocidad relativa, denominada fuerza de sustentación y M_α es el momento aerodinámico resultante por unidad de longitud que actúa sobre la estructura. La norma o módulo del vector velocidad relativa mencionado está dado por:

$$U_{rel} = \sqrt{\left(U^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)} \tag{1}$$

El ángulo de ataque, entre la dirección del viento incidente y la dirección de la velocidad relativa U_{rel}, de acuerdo a la Figura 1, está dado por la siguiente expresión para un determinado instante t:

$$\alpha = \frac{\frac{dz}{dt}}{U} \tag{2}$$

A partir de la caracterización del problema real, que en este caso es el estudio de una estructura tipo torre o puente por ejemplo, oscilando bajo la acción de las cargas aerodinámicas generadas por el viento, se definen los grados de libertad a considerar, se caracterizan los parámetros de control y de respuesta del sistema, identificando las variables a tener en cuenta en el proceso de modelado, tales como masas, amortiguamiento estructural, rigidez del sistema tanto traslacional como rotacional, entre otras. Estas definiciones permiten obtener el denominado modelo físico del problema. La Figura 2 muestra el modelo físico adoptado en este caso para el oscilador aeroelástico de dos grados de libertad, los cuales corresponden a una traslación según la dirección del eje z, y una rotación alrededor de un punto E determinado, denominado centro de rotación.

A pesar de haber despreciado el movimiento de traslación en la dirección del eje x, introduciendo en este punto una simplificación al problema, los grados de libertad adoptados son adecuados para la descripción del fenómeno en estudio.

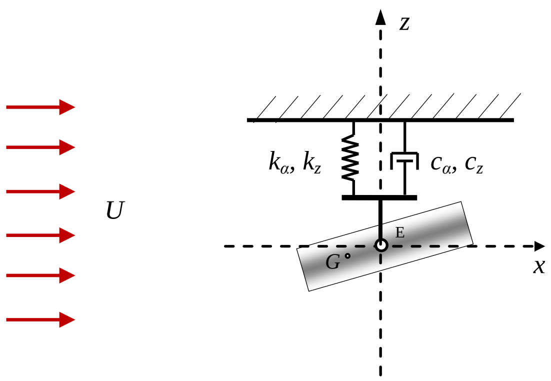

Figura 2: Modelo Físico del problema en estudio.

En la Figura 2, k_α y k_z, representan las rigideces lineales del sistema con respecto a las direcciones rotacionales y traslacionales respectivamente, de acuerdo a los grados de libertad del modelo, en tanto que c_α y c_z, representan las constantes de amortiguamiento estructural viscoso según las mismas direcciones mencionadas.

A partir de las definiciones presentadas en los párrafos precedentes, y mediante la utilización apropiada de consideraciones energéticas o bien del estudio de la variación de la cantidad de movimiento, tanto lineal como rotacional, los estudiantes pueden hallar las ecuaciones de movimiento del sistema físico estudiado. Las mismas se presentan a continuación y están dadas por las ecuaciones (3) y (4).

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + S\frac{d^2\alpha}{dt^2} + c_z\frac{dz}{dt} + k_z z = F_z(\alpha) \tag{3}$$

$$S\frac{d^2z}{dt^2} + I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + c_\alpha\frac{d\alpha}{dt} + k_\alpha \alpha = M_\alpha(\alpha) \tag{4}$$

Éstas, en su caso más general, componen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden no homogéneas, acopladas y constituyen el modelo matemático buscado del problema en estudio, (Edwards y Penney, 2009). En las mismas, m representa la masa por unidad de longitud del sistema, S es el momento estático por unidad de longitud respecto al centro de rotación E, e I es el momento de inercia por unidad de longitud, respecto al mismo punto. La expresión matricial de las ecuaciones anteriores es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} m & S \\ S & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_z & 0 \\ 0 & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_z & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_Z(\alpha) \\ M_\alpha(\alpha) \end{bmatrix} \tag{5}$$

El término independiente de la ecuación (5) está formado por las fuerzas externas debidas a la acción del viento, donde $M_\alpha(\alpha)$ es el momento aerodinámico exterior actuante por unidad de longitud y $F_z(\alpha)$ es la fuerza aerodinámica en la dirección del eje z. Ésta se obtiene a partir de la proyección sobre dicho eje, de las fuerzas $F_l(\alpha)$ y $F_d(\alpha)$. Estas fuerzas resultan ser una función del ángulo de ataque α, por lo cual para un determinado instante t de análisis, las mismas estarán dadas por las ecuaciones (6) y (7), que proyectadas sobre el eje z permiten encontrar la ecuación (8):

$$F_d(\alpha) = \frac{1}{2}\rho U_{rel}{}^2 b c_d(\alpha) \tag{6}$$

$$F_l(\alpha) = \frac{1}{2}\rho U_{rel}{}^2 b c_l(\alpha) \tag{7}$$

$$F_z(\alpha) = -F_d(\alpha) sen\alpha - F_l(\alpha) cos\alpha \tag{8}$$

Adicionalmente y en forma semejante a las expresiones (6) y (7), se define $M_\alpha(\alpha)$ de acuerdo a la siguiente expresión:

$$M_\alpha(\alpha) = \frac{1}{2}\rho U_{rel}{}^2 b c_m(\alpha) \tag{9}$$

Donde $c_d(\alpha)$, $c_l(\alpha)$ y $c_m(\alpha)$, son coeficientes adimensionales denominados coeficientes aerodinámicos, que dependen de la forma geométrica del cuerpo en estudio y se obtienen a partir de ensayos experimentales realizados en túneles de viento o a partir de ensayos a escala real de una determinada estructura (Kazakevich y Vasilenko, 1996). En el caso del presente trabajo, la variación de los coeficientes aerodinámicos con respecto al ángulo de ataque se entrega como dato del problema a los estudiantes. La Figura 3, muestra un ejemplo de valores de los coeficientes mencionados, obtenidos experimentalmente para una determinada sección transversal.

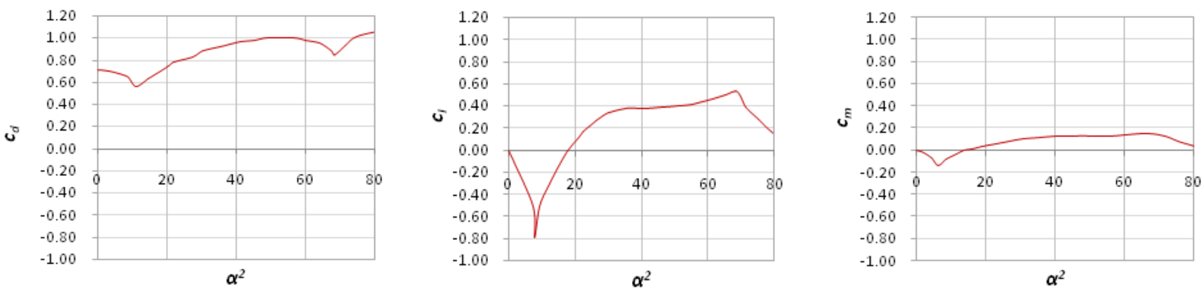

Figura 3: Coeficientes aerodinámicos para una sección rectangular h/b=2.
(Kazakevich y Vasilenko, 1996)

Es importante destacar, que la consideración de las fuerzas aerodinámicas desde el punto de vista presentado en los apartados anteriores, nos coloca frente al denominado criterio de análisis cuasi-estático del problema, debido a que las fuerzas no se consideran variables en el tiempo como lo son las fuerzas aerodinámicas reales generadas por el viento atmosférico. De esta manera, se toma un criterio estacionario, lo que constituye una nueva simplificación del problema, (Haaker, 1994).

El sistema dado por las ecuaciones (3) y (4) se encuentra acoplado y para encontrar su respuesta es necesario la fijación de condiciones iniciales para un instante $t=t_0$. El acoplamiento de este sistema se da desde dos puntos de vista: por un lado, a partir del los términos de las ecuaciones que contienen al momento estático respecto al centro de rotación, lo que constituye un acoplamiento estructural dinámico dado por una matriz de masa no diagonal, (Inman, 1994), y por el otro, a partir de un acoplamiento aerodinámico dado por la presencia en ambas ecuaciones de términos dependientes del movimiento de la estructura por medio de la influencia del ángulo de ataque α.

Una vez finalizado el proceso de obtención de modelo matemático del problema, se describen a continuación los análisis numéricos a realizar sobre el mismo.

3.4 Estudio del problema dinámico de oscilaciones libres no amortiguadas

En el caso de la resolución del problema dinámico de oscilaciones libres no amortiguadas el vector de cargas exteriores es nulo y en forma adicional consideramos nulo el término de amortiguamiento de las expresiones anteriores, por lo que el modelo matemático del problema está dado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, lineales y homogéneas, que en su forma matricial queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m & S \\ S & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_z & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

En la misma, para el caso para el cual S=0, es decir el centro de masas coincide con el centro de rotación, las oscilaciones traslacionales y rotacionales se encuentran desacopladas, por lo cual es posible encontrar las denominadas frecuencias naturales desacopladas ω_z y ω_α, las cuales estarán dadas por las siguientes expresiones:

$$\omega_z{}^2 = \frac{k_z}{m} \tag{11}$$

$$\omega_\alpha{}^2 = \frac{k_\alpha}{I} \tag{12}$$

En caso contrario, siendo S≠0, el sistema (10) puede resolverse planteando la determinación de las frecuencias naturales acopladas de vibración del modelo y de las formas modales correspondientes, a partir de la resolución del problema de valores y vectores propios dado por la ecuación siguiente:

$$[\boldsymbol{B} - \lambda_i \boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

En dicha ecuación $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad, $\boldsymbol{v}_i$ son los vectores propios asociados a cada valor propio $\lambda_i=\omega^2$ y la matriz $\boldsymbol{B}$ está dada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} m & S \\ S & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_z & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{bmatrix} \tag{14}$$

Los vectores v_i brindan información sobre la forma de cada modo de vibración y cada uno de ellos se encuentra asociado a un valor propio $\lambda_i=\omega_i{}^2$, siendo ω_i las frecuencias angulares naturales acopladas del sistema.

3.5 Estudio del problema dinámico de oscilaciones forzadas amortiguadas

El estudio de las oscilaciones forzadas del sistema implica la consideración de los términos independientes de la ecuación (5). Un procedimiento conveniente para el trabajo con las expresiones (6), (7) y (9) es la linealización de los coeficientes aerodinámicos $c_d(\alpha)$, $c_l(\alpha)$ y $c_m(\alpha)$. Es así que, tomando los dos primeros términos de los desarrollos en series de Taylor, obtenemos las siguientes expresiones:

$$c_d(\alpha) \cong c_d(0) + \left.\frac{dc_d}{d\alpha}\right|_0 \alpha + \vartheta(\alpha^2) \cong c_d(0) + \left.\frac{dc_d}{d\alpha}\right|_0 \alpha \tag{15}$$

$$c_l(\alpha) \cong c_l(0) + \left.\frac{dc_l}{d\alpha}\right|_0 \alpha + \vartheta(\alpha^2) \cong c_l(0) + \left.\frac{dc_l}{d\alpha}\right|_0 \alpha \tag{16}$$

$$c_m(\alpha) \cong c_m(0) + \left.\frac{dc_m}{d\alpha}\right|_0 \alpha + \vartheta(\alpha^2) \cong c_m(0) + \left.\frac{dc_m}{d\alpha}\right|_0 \alpha \tag{17}$$

Reemplazando (15) y (16) en (8) y considerando que para α pequeños, $cos\alpha \cong 1$ y $sen \propto \cong \alpha$ tendremos:

$$\begin{bmatrix} m & S \\ S & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_z & 0 \\ 0 & c_\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_z & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\rho {U_{rel}}^2 b \left\{ c_l(0) + \left[-\left.\frac{dc_l}{d\alpha}\right|_0 - c_d(0) \right] \propto \right\} \\ \frac{1}{2}\rho {U_{rel}}^2 b \left[c_m(0) + \left.\frac{dc_m}{d\alpha}\right|_0 \alpha \right] \end{bmatrix} \tag{18}$$

Reescribiendo la ecuación (18) a los efectos de agrupar convenientemente los términos, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} m & S \\ S & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_z & 0 \\ 0 & c_\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_z & \frac{1}{2}\rho {U_{rel}}^2 b \left[\left.\frac{dc_l}{d\alpha}\right|_0 + c_d(0) \right] \\ 0 & k_\alpha - \frac{1}{2}\rho {U_{rel}}^2 b \left.\frac{dc_m}{d\alpha}\right|_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\rho {U_{rel}}^2 b c_l(0) \\ \frac{1}{2}\rho {U_{rel}}^2 b c_m(0) \end{bmatrix} \tag{19}$$

La resolución del sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden no homogéneas dado por (19), es posible realizarla siguiendo dos caminos:

- Reescribir el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 1º orden y luego utilizar métodos numéricos apropiados, como los Métodos de Runge-Kutta, (Cheney y Kinkaid, 2011), entre otros.
- Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden, utilizando el método de diferencias finitas, (Cheney y Kinkaid, 2011).

Se busca que los estudiantes sean capaces de comprender y describir los fundamentos de los métodos numéricos involucrados en la resolución del problema, tales como Métodos de Runge-Kutta, Método de la Potencia y Método de la Potencia Inversa, así como también conocer su utilidad y ventajas y ser conscientes de los errores que cometen a partir de su aplicación, comparando las potencialidades y limitaciones de los mismos.

4 RESULTADOS OBTENIDOS DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL DISEÑO DE LA PROPUESTA

Las tareas de diseño de la presente propuesta, orientada a su utilización como estrategia educativa en una asignatura tal como Matemática Avanzada, brinda como resultado luego de su proceso de diseño y elaboración, la disponibilidad para el equipo docente de la asignatura involucrada, de una serie de elementos y claves para la implementación de la misma, que satisfacen de manera adecuada los siguientes factores:

- Elección y mediación pedagógica de los contenidos a utilizar en la implementación del problema a tratar.
- Organización de los mismos en etapas de desarrollo que presentan en forma paulatina los estudios y análisis necesarios para la comprensión del problema.

En la Tabla 1 podemos apreciar las distintas etapas de avance que se obtienen como resultado del diseño de la propuesta presentada, junto con una descripción de las principales características de las mismas, la metodología y métodos numéricos empleados en su resolución.

Etapas de avance en el desarrollo de la propuesta.	Descripción	Metodología utilizada en la resolución	Métodos Numéricos a utilizar
Etapa 1	Introducción y motivación al problema. Formulación del modelo físico y del modelo matemático.	Obtención de las Ecuaciones de Lagrange a partir de la utilización de los Principios de Hamilton	
Etapa 2	Estudio del problema de vibraciones libres no amortiguadas para un sistema acoplado de masa desbalanceada.	Determinación de las frecuencias naturales de oscilación traslacional y rotacional y sus respectivas formas modales.	Método de la Potencia. Método de la Potencia Inversa
Etapa 3	Estudio del problema de vibraciones forzadas. Cargas exteriores linealizadas.	Tratamiento del problema a partir de las Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Tratamiento del problema a partir de la sustitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden equivalente.	Métodos de Runge-Kutta Método de Diferencias Finitas
Etapa 4	Estudio paramétrico	Elección de parámetros de control y de respuesta, análisis de sensibilidad.	

Tabla 1: Etapas de desarrollo de la presente propuesta.

Los estudiantes deben elaborar simulaciones computacionales propias, así como también utilizar recursos tecnológicos ya disponibles para el aprendizaje significativo de los métodos numéricos, a partir del problema tomado como eje, constituido por el oscilador aeroelástico de dos grados de libertad.

El paso de los estudiantes por las sucesivas etapas indicadas en la Tabla 1, constituye un acercamiento inicial de los mismos a la investigación científica. Así mismo la elaboración del informe final escrito del Trabajo Integrador de Investigación, así como también su presentación frente al resto de los estudiantes y docentes de la cátedra, resultan actividades que promueven el desarrollo de capacidades comunicacionales orales y escritas.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una descripción del diseño de una propuesta educativa para una asignatura tal como Matemática Avanzada, correspondiente a la carrera de Ingeniería en Mecatrónica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo. Se ha planteado además la metodología por la cual la asignatura implementa estrategias extra-áulicas de desarrollo y elaboración de Trabajos Integradores de Investigación, estructurados en base a un problema relevante de la Ingeniería.

Se ha descripto el modelo físico y matemático de un oscilador aeroelástico de dos grados de libertad, indicando las variables que intervienen en el problema y las simplificaciones adoptadas en cada una de las etapas del proceso. Se presentaron detalladamente las ecuaciones matriciales a las que se arriban para los casos de estudio, correspondientes a vibraciones libres no amortiguadas y a vibraciones forzadas debidas a cargas de viento.

La estrategia didáctica basada en el Trabajo Integrador de Investigación, constituye una nueva puerta de acceso al aprendizaje significativo, a partir de la interacción de los estudiantes con un problema real, que es al mismo tiempo elemento motivador e hilo conductor de los contenidos y actividades a desarrollar a lo largo de toda la asignatura.

Se trata de una propuesta pedagógica dinámica, en el sentido que se requiere la reflexión continua de los docentes sobre el desarrollo del propio proceso y sus resultados y la detección de posibles necesidades de reajustes y mejoras para mantener el equilibrio y la apropiada articulación entre las distintas actividades de aprendizaje áulicas y extra-áulicas y las instancias de evaluación.

Se coloca de esta manera al alcance de docentes de asignaturas tales como Cálculo Avanzado, Matemática Avanzada, Dinámica Estructural, Matemática Superior, Cálculo Numérico, entre otras, una propuesta para desarrollar los contenidos relativos a Métodos Numéricos, a partir de un problema motivador y de interés para los estudiantes.

REFERENCES

Castelló, W. B., Preidikman, S., Massa, J. C., Simulaciones numéricas de “buffeting” en puentes arriostrados causados por flujos vorticosos 2-D. *Mecánica computacional*, Vol. XXII, pp:718–732, Rosales, Cortínez y Bambill, eds. Bahía Blanca, Argentina, Noviembre de 2003.

Cheney, W. y Kincaid, D., *Métodos numéricos y computación.* Cencage Learning, México, 2011.

Davenport, A.G., What makes a structure wind sensitive?. en *Wind effects on building and structures*, Riera and Davenport eds. Rotterdam, 1998.

Edwards C. y Penney D., *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. cómputo y modelado.* Pearson, Prentice Hall, 2009.

Haaker, T. I. y Van Der Burgh, A. H. P., On the dynamics of aeroelastic oscillators with one dregree of freedom. *SIAM, Journal of Applied Mathematics*, Vol. 54, N°4, pp:1033–1047, 1994.

Inman, D.J., *Engineering vibration.* Prentice Hall, New Jersey, 1994.

Kazakevich, M. I. y Vasilenko, A.G., Closed analytical solution for galloping aeroelastic self-oscillations. *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, 65:353–360, 1996.

Meseguer Ruiz, J., *Aerodinámica civil. Cargas de viento en las edificaciones*. McGraw Hill, 2001.

Rinaudo, C., Lafourcade, P., Prieto Castillo, D., *La pedagogía universitaria.* Editorial de la Universidad Nacional de Cuyo, Argentina, 1998.

Verdejo, P. y Freixas, R., *Educación para el pensamiento complejo y competencias: diseño de tareas y experiencias de aprendizaje.* ACET, S.C. México, Abril de 2009.