

MÉTODOS DE UMBRALIZACIÓN DE IMÁGENES DIGITALES BASADOS EN ENTROPIA DE SHANNON Y OTROS

Carlos A. Cattaneo^a, Ledda I. Larcher^a, Ana I. Ruggeri^b, Andrea C. Herrera^a, Enrique M. Biasoni^a

^aFacultad de Agronomía y Agroindustrias, Universidad Nacional de Santiago del Estero, Av. Belgrano Sur 1912; G4200ABT Santiago del Estero, Argentina, cacatta@unse.edu.ar
<http://faa.unse.edu.ar>

^bFacultad de Ciencias Exactas y Tecnologías, Universidad Nacional de Santiago del Estero, Av. Belgrano Sur 1912; G4200ABT Santiago del Estero, Argentina
<http://fce.unse.edu.ar>

Palabras clave: umbralizado adaptivo, entropía de Shannon, método de Pun, Kapur, Yen, entropía de la correlación, método de Kittler e Illingworth, espacio de color RGB, binarizado.

Resumen

La umbralización de imágenes es el proceso por el cual se busca un umbral óptimo que permita distinguir en una imagen los objetos del fondo de los objetos del primer plano. Este umbral es el punto (o valor) en el cual el histograma de una imagen se divide en dos picos. En la mayoría de las imágenes este valor resulta un poco difícil de encontrar gráficamente debido a la complejidad de estos histogramas. Es por eso que se usan métodos paramétricos y no paramétricos que modelizan el problema y encuentran diferentes maneras de obtener este umbral. Pun y Kapur utilizaron la entropía de Shannon, haciendo sus modificaciones de acuerdo a su análisis y plantearon sus propuestas en la búsqueda de un umbral. Yen definió un método basado en entropía de la correlación de acuerdo a los lineamientos de Shannon. Kittler e Illingworth, propusieron un método basado en clusterización de grupos mediante el mínimo error del promedio de clasificación de píxeles.

Continuando un trabajo anterior se agregan estos métodos en el cálculo del umbral en imágenes en gris, realizando luego la binarización por capas, y comparando cada una de estas binarizaciones con una realizada en escala de grises.

Experimentalmente se encuentra que las imágenes por umbralización siguiendo el método de Pun (a partir de aquellas en escala de grises) da como resultado imágenes poco definidas, siendo aquellas obtenidas por los métodos de Kapur y Yen más definidas en detalles. A la vez, el método propuesto por Kittler brinda resultados muy similares a Yen, umbralizaciones muy parejas. Tanto Yen como Kittler tienen un comportamiento sobresaliente respecto de los otros métodos.

1 INTRODUCCIÓN

La umbralización de imágenes es una de los métodos que abarca la segmentación de imágenes digitales. Las técnicas de umbralización buscan obtener un valor de umbral que permita binarizar a la imagen separando adecuadamente el fondo (background) y el objeto a separar (foreground).

Muchas de las técnicas de umbralización están basadas en la información estadística que brinda el histograma, sobre todo en aquellas imágenes donde los objetos tienen una superficie o textura homogénea y el fondo es más o menos uniforme. El problema de la umbralización es encontrar el valor T (umbral) adecuado entre los valores de grises en imágenes que permita una óptima separación entre el objeto y el fondo.

Si el histograma de una imagen posee dos picos o lóbulos (Figura 1) podemos separar dos zonas o regiones y el umbral será aquel valor que se encuentra en el valle entre ambas.

Este es un caso ideal, el histograma de intensidad de una imagen (niveles de gris) tendría bien marcado los dos picos para objeto y fondo, y diríamos que el umbral óptimo es aquel valor T que separa ambas regiones.

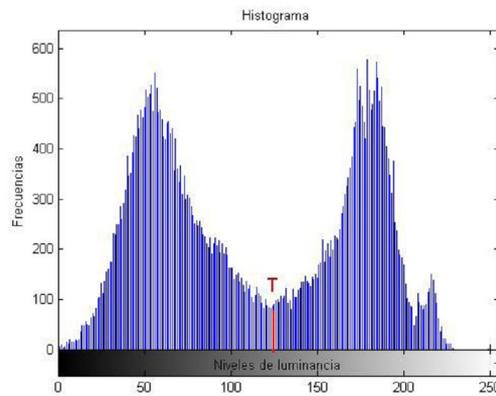


Figura 1. Histograma ideal

Sin embargo, las imágenes siempre presentan ruido y, como consecuencia de esto, sus histogramas son difíciles de analizar (Figura 2), es decir presentan histogramas sin una marcada separación de regiones. El ruido se debe a que la imagen depende de otros factores como la luz, iluminación etc.

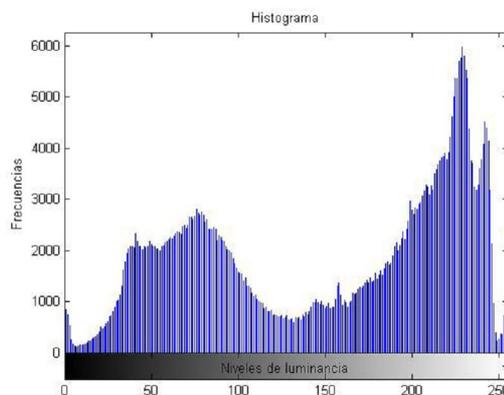


Figura 2. Ejemplo de un histograma que no es claramente bimodal

Existen numerosas técnicas de umbralización, desarrolladas, ampliadas y modificadas por diversos autores pero, no hay un método general que se aplique a todas las imágenes y que nos brinde una umbralización perfecta. Generalmente, esto varía dependiendo de la imagen y de otros factores.

Clasificaremos a las técnicas de umbralización de acuerdo a la información que emplean y el modo en que la procesan. Esta categorización fue propuesta por [Sezgin y Sankur](#) (2004):

- **Métodos basados en la forma del histograma:** Esta clasificación abarca las diferentes propiedades de un histograma, como por ejemplo los picos, valles y curvaturas. Básicamente los dos picos más altos y su valle son buscados para usar la envolvente convexa de un histograma, o su curvatura. Otros autores tratan de aproximar el histograma a dos funciones. Entre los autores que usaron este análisis podemos citar a A. Rosenfeld y P. de la Torre, J. Weszka y A. Rosenfeld y Sezan.
- **Métodos basados en la clusterización:** Son aquellos que modelan el histograma como una superposición de funciones gaussianas. En esta clase de algoritmos los datos se reducen al análisis de dos regiones (background y foreground). Las dos regiones corresponden a los dos lóbulos del histograma, algunos autores buscan el punto medio entre los picos (como por ejemplo T. W. Ridler y S. Calavard); mientras que otros usan la agrupación media cuadrática tal caso corresponde a Otsu, el cual propone minimizar la suma ponderada de las variaciones dentro de una clases del objeto y fondo para establecer un umbral óptimo. Kittler e Illingworth, propusieron un método basado en clusterización de grupos mediante el mínimo error del promedio de clasificación de píxeles.
- **Métodos basados en la entropía:** Usan la entropía de los niveles de gris en una imagen. La máxima entropía es interpretada como la máxima información transferida y es el umbral óptimo a elegir.
- **Métodos basados en los atributos de la imagen:** Consisten en técnicas que seleccionan un valor de umbral t basado en atributos que buscan una medida de similitud entre la imagen original y la imagen binarizada. Estos atributos pueden ser: bordes, formas, momentos de niveles de gris, conectividad, textura o estabilidad de los objetos segmentados Los autores que estudiaron estos métodos son Tsai, Hertz and Schafer, Murthy y Pal.
- **Métodos basados en información espacial:** A diferencia de los métodos anteriores que utilizan el valor de gris de cada píxel, estos los algoritmos dependen de la información espacial de los píxeles, por ejemplo las probabilidades de su contexto, funciones correlación, probabilidades de co-ocurrencia, modelos locales dependientes de píxeles, entropía en bidimensional, etc. Entre los autores que los aplicaron podemos nombrar a Rosenfeld, Pal, Chang.
- **Métodos basados en características locales:** adaptan el umbral en cada píxel en función de las características locales de la imagen tales como rango, varianza, parámetros de superficie. El umbral $T(i,j)$ es en función de sus coordenadas, los píxeles del objeto y fondo son indicados por la variable $B(i,j)$. Nakagawa y Rosenfeld, Deravi and Pal fueron los primeros en usar estos métodos.

2 ESTADO DEL ARTE

El umbralizado de imágenes basado en la entropía ha recibido una consideración importante en los últimos años, dos tipos de entropía son generalmente usados como criterio de optimización: la entropía de Shannon y la entropía relativa, también conocida como la distancia de información Kullback-Leibler.

El principio de entropía es medir la incertidumbre que describe la información contenida en una fuente. La selección del umbral basada en la entropía de Shannon, consiste en encontrar un umbral óptimo maximizando la función entropía. Este método fue primeramente propuesto por Pun (1980, 1981) en sus dos trabajos, quien consideró a la imagen como una fuente de símbolos. Más tarde Kapur (1985), separa en dos distribuciones de probabilidad una para el primer plano y otra para el fondo. Luego maximizaba el total la entropía de la imagen particionada para obtener un umbral óptimo. Siguiendo con la misma idea, Yen (1995) redefine el término de entropía como un valor de correlación entrópica y define el umbral óptimo a partir del valor que maximiza esa correlación entrópica.

Kittler e Illingworth (1986) proponen un trabajo buscando optimizar una función criterio relacionada con el mínimo error promedio referido a la clasificación de píxeles.

En los últimos años la modificación de los métodos propuestos ha ido variando y multiplicándose en diferentes alternativas. Cada alternativa de acuerdo a la necesidad buscada. Kapur y Kittler son considerados como los métodos con mejor comportamiento en imágenes (N. Nacereddine et al., 2005), pero Otsu parece ser el método más eficiente en cualquier imagen en comparación con los otros. (Hye-Jin Jeong, Tac Yoon Kim, Hae-Gil Hwang, Hyun-Ju Choi, Hyung-Seon Park, Heung-Kook Choi)

De acuerdo a Azhar y Widjanarko (2002), Otsu se comporta mejor en imágenes con histogramas no bimodales mientras que el método sugerido por Kittler e Illingworth parece tener un mejor rendimiento en imágenes con histogramas bimodales.

En 2010 Cattaneo et al. aplicaron los métodos de Otsu y la entropía de Shannon propuesta en el primer trabajo de Pun, y se concluyó que el uso de entropías en el umbralizado de imágenes brindaba mejores resultados que el uso de varianzas de Otsu. En este trabajo los resultados experimentales mostraron, una vez más, que el uso de entropías, en este caso la de correlación de Yen, se comporta mejor que el uso de varianzas de Kittler e Illingworth.

2.1 Métodos basados en la entropía:

Esta clase de algoritmos explota la entropía de la distribución de los niveles de gris en una imagen. La maximización de entropías es interpretada como la máxima información transmitida, Pun (1981) introdujo en el cálculo del umbral la función entropía de Shannon, considero la imagen como el resultado señales de una misma fuente. Su criterio se basa en encontrar el umbral óptimo que maximice la entropía entre las dos clases (el objeto y fondo)

2.1.1 Método de Pun

Se consideran los píxeles de una imagen convertida a 256 niveles de gris (ecuación 1) y se separan en dos niveles principales de gris, el primer plano o *foreground* (ecuación 2) y un fondo de base o *background* (ecuación 3). La variable g denotará esos valores de niveles de gris. Para imágenes de 8 bits $g = 0...255$. Para ello procede con la separación de píxeles

Sea el conjunto de píxeles de la imagen

$$I = \{g \in I / 0 \leq g \leq 255\} \quad (1)$$

Píxeles correspondiente al objeto (foreground) y el fondo (background)

$$F = \{g \in I / g > t\} \quad (2)$$

$$B = \{g \in I / g \leq t\} \quad (3)$$

En el contexto de procesamiento de imágenes, el foreground es el conjunto de píxeles con luminancia menor a un cierto valor T , mientras que el background es el conjunto de píxeles con luminancias por encima de este T . La función `imhist()` de Matlab calcula el nivel de gris para cada pixel, las frecuencias absolutas para cada píxel g . Calculamos las probabilidades estimadas de cada pixel g haciendo el cociente entre n_g y N , (ecuación 4), siendo n_g el número de veces que se repite el pixel g en la imagen y N la cantidad total de píxeles.

La función probabilidad para cada nivel de gris

$$p(g) = \frac{n_g}{N} \quad g=0, 1, \dots, 255 \quad (4)$$

Con

$$\sum_{g=0}^{255} p(g) = 1 \quad (5)$$

$$N = \sum n_g \quad (6)$$

Las probabilidades del objeto y fondo de acuerdo a un umbral T , están expresadas como (ecuaciones 7 y 8)

$$p_f(g), \quad 0 \leq g \leq t \quad (7)$$

$$p_b(g), \quad t+1 \leq g \leq 255 \quad (8)$$

Definimos la función de probabilidad acumulada como se muestra en la ecuación 9

$$P(t) = \sum_{g=0}^t p(g) \quad (9)$$

Esta función de probabilidad puede ser considerada como una suma o unión de dos funciones de probabilidad, una para zonas claras (foreground, ecuación 10) y otra para zonas oscuras (background, en ecuación 11).

$$P_f(t) = P_f = \sum_{g=0}^t p(g) \quad (10)$$

$$P_b(t) = P_b = \sum_{g=t+1}^{255} p(g) \quad (11)$$

El primer trabajo de Pun, define las entropías del fondo y del objeto usando la entropía de Shannon, paramétricamente dependiente del valor umbral T . (Ecuaciones 12 y 13)

$$H_f(t) = - \sum_{g=0}^t p_f(g) \cdot \log p_f(g) \quad (12)$$

$$H_b(t) = - \sum_{g=t+1}^{255} p_b(g) \cdot \log p_b(g) \quad (13)$$

La suma de estas dos expresiones puede se denotada como H , indicada en las ecuaciones 14, 15 y 16

$$H = H_f(t) + H_b(t) \quad (14)$$

$$H(t) = \left(- \sum_{g=0}^t p_f(g) \cdot \log p_f(g) \right) + \left(- \sum_{g=t+1}^{255} p_b(g) \cdot \log p_b(g) \right) \quad (15)$$

O, también

$$H = - \sum_{g=0}^{255} p(g) \cdot \log(p(g)) \quad (16)$$

El umbral óptimo será, entonces, aquel que maximice esta entropía global (ecuación 17).

$$T^* = \text{Max}\{H(t)\} \quad (17)$$

En su segundo trabajo Pun interpreta la maximización de las entropías con la maximización de una función F . (ecuación 18)

$$F(t) = \frac{H_f}{H} \frac{\log P_f}{\log(\max\{p_0, p_1, \dots, p_t\})} + \left(1 - \frac{H_f}{H}\right) \frac{\log P_b}{\log(\max\{p_{t+1}, p_{t+2}, \dots, p_{255}\})} \quad (18)$$

2.1.2 Método de Kapur

Siguiendo las ideas de Pun, Kapur realiza modificaciones cambiando las probabilidades de los elementos (ecuación 19)

$$p(g) = \frac{P_g}{P_t} \quad g=0, 1, \dots, 255 \quad (19)$$

Por lo tanto las entropías del foreground y background quedan definidas como indican las ecuaciones 20 y 21:

$$H_f(t) = - \sum_{g=0}^t \frac{p(g)}{P_t} \cdot \log \frac{p(g)}{P_t} \quad (20)$$

$$H_b(t) = - \sum_{g=t+1}^{255} \frac{p(g)}{P_t} \cdot \log \frac{p(g)}{P_t} \quad (21)$$

El máximo de la función H será el valor de umbral que optimiza la separación entre background y foreground (ecuación 23)

$$H = H_f(t) + H_b(t) \quad (22)$$

$$T^* = \text{Max}\{H(t)\} \quad (23)$$

2.1.3 Método de Yen

Yen propone un nuevo análisis de entropías basadas en entropías de correlación, el umbral óptimo será el máximo de la entropía correlacionada

Las entropías foreground (ecuación 24) y background (ecuación 25)

$$C_f(t) = -\ln\left(\sum_{g=0}^t \left(\frac{p(g)}{P_t}\right)^2\right) \quad (24)$$

$$C_b(t) = -\ln\left(\sum_{g=t+1}^{255} \left(\frac{p(g)}{P_t}\right)^2\right) \quad (25)$$

La cantidad total de correlación

$$TC = C_f(t) + C_b(t) \quad (26)$$

$$TC(t) = -\ln\left(\sum_{g=0}^t \left(\frac{p(g)}{P_t}\right)^2\right) - \ln\left(\sum_{g=t+1}^{255} \left(\frac{p(g)}{P_t}\right)^2\right) \quad (27)$$

Para obtener la máxima correlación contribuida por el foreground y background, TC debe ser maximizado como se indica en la ecuación 28

$$T^* = \text{Max}\{TC(t)\} \quad (28)$$

2.2 Métodos de Clusterización

2.2.1 Método de Kittler e Illingworth: Error mínimo

Al igual que Pun y Kapur se considera al histograma como una estimación de una función de densidad de probabilidad $p(g)$, que es una mezcla de dos distribuciones correspondientes al foreground y background. Se supone, además, que estas distribuciones (foreground y background) tienen una distribución normal con media y desviación estándar.

Las funciones de densidad de probabilidad

$$p_f(t) = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu_f)^2}{2\sigma_f^2}} \quad (29)$$

$$p_b(t) = \frac{1}{\sigma_b \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu_b)^2}{2\sigma_b^2}} \quad (30)$$

La función densidad de probabilidad del histograma (ecuación 31)

$$p(t) = P_f(t) \cdot p_f(t) + P_b(t) \cdot p_b(t) \quad (31)$$

El error mínimo se alcanza cuando seleccionamos como umbral al valor para el cual

$$P_f(t) \cdot p_f(t) = P_b(t) \cdot p_b(t) \quad (32)$$

Aplicando logaritmo en ambos miembros, resolviendo las ecuaciones y sustituyendo los valores de $\mu_f, \mu_b, \sigma_f^2, \sigma_b^2$ con valores estimados (ecuaciones 33, 34, 35 y 36)

$$\mu_f(t) = \sum_{g=1}^t g \frac{p(g)}{P_f(T)} \quad (33)$$

$$\mu_b(t) = \sum_{g=t+1}^{255} g \frac{p(g)}{P_b(T)} \quad (34)$$

$$\sigma_f^2(t) = \sum_{g=1}^t (g - \mu_f)^2 \cdot p(g) \quad (35)$$

$$\sigma_b^2 = \sum_{g=t+1}^{255} (g - \mu_b)^2 \cdot p(g) \quad (36)$$

Se define una función criterio (ecuación 37), la cual se busca un valor mínimo (ecuación 38)

$$J(t) = 1 + 2(P_f(t) \log \sigma_f(t) + P_b \cdot \log \sigma_b(t)) - 2(P_f(t) \log P_f(t) + P_b \cdot \log P_b(t)) \quad (37)$$

$$T^* = \text{Min}\{J(t)\} \quad (38)$$

3 TIPOS DE APLICACIÓN

Global en gris: Los métodos se emplearán en imágenes convertidas en escalas de grises a través el comando `rgb2gray` de MatLab.

Global en Capas de Colores: Los algoritmos de cada método se emplearán en las capas de color (Rojo, Verde y Azul)

4 RESULTADOS

Para ambos métodos se trabajó primeramente en la búsqueda de un umbral global, o sea, considerando todos los píxeles de la imagen. La imagen utilizada estaba en escala de grises, y la transformación de RGB a escala de grises se realizó simplemente aplicando la función `rgb2gray` de MatLab. Obtenemos el histograma para las 256 intensidades usando la función `imhist` de MatLab.

A continuación, se muestran las imágenes resultantes luego de aplicar el método de umbral global según los diferentes autores.

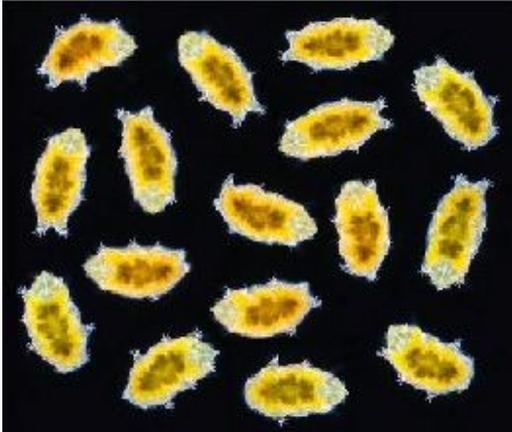


Figura 3. Imagen en RGB

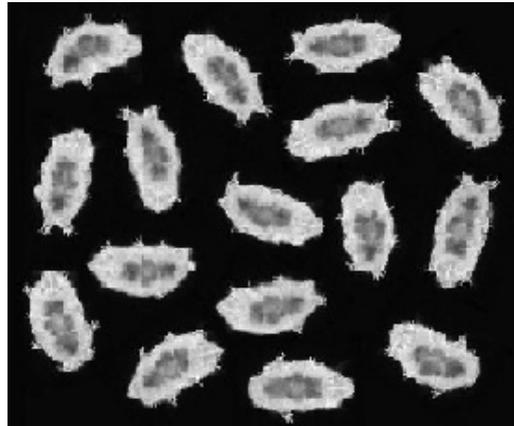


Figura 4. Imagen en Gris

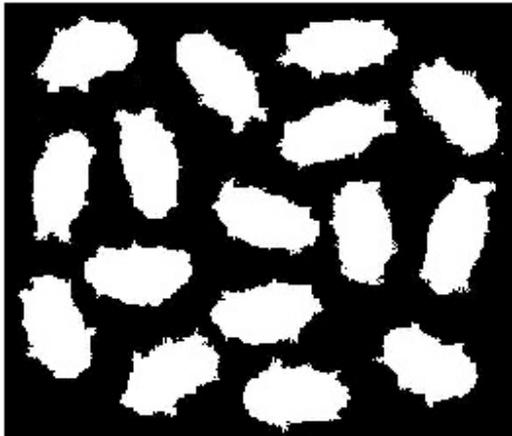


Figura 5. Umbral global por el método de Yen a partir de imagen en escala de grises

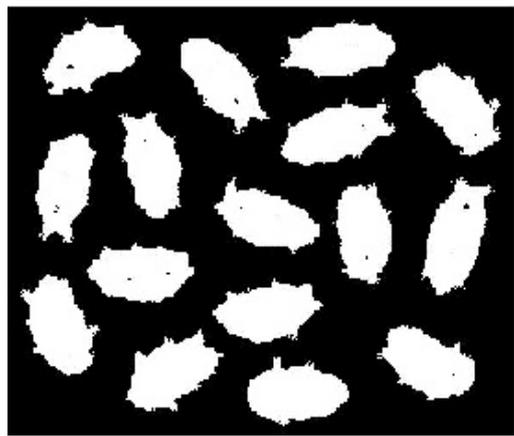


Figura 6. Umbral global por el método de Pun a partir de imagen en escala de grises

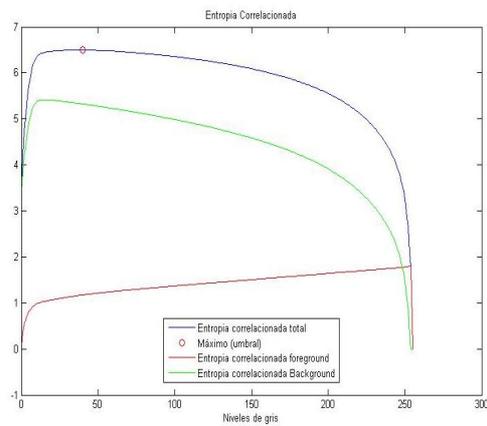


Figura 7. Curva de Entropías de Yen

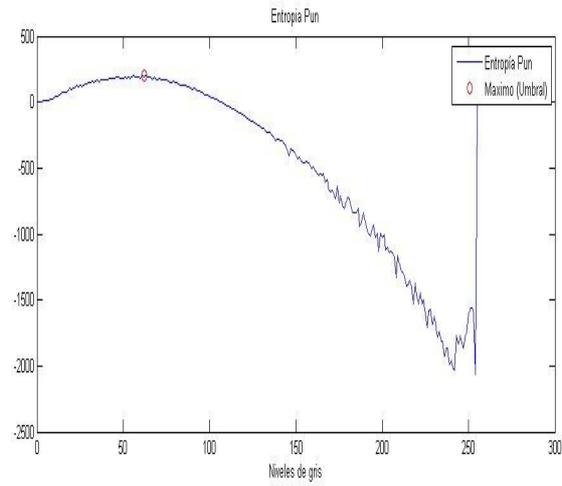


Figura 8. Curva de Pun



Figura 9. Umbral global por el método de Kapur a partir de imagen en escala de grises



Figura 10. Umbral global por el método de Kittler a partir de imagen en escala de grises

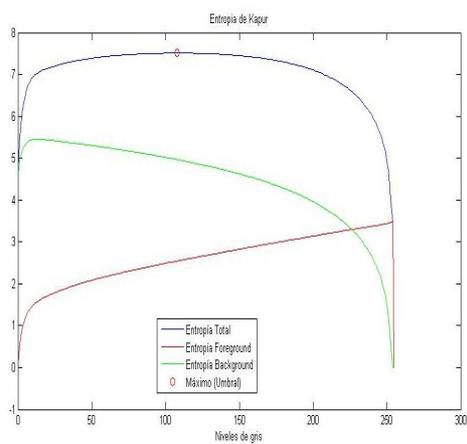


Figura 11. Curva de Entropías de Kapur

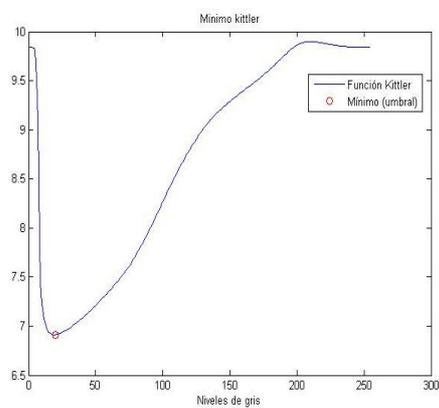


Figura 12. Función de Kittler

Método	Umbral global (grises)
Yen	21
Pun	74
Kapur	132
Kittler	20

Tabla 1.

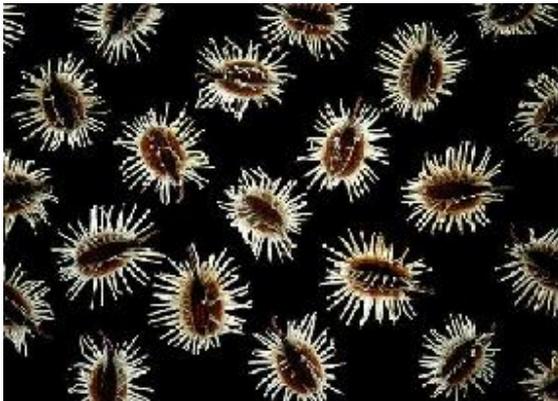


Figura 13. Imagen en RGB

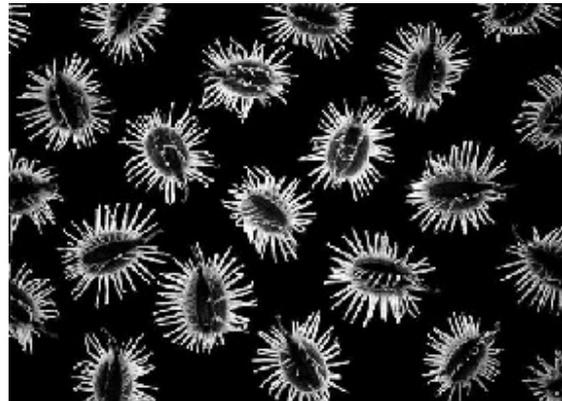


Figura 14. Imagen en gris

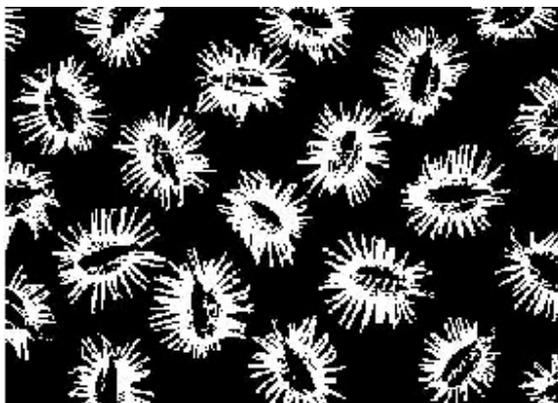


Figura 15. Umbral global por el método de Yen a partir de imagen en escala de grises

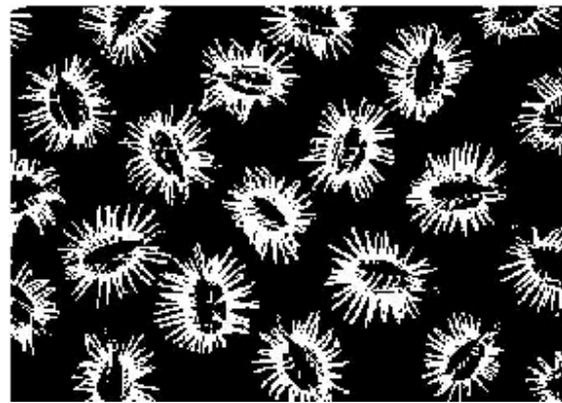


Figura 16. Umbral global por el método de Pun a partir de imagen en escala de grises

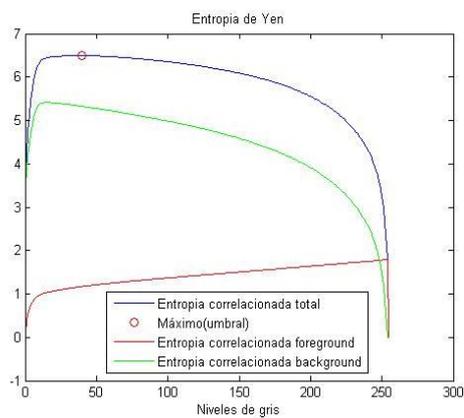


Figura 17. Curva de Entropías correlacionada de Yen

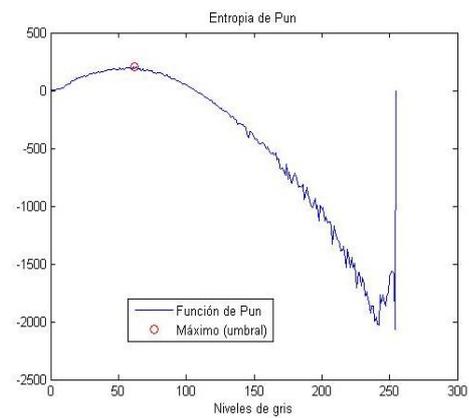


Figura 18. Función de Pun

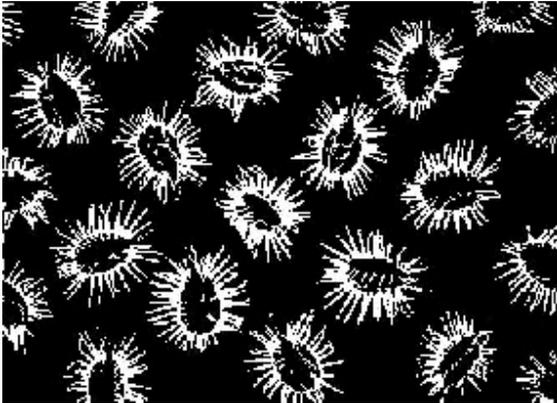


Figura 19. Umbral global por el método de Kapur a partir de imagen en escala de grises

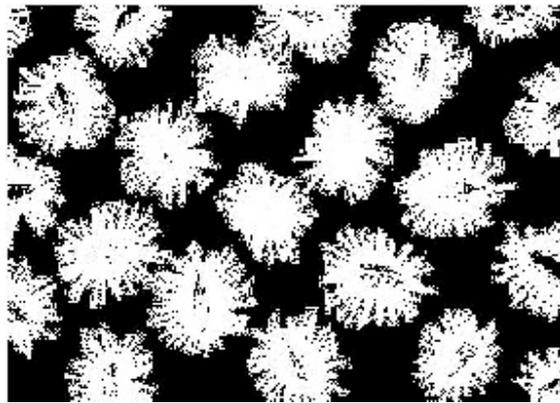


Figura 20. Umbral global por el método de Kittler a partir de imagen en escala de grises

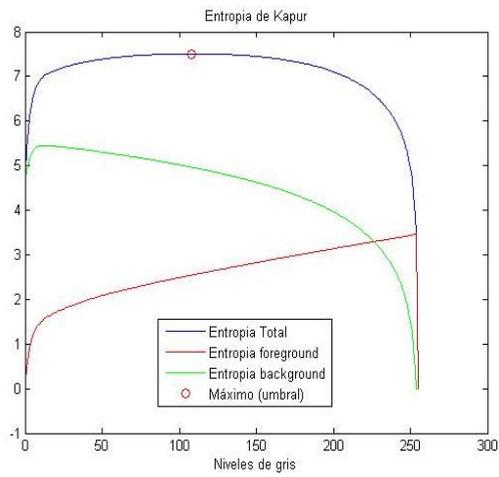


Figura 21. Curva de Entropías de Kapur

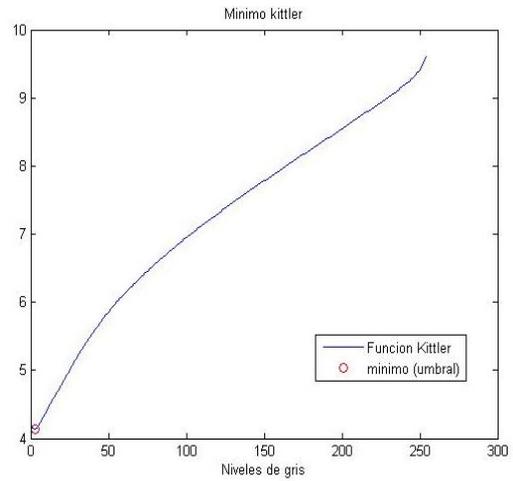


Figura 22. Función de Kittler

Método	Umbral global (grises)
Yen	40
Pun	62
Kapur	108
Kittler	2

Tabla 2



Figura 23. Leopardo



Figura 24. Imagen en escala de grises



Figura 25. Umbral global por el método de Yen a partir de imagen en escala de grises



Figura 26. Umbral global por el método de Pun a partir de imagen en escala de grises

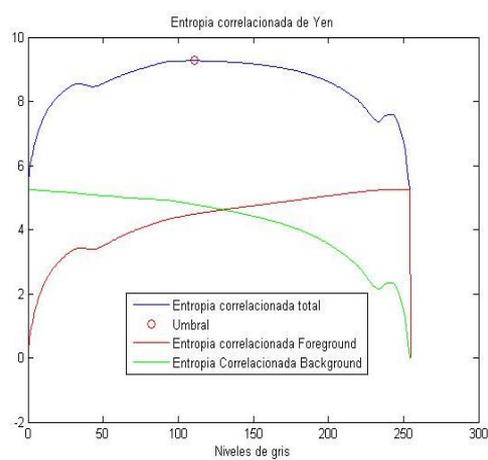


Figura 27. Curva de Entropías correlacionadas de Yen

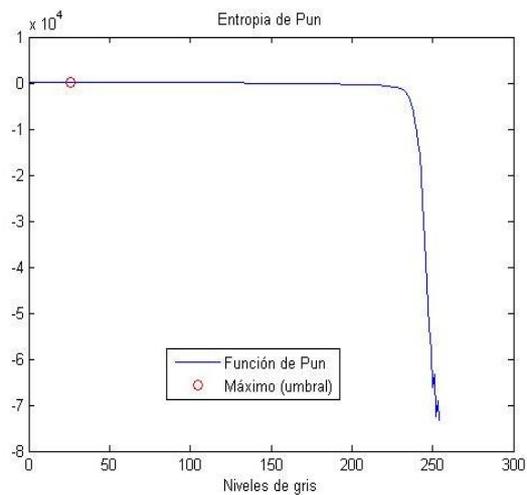


Figura 28. Función entropía de Pun



Figura 29. Umbral global por el método de Kapur a partir de imagen en escala de grises



Figura 30. Umbral global por el método de Kittler a partir de imagen en escala de grises

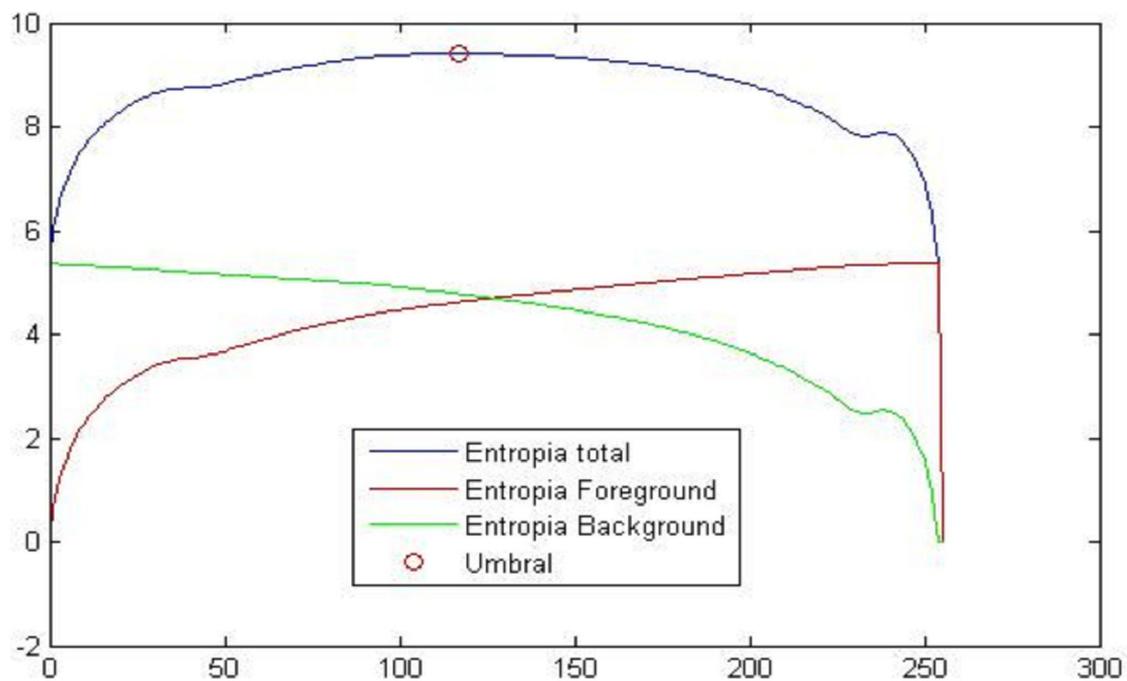


Figura 31. Entropías

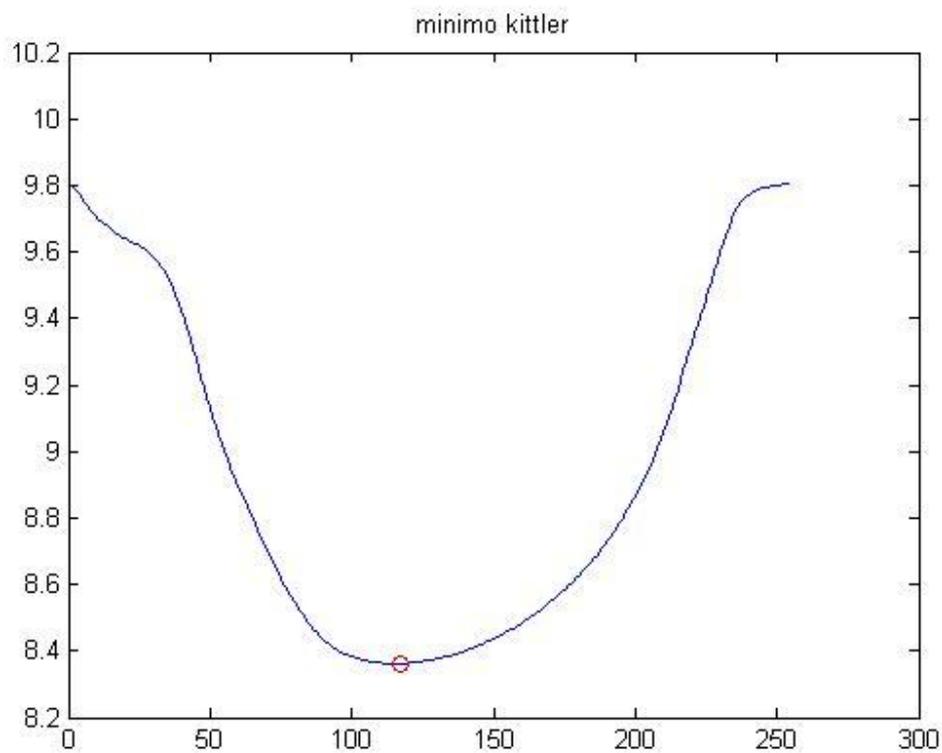


Figura 32. Función de Kittler

Método	Umbral global (grises)
Yen	111
Pun	26
Kapur	117
Kittler	117

Tabla 3

Como segunda medida, se trabajó con umbrales globales, pero esta vez, aplicados a cada capa de color, con lo cual se observó una marcada diferencia entre los umbralizados de las distintas capas, optimizándose una de las capas dependiendo de la composición de colores de cada imagen en particular



Figura 33. Umbralizado global – Método de Yen – Rojo



Figura 34. Umbralizado global – Método de Pun – Rojo



Figura 35. Umbralizado global – Método de Yen – Verde



Figura 36. Umbralizado global – Método de Pun – Verde



Figura 37. Umbralizado global – Método de Yen – Azul



Figura 38. Umbralizado global – Método de Pun – Azul

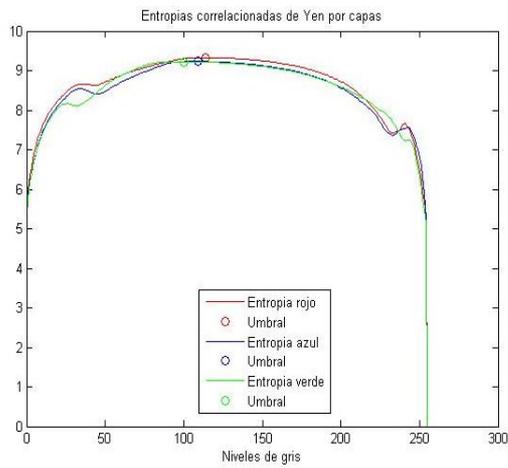


Figura 39. Curvas de Entropías por capas Yen

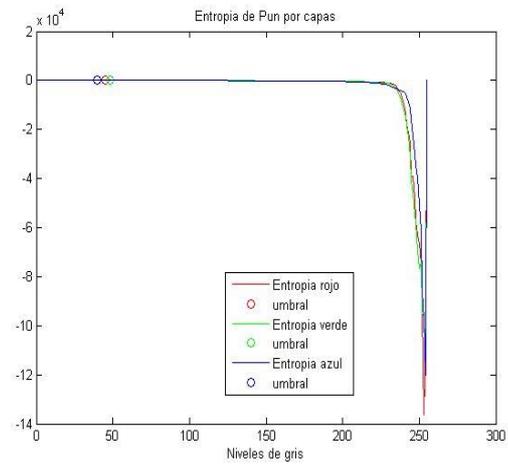


Figura 40. Curvas de Entropías por capas Pun



Figura 41. Umbralizado global – Método de Kapur– Rojo

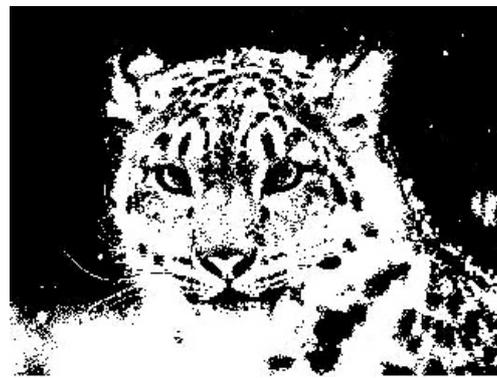


Figura 42. Umbralizado global – Método de Kittler – Rojo

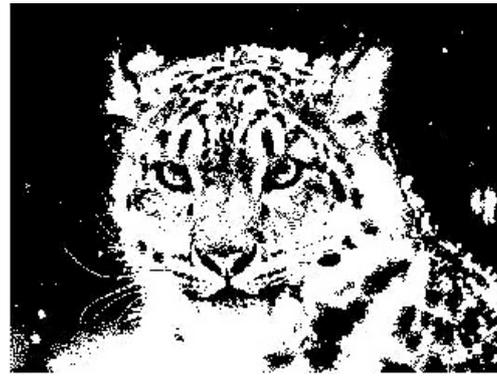
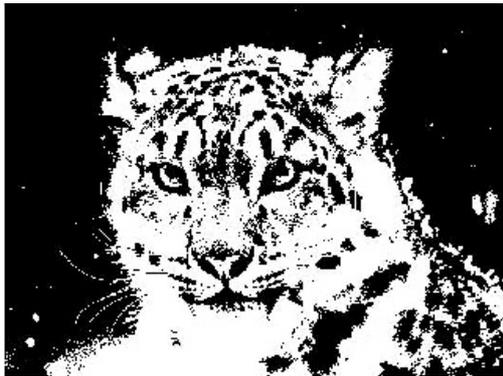


Figura 43. Umbralizado global – Método de Kapur – Verde Figura 44. Umbralizado global – Método de Kittler– Verde

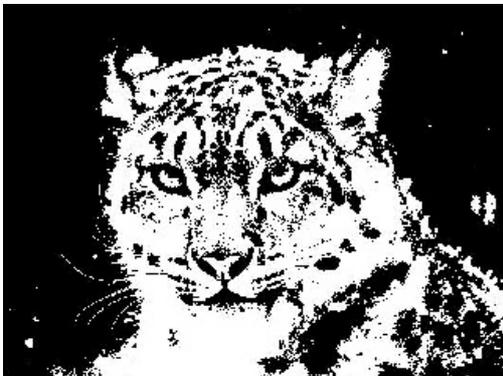


Figura 45. Umbralizado global – Método de Kapur – Azul Figura 46. Umbralizado global – Método de Kittler– Azul

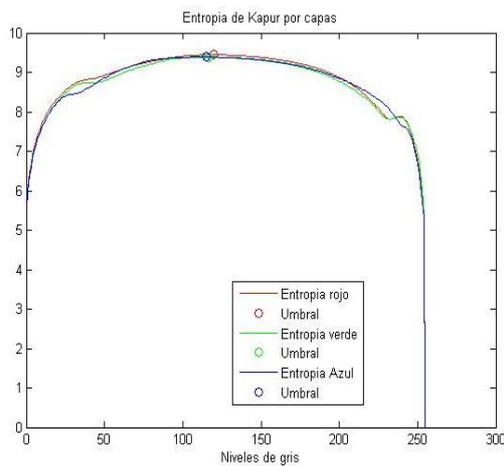


Figura 47. Curvas de Entropías por capas Kapur

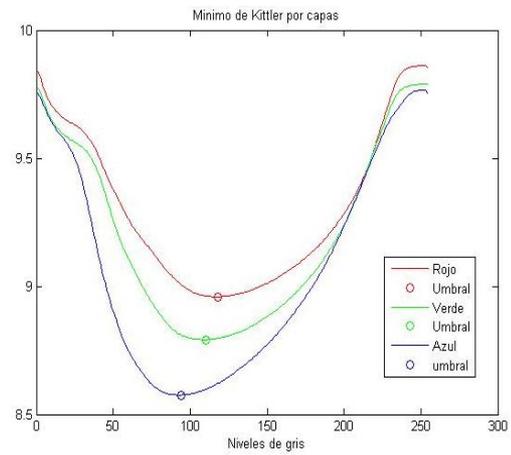


Figura 48. Curva de funciones Kittler por capas

Método	Umbrales globales		
	Rojo	Verde	Azul
Yen	114	109	100
Pun	45	48	40
Kapur	120	116	115
Kittler	118	110	94

Tabla 4

5 CONCLUSIONES

En imágenes con pocos detalles como la [figura 3](#) todos los métodos se comportan de manera similar en el umbralizado global en escala de grises, quizás con alguna preferencia en los métodos de Yen y Kittler ([figura 5](#) y [figura 10](#)) ya que en ellos hay una mejor separación de los objetos del fondo y los valores de umbral son cercanos entre ellos.

En imágenes con un nivel medio de detalles como la [figura 13](#) los métodos basados de Yen, Kapur y Pun definen umbralizaciones similares, a diferencia de Kittler que umbraliza en forma correcta pero muestra zonas difusas o borrosas.

En la tercera imagen [figura 23](#) que corresponde a una imagen con mucho detalle, observamos que Kittler, Yen y Kapur se comportan de manera equivalente definiendo umbrales cercanos y umbralizando la imagen de forma óptima remarcando detalles finos. Pun calcula un umbral bastante chico en comparación con los otros métodos y muestra una umbralización que tiene al blanco donde se desdibuja la figura del leopardo ([figura 26](#)).

Para las tres imágenes analizadas, los resultados de la aplicación de métodos en cada capa de color rojo, verde y azul se presentan en forma similar. Sin embargo, las umbralizaciones realizadas en escala de grises tienen una mejor definición que por capas.

Dados los diferentes análisis en distintas imágenes a escala de grises y por capas de colores podemos concluir que tanto los métodos de Yen y Kittler parecen sobresalir o se adaptan a cualquier tipo de umbralizado de imágenes, siendo mucho más seguro el algoritmo de Yen, ya que brinda umbralizaciones parejas en todos los casos analizados.

REFERENCIAS

- H. Azhar, T. Widjanarko. Comparison of Two Binary Image Thresholding Methods Final Project Paper EECE 6235 *Random Signal Analysis* Fall 2002 EECE Department, University of Memphis, Memphis, TN 38152
- C. Cattaneo, L. Larcher, A. Ruggeri, A. C. Herrera, E. Biasoni, M. Escañuelas. Segmentación de imágenes digitales mediante umbralizado adaptativo en imágenes de color. *Mecánica Computacional XXIX*, 6177-6193, 2010
- J. N. Kapur, P. K. Sahoo, and A. K. Wong, "A new method for greylevel picture thresholding using the entropy of the histogram," *Comput.Vis. Graph. Image Process.*, vol. 29, pp. 273–285, 1985.
- J. Kittler, J. Illingwortj. Minimum error thresholding. *Pattern recognition* 19(1). 41-47, 1986.
- N. Nacereddine, L. Hamami, M. Tridi, and N. Oucief. Non-Parametric Histogram Based Thresholding Methods for Weld Defect Detection in Radiography. *World Academy of Science, Engineering and Technology* 9, 2005

- T. Pun, "A new method for gray-level picture threshold using the entropy of the histogram," *Signal Process.* 2(3), 223–237, 1980.
- T. Pun, "Entropic thresholding: A new approach," *Comput. Graph. Image Process.* 16, 210–239, 1981.
- M. Sezgin, B. Sankur. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation. *Journal of Electronic Imaging* 13(1), 146–165, 2004.
- J. Yen, F. Chang, and S. Chang. A New Criterion for Automatic Multilevel Thresholding. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(3), 1995