

SOBRE LA UTILIZACIÓN DEL MÉTODO DE LAS IMPEDANCIAS PARA EL CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN Y LAS AUTOFRECUENCIAS DE SISTEMAS FINITOS CUÁNTICOS, ÓPTICOS Y ACÚSTICOS

Bernardo J. Gómez^{a,b}, Carlos E. Repetto^{a,b}, Carlos R. Stía^{a,b} and Reinaldo J. Welti^a

^a*Laboratorio de Vibraciones y Ondas (FCEIA-UNR), Pellegrini 250, S2000BTP Rosario,
<http://www.fceia.unr.edu.ar/>*

^b*Instituto de Física de Rosario (CONICET-UNR), 27 de Febrero 210 bis, S2000EZP Rosario
<http://www.ifir-conicet.gov.ar/>*

Keywords: General theory of continuum mechanics of solids Vibrations of strings, rods, and beams Experimental and theoretical studies of vibrating system

Abstract. En este trabajo se presenta un método simple para calcular el coeficiente de transmisión de ondas mecánicas, electromagnéticas y cuánticas a través de un medio estratificado o con una sucesión de barreras de potencial de extensión finita. Este método está basado en el concepto de impedancia de la onda análoga a la teoría de las líneas de transmisión eléctrica. Para implementarlo se debe generalizar el concepto de impedancia de las líneas de transmisión eléctricas a diferentes sistemas clásicos y cuánticos. En la propagación de ondas mecánicas y acústicas a través de sistemas periódicos de dimensión finita se observa la existencia de bandas de frecuencias (bandgap) en las que no hay transmisión. En los sistemas cuánticos estas bandas en las que no hay transmisión están relacionadas con las autofrecuencias de un sistema finito que tiene la misma periodicidad. Haciendo una analogía apropiada con estos sistemas cuánticos es posible encontrar esta misma relación en sistemas mecánicos y acústicos. En sistemas acústicos y mecánicos periódicos de dimensión finita es relativamente simple hacer una comparación directa con la experiencia. Tanto a través del cálculo numérico como a través de los resultados experimentales se pueden contestar estas preguntas: ¿Cómo debe ser la estructura para producir un “bandgap” más grande? ¿Cómo se pueden determinar el valor mínimo y el máximo del intervalo de frecuencia en la que no hay transmisión? ¿Cuántas celdas debe tener la estructura para producir una determinada atenuación?

1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha tomado mucha importancia el estudio de la propagación de ondas en un medio periódico, en donde se encuentra que las frecuencias permitidas caen en “bandas” continuas separadas por “gaps” prohibidos. La estructura de bandas es prácticamente la firma de la física del estado sólido, pero el mismo fenómeno tiene lugar, en principio, para ondas mecánicas, acústicas, electromagnéticas y hasta en ondas en el agua. Un cristal macroscópico ordinario donde se tiene del orden de 10^7 capas atómicas puede considerarse para todos los propósitos, como verdaderamente periódico, sin embargo, en una cuerda cargada o en un tubo corrugado se tendrá un número N relativamente pequeño de elementos que se repiten. Siguiendo a Dowling (1992) llamaremos a estos sistemas “localmente periódicos”. En estas estructuras se encuentran, sin embargo, aún para valores de N relativamente pequeños indicios de la estructura de bandas característica de un sistema totalmente periódico. La resolución analítica de los sistemas localmente periódicos es más difícil porque el teorema de Bloch no es aplicable en estos casos. Sin embargo, el caso localmente periódico puede resolverse analíticamente para un N arbitrario. Esto fue descubierto en el caso óptico por Abeles (1950) y fue redescubierto en el contexto de la mecánica cuántica por Cvetič y Picman (1814). Dowling (1992) ha desarrollado un tratamiento unificado y accesible de la teoría de ondas localmente periódicas en varias ramas de la física utilizando la matriz de transferencia. En este trabajo vamos a utilizar el método desarrollado en la teoría de líneas de transmisión eléctrica (LTE) para estudiar la propagación de ondas acústicas, mecánicas y cuánticas, en situaciones en las que las propiedades del medio o las barreras de potencial varían de a saltos. Este método es utilizado desde hace mucho tiempo en acústica para analizar la propagación de ondas en tubos (Kushwaha et al., 1993; Ye and Hoskinson, 2000) y más recientemente en mecánica cuántica para calcular coeficientes de transmisión a través de una o varias barreras de potencial (Khondker et al., 1988; Chang and Kou, 1999). A pesar de ser equivalente al método de la matriz de transferencia utilizado por Dowling (1992) tiene la ventaja de que la LTE es más simple para calcular numéricamente el coeficiente de reflexión a través de una estructura cuasi-periódica abierta o las frecuencias naturales de una estructura cuasi-periódica cerrada. En la sección 2 mostramos la utilización del método de las impedancias para el cálculo de transmisión a través de un tubo de sección modulada. Se aprovecha este ejemplo para introducir la filosofía del método de las impedancias. En la sección 3 vamos a dar ejemplo sobre el cálculo de las frecuencias de los modos de oscilación en una cuerda cargada con masas puntuales, de longitud finita fija en sus dos extremos. En la sección 4 vamos a mostrar como este método puede extenderse a problemas cuánticos.

2 EL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN DE UN TUBO DE SECCIÓN MODULADA

En una guía de onda acústica de longitud “infinita”, de sección circular de radio a con una impedancia acústica Z_a se inserta, como se muestra en la Fig. 1, un tubo de longitud finita, también de sección circular, pero cuyo diámetro varía por tramos. A este tubo finito lo llamaremos en adelante “filtro”. La impedancia acústica por definición es $Z = \rho c/S$, donde ρ es la densidad del aire, c la velocidad del sonido y S la sección del tubo. Cada uno de los tramos que componen el filtro está caracterizado por su sección S_i y longitud l_i .

Se puede mostrar que la impedancia de entrada Z_{en}^i de la sección i -ésima puede expresarse en función de las impedancias Z_{en}^{i-1} de los $i - 1$ tramos anteriores como:

$$Z_{en}^i = Z_i \frac{Z_{en}^{i-1} + jZ_i \tan(k_i l_i)}{Z_i + Z_{en}^{i-1} j \tan(k_i l_i)} \quad (1)$$

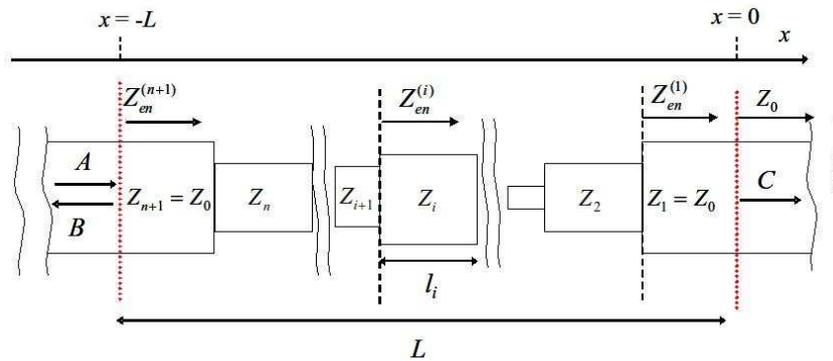


Figure 1: El filtro que se extiende desde $x = -L$ hasta $x = 0$ está compuesto de tramos de longitud l_i y sección S_i .

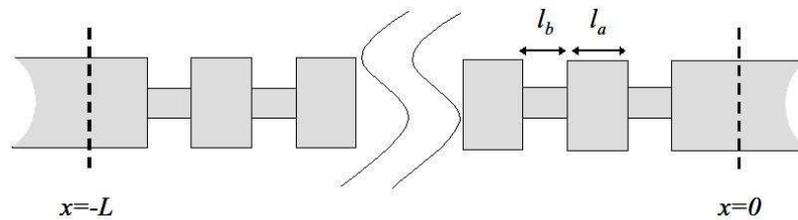


Figure 2: Filtro modulado periódicamente donde se alternan tramos de sección S_a y longitud l_a con tramos de sección S_b y longitud l_b .

donde Z_i es la impedancia acústica del tramo i , es la impedancia de entrada del tramo $(i - 1)$ -ésimo, k_i es el número de onda del tramo i y l_i es su longitud. En el tramo 0 la función impedancia coincide con la impedancia acústica del tubo en la cual se inserta el filtro. Por lo tanto, la impedancia de entrada del tramo 0 es $Z_{en}^0 = Z_a$.

La onda armónica incidente, de frecuencia ω y de amplitud A que se propaga de izquierda a derecha, en el tubo de impedancia Z_a , se encuentra en $x = -L$ con la impedancia equivalente que se calcula mediante la ecuación (1), donde se refleja con una amplitud B y se transmite con una amplitud C en el tubo semiinfinito que se extiende a partir de $x = 0$. Si I_i , I_r e I_t son las intensidades de las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente, se puede mostrar que (French, 1982):

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left\| \frac{B}{A} \right\|^2 = \frac{(Z_a - Z_{en}^{(n)})^2}{(Z_a + Z_{en}^{(n)})^2},$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \left\| \frac{C}{A} \right\|^2 = \frac{(4Z_a Z_{en}^{(n)})^2}{(Z_a + Z_{en}^{(n)})^2} = 1 - R$$
(2)

donde R y T son los coeficientes de reflexión y transmisión, respectivamente. El cálculo numérico de la impedancia de entrada Z_{en}^n en función de la frecuencia, aún cuando el número de tramos sea grande se calcula sin dificultad mediante la aplicación repetida de la ecuación (1).

En lo que sigue, analizamos el caso particular de un sistema compuesto por una sucesión alternadas de tubos de sección S_a (igual a la de los tubos principales) y longitud l_a , y tubos de sección S_b y longitud l_b que denominaremos de aquí en adelante “contracciones”. Este sistema se muestra en la Fig. 2. frecuencia por $c/2l_a$. En las figuras 4(a) y 4(b) se muestra el coeficiente de transmisión T en función de la frecuencia en unidades de $c/2l_a$, la frecuencia fundamental de un tubo abierto de longitud l_a , para los casos de 6 y 26 contracciones, respectivamente. Se

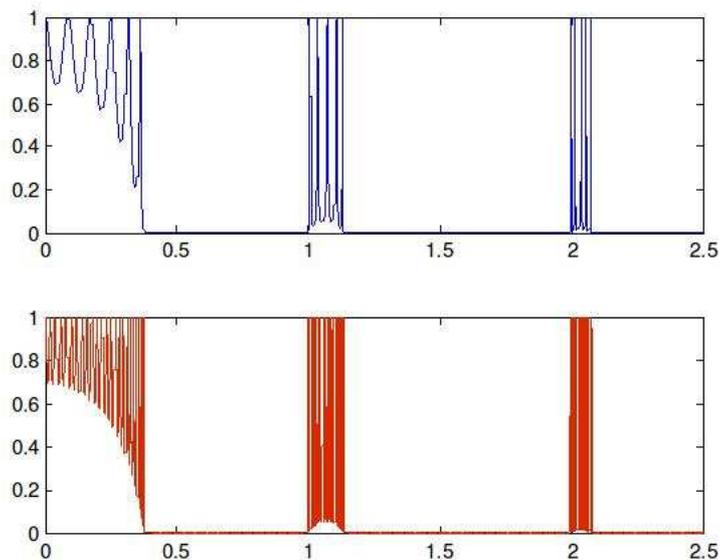


Figure 3: El coeficiente de transmisión T para un sistema cuyas dimensiones son: $l_a = 0.1m$, $l_b = 0.01m$, $S_a = 7.88 \times 10^{-3}m^2$, $S_b = 0.314 \times 10^{-3}m^2$, en función de $f/(c/2l_a)$. (a) Panel superior: Sistema con 6 contracciones. (b) Panel inferior: Sistema con 26 contracciones.

puede mostrar que el sistema con 6 contracciones presenta atenuaciones de hasta 26 dB en la banda de frecuencias normalizadas que se extiende desde 0.36 a 1 (600 Hz a 1700 Hz), y hasta 48 dB en el sistema de 26 contracciones, en la misma banda de frecuencias. En la banda que va de 2500 Hz hasta 4000 Hz se puede mostrar una atenuación similar.

3 CUERDA CON MASAS CONCENTRADAS CONECTADAS A OSCILADORES

La propagación de ondas a lo largo de una cuerda con masa distribuida sobre la cual se distribuyen masas concentradas igualmente espaciadas ha sido muy estudiada tanto analítica como numéricamente en los últimos años. En esta sección vamos a mostrar como se puede analizar a estas cuerdas cargadas acopladas a osciladores utilizando el método de las impedancias, y contrastaremos los resultados numéricos obtenidos con resultados analíticos o numéricos que se obtienen con otros métodos. Vamos a analizar la transmisión de ondas longitudinales a lo largo de una cuerda de longitud infinita que en un cierto tramo tiene N cuentas fijas de masa M espaciadas por una distancia d , como se muestra en la figura 4. Vamos a suponer además que cada una de las cuentas está conectada con un oscilador. Suponemos en este trabajo que el oscilador es un péndulo, pero los resultados son válidos para cualquier otro tipo de oscilador.

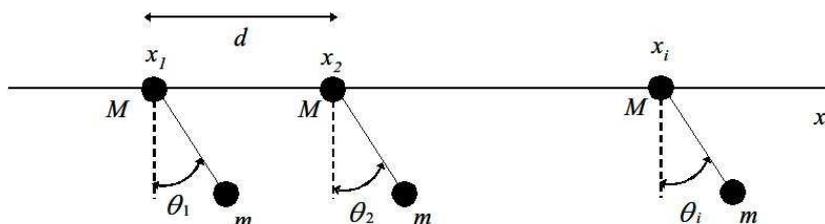


Figure 4: Cuerda con masas concentradas acopladas a osciladores.

Si designamos con Φ_i y Φ_{i+1} a las funciones de ondas a la izquierda y a la derecha del punto

x_i respectivamente, las condiciones de borde en este punto son:

- Continuidad del desplazamiento de la cuerda:

$$\Phi_{i+1}(x_i, t) = \Phi_i(x_i, t) \quad (3)$$

- La ecuación de Newton para la masa concentrada M que se encuentra en x_i :

$$T \frac{\partial \Phi_{i+1}(x_i, t)}{\partial x} - T \frac{\partial \Phi_i(x_i, t)}{\partial x} + mg\theta_i = M \frac{d^2 \Phi_i(x_i, t)}{dt^2} \quad (4)$$

La ecuación de movimiento para el péndulo es:

$$ml\ddot{\theta}_i = -mg\theta_i - m\ddot{\Phi}_i(x_i, t) \quad (5)$$

De donde

$$\theta_i = \frac{\omega^2}{(-\omega^2 + \omega_0^2)} \frac{\Phi_i(x_i, t)}{l} \quad (6)$$

con $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Reemplazando en 4

$$T \frac{\partial \Phi_{i+1}(x_i, t)}{\partial x} - T \frac{\partial \Phi_i(x_i, t)}{\partial x} = - \left(\frac{m\omega^2\omega_0^2}{(-\omega^2 + \omega_0^2)} + M\omega^2 \right) \Phi_i(x_i, t) \quad (7)$$

Recordemos que la impedancia de la cuerda por definición viene dada por French (1982)

$$Z = -T \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{v} \quad (8)$$

donde

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = j\omega\Phi \quad (9)$$

Luego, a partir de la ecuación (7), se encuentra que en el punto x_i la impedancia pega un salto cuando pasamos de la derecha a la izquierda a través del punto $x = x_i$, que viene dado por:

$$Z_i - Z_{i+1} = j \left(\frac{m\omega_0^2}{(-\omega^2 + \omega_0^2)} \omega + M\omega \right) \quad (10)$$

3.1 Cuerda con una masa concentrada acoplada con un oscilador

Aplicamos el método de las impedancias descripto anteriormente al problema que se ilustra en la Fig. 5. La cuerda está fija en los extremos $x = 0$ y $x = -L$, en su punto medio está insertada una masa concentrada M de la cual se suspende un péndulo de longitud l y masa m . Mediante la ecuación 1 podemos calcular la impedancia de entrada en el punto $x = -L/2 + \epsilon$:

$$Z(x = -L/2 + \epsilon) = Z_c \frac{Z(x = 0) + jZ_c \tan(kL/2)}{Z_c + jZ(x = 0) \tan(kL/2)} \quad (11)$$

En nuestro caso la cuerda está fija en $x = 0$, por lo tanto $Z(x = 0) \rightarrow \infty$ y la ecuación (11) se reduce a

$$Z(x = -L/2 + \epsilon) = \frac{-jZ_c}{\tan(kL/2)} \quad (12)$$

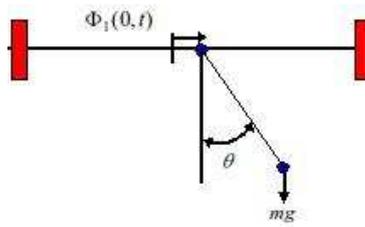


Figure 5: Celda unitaria del caso anterior.

Debido a la presencia de la masa concentrada y el péndulo en $x = -L/2$, la función impedancia presenta una discontinuidad en ese punto dada por (10):

$$Z(x = -L/2 - \epsilon) - Z(x = -L/2 + \epsilon) = j \frac{m\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)}\omega + M\omega \quad (13)$$

Finalmente en $x = -L$ tenemos,

$$Z(x = -L) = Z_c \frac{Z(x = -L/2 - \epsilon) + jZ_c \tan(kL/2)}{Z_c + jZ(x = -L/2 + \epsilon) \tan(kL/2)} \quad (14)$$

Como el punto $x = -L$ está fijo la condición de borde impone que $Z(x = -L) \rightarrow \infty$: las frecuencias para las cuales se satisface esta condición son las autofrecuencias del problema. A continuación se presentan los resultados de dos casos particulares, uno para la condición en que $M = 0$ y el otro en el que $m = 0$.

3.1.1 Sin masa concentrada ($M = 0$)

En la figura 6 se muestra la gráfica de la función Z en función de la frecuencia. De acuerdo al método de las impedancias, las autofrecuencias del problema son aquellas que hacen que el módulo de la impedancia de entrada sea infinito o muy grande.

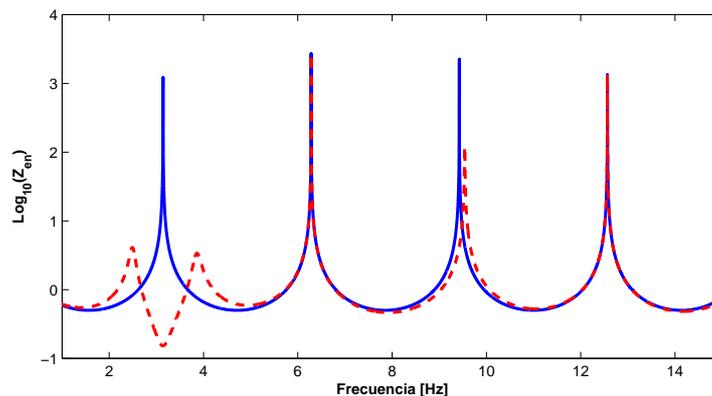


Figure 6: Función impedancia de entrada en función de la frecuencia. Línea continua: cuerda de longitud L fija en sus dos extremos. Línea discontinua: cuerda y oscilador acoplado. La frecuencia del oscilador es la misma que la frecuencia fundamental de la cuerda.

En línea continua (color azul) se representa la impedancia de entrada $Z_{en}(x = -L)$ correspondiente a una cuerda de longitud L fija en sus dos extremos. En línea de trazos (color rojo) se

muestra la impedancia de entrada para la misma cuerda pero ahora con un péndulo suspendido en su punto medio. La frecuencia del péndulo coincide con la frecuencia del primer modo de la cuerda. Se observa que la presencia del oscilador elimina al primer modo pero en su lugar aparecen dos modos adicionales cuyas frecuencias están a uno y otro lado de la frecuencia del modo eliminado. Este mismo fenómeno tiene lugar si la frecuencia del péndulo coincide con la frecuencia de cualquier otro modo. Por otro lado, el efecto del péndulo es nulo si se lo coloca en el nodo del modo que se quiere eliminar. La diferencia en frecuencia entre los dos nuevos modos con la frecuencia del modo eliminado depende del punto donde se inserta el péndulo y de los parámetros del sistema. Por otro lado, la amplitud de respuesta depende de la pérdida del péndulo: a mayor pérdida menor la amplitud. Existe una pérdida óptima para la reducción de la amplitud; superado este valor las amplitudes vuelven a crecer porque las oscilaciones del péndulo se acercan al régimen sobreamortiguado. En este caso el efecto del péndulo se anula.

3.1.2 Cuerda con una masa concentrada en su punto medio ($m = 0$)

En la Figura (7) se muestra la función impedancia de entrada $Z_{en}(x = -L)$ en función de la frecuencia (línea de trazos), para el caso particular de la cuerda de longitud L y una masa concentrada M en su punto medio. Se incluye también en línea continua la inversa de la relación de dispersión que se obtiene resolviendo analíticamente este problema (Gomez et al., 2007).

Las posiciones de los máximos o picos de esta función se corresponden con las autofrecuencias del sistema debido a que la relación de dispersión se anula para estos valores. De la figura es posible observar un buen acuerdo entre los métodos.

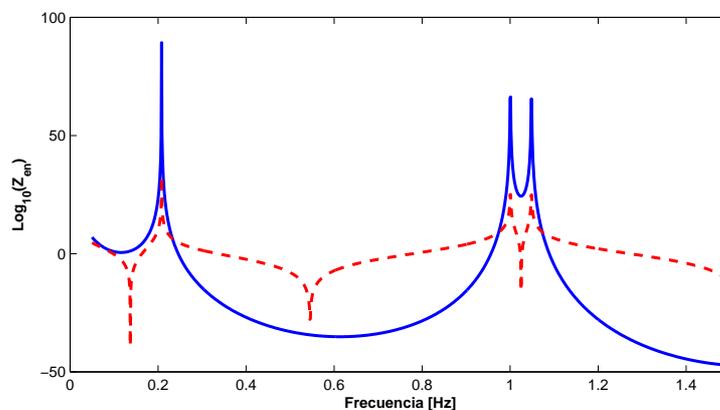


Figure 7: Cálculo numérico de las autofrecuencias: en color azul el que se obtiene con la relación de dispersión, y en rojo con el método de las impedancias.

3.2 Cadena lineal de N masas concentradas

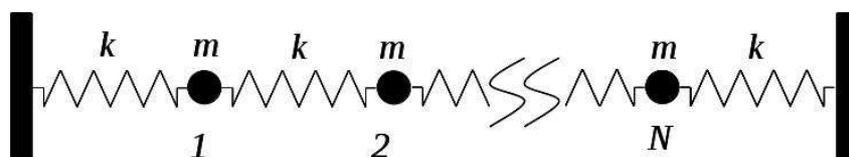


Figure 8: Esquema de la cadena lineal de N masas.

El método de las impedancias puede aplicarse para calcular las frecuencias normales de oscilación (longitudinal o transversal) de una cadena de N masas unidas por un resorte o una cuerda 8. Sabemos que si los resortes o si la cuerda no tienen masa, este sistema es utilizado para modelizar la relación de dispersión (fonones) de la red cristalina de una cadena monoatómica. Analíticamente, las N autofrecuencias de esta cadena de N átomos vienen dadas por la siguiente expresión:

$$f_n = 2f \sin \left[\frac{n\pi}{2(N+1)} \right], \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

donde

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (16)$$

es la frecuencia natural del sistema más simple de una masa unida a dos resortes (sin masa). Estas autofrecuencias pueden medirse en el laboratorio fácilmente, resultando una experiencia importante para los estudiantes de grado puesto que permite encontrar una relación de dispersión que no es la típica relación lineal entre w y k . Sin embargo, no es simple encontrar el efecto de la masa del resorte en la relación de dispersión. Precisamente, el método de las impedancias nos permite encontrar con relativa facilidad la incidencia de la masa de los resortes en los valores de las frecuencias.

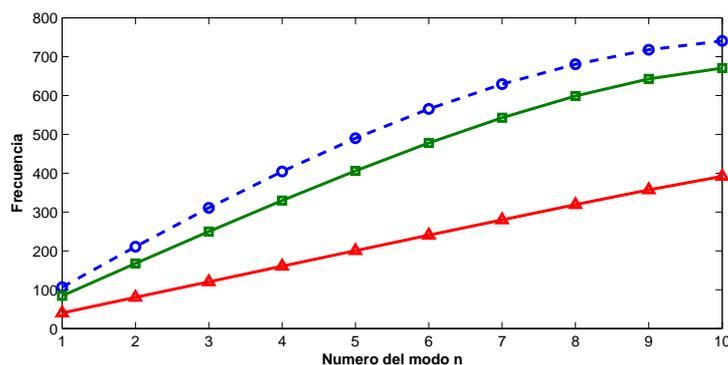


Figure 9: Frecuencia de resonancia vs. el número del modo para una cadena lineal de 10 masas.

En la Fig. 9 se muestran las frecuencias de resonancia vs el número del modo para el caso de una cadena lineal de 10 masas. Los resultados representados con círculos corresponden al caso de resortes sin masa dados por (15). Con cuadrados y triángulos se indican los valores de frecuencias para los casos de resortes cuyas densidades lineales de masa toman los valores de $5 \cdot 10^{-3}$ y $5 \cdot 10^{-2}$ Kg/m, respectivamente. En estos últimos casos, el sistema presenta infinitos grados de libertad, y por lo tanto además de los 10 modos de más baja frecuencia mostrados en fig. 9, aparecen infinitas autofrecuencias. Lo notable es que estas frecuencias se agrupan alrededor de las frecuencias $nc/2L$, con $n=1,2,3,\dots,k$ que coinciden con las frecuencias de la cuerda sin las masas concentradas. En estos casos las masas se encuentran en los nodos de estos modos y, por lo tanto, siguen siendo modos de la cuerda cargada con las N masas. En la fig. 10 se muestra el caso particular en el cual la densidad lineal de masa es de $5 \cdot 10^{-3}$ Kg/m. Puede apreciarse que el sistema tiene intervalos de frecuencias donde no hay modos (bandgap) mientras que los modos permitidos se distribuyen en intervalos de frecuencia que son cada vez más pequeños.

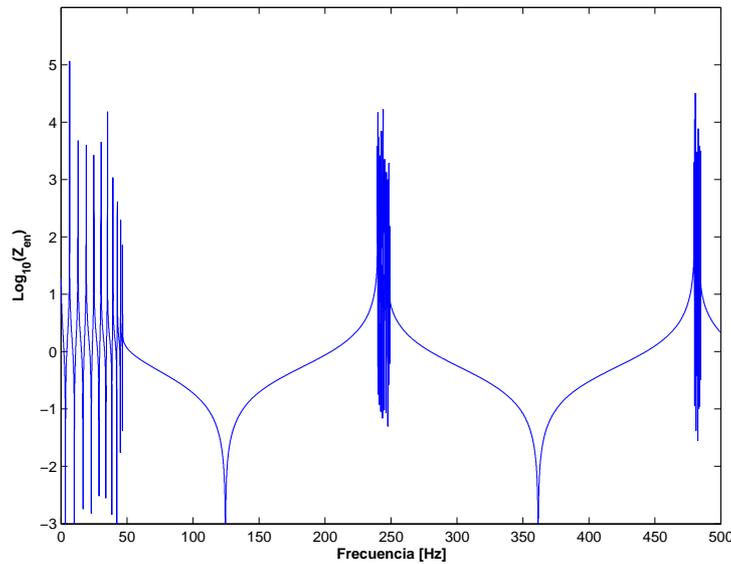


Figure 10: Estructura de bandas para una cadena lineal de 10 masas, considerando un valor no nulo de la masa de los resortes que las unen.

4 IMPEDANCIA CUÁNTICA

En esta sección resolvemos la ecuación de Schrödinger para calcular la probabilidad cuántica de transmisión a través de un potencial periódico que puede ser escrito como:

$$V(x) = \sum_{i=1}^N V_i \delta(x - x_i) \quad (17)$$

Este tipo de potencial podría ser utilizado para simular una cadena de átomos.

En (17), V_i es la magnitud del potencial y x_i es la localización de la i -ésima función delta y N es el número de funciones de delta de Dirac. La ecuación de Schrödinger en una dimensión puede escribirse de la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\Phi}{dx^2} + V(x)\Phi = E\Phi \quad (18)$$

En (18), $V(x)$ es el potencial periódico que viene dado por (17) y m^* es la masa efectiva del electrón que se puede considerar constante sobre el rango de interacción.

La función de onda Φ debe cumplir ciertas condiciones de borde. En primera instancia, Φ se debe mantener constante a uno y otro lado de la barrera. Esto es

$$\Phi(x_i - 0) = \Phi(x_i + 0) \quad (19)$$

La otra condición de borde se encuentra integrando (18) entre $x_i - 0$ y $x_i + 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \int_{x_i-0}^{x_i+0} \frac{d^2\Phi}{dx^2} dx = V_i \int_{x_i-0}^{x_i+0} \delta(x - x_i) \Phi(x) dx = V_i \Phi(x_i) \quad (20)$$

Esto es,

$$\frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x_i+0} - \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x_i-0} = \frac{2m^*}{\hbar^2} V_i \Phi(x_i) \quad (21)$$

Las ecuaciones (19) y (21) son las condiciones de borde en las discontinuidades. Vamos a definir a la función impedancia cuántica como

$$Z(x) = j \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dx} \quad (22)$$

Entonces la condición de borde (21) se escribe

$$Z(x_i + 0) - Z(x_i - 0) = j \frac{2m^*}{\hbar^2} V_i \quad (23)$$

La solución de la ecuación de Schrödinger en la región en la que la función potencial es cero es:

$$\Phi(x) = Ae^{-jkx} + Be^{jkx} \quad (24)$$

En esta ecuación

$$k = \frac{\sqrt{2m^*E}}{\hbar} \quad (25)$$

Para una onda que viaja de izquierda a derecha

$$\Phi^+(x) = Ae^{jkx} \quad (26)$$

La impedancia característica “cuántica” es

$$Z_c = j \frac{1}{\Phi^+} \frac{d\Phi^+}{dx} = k \quad (27)$$

En la fig. 11 se muestra el coeficiente de transmisión de un electrón a través de una serie de N potenciales delta (que simulan una red lineal de N iones), utilizando el método presentado en la sección 2, en función del número de onda k dado por (25). Se observa la existencia de bandas prohibidas debido a la interferencia destructiva de las ondas electrónicas.

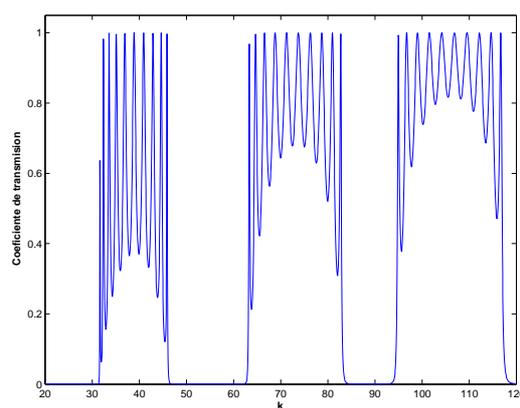


Figure 11: Coeficiente de transmisión de la función de onda de un electrón a través de una cadena lineal de 11 iones.

En la fig. 12 se muestra el cambio que sufre el coeficiente de transmisión debido a la ausencia de uno de los iones en la red (en nuestra simulación el sexto ión o la sexta delta está ausente). Estos resultados son de interés para el estudio de la conductancia electrónica a través de nanohilos.

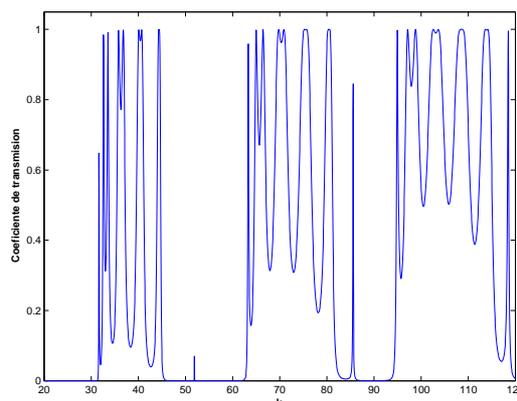


Figure 12: Coeficiente de transmisión del electrón a través de la cadena lineal anterior, donde está ausente uno de los iones.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan distintos ejemplos de aplicación de un método de resolución de problemas físicos basados en la generalización del concepto de impedancia, en analogía a la teoría de las líneas de transmisión eléctrica.

Focalizamos nuestro estudio en la propagación de ondas en un medio localmente periódico, en donde se encuentran que las frecuencias permitidas caen en “bandas” continuas separadas por “gaps” prohibidos. Adoptando adecuadas definiciones para este concepto, según el sistema estudiado, es entonces posible resolver un gran número de problemas físicos de ramas muy dispares, estableciendo adecuadas analogías.

Este método puede ser aplicado igualmente en sistemas no periódicos y aún con variaciones aleatorias.

Es importante destacar que el método es muy sencillo de implementar y a su vez es posible obtener información de sistemas, en principio muy complicados, de manera muy simple y natural.

BIBLIOGRAFÍA

- Chang C.C. and Kou C.S. Electron-wave quantum well energy band-pass filters. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 32:139–146, 1999.
- Dowling J.P. Sonic band structure in fluids with periodic density variations. *Journal Acoustic Soc. Am.*, 91(5):2539–2543, 1992.
- French A.P. *Vibration and Waves*. W.W. Norton & Company Inc., NY, 1982.
- Gomez B.J., Repetto C.E., Stia C.R., and R Welti R. Oscillations of a string with concentrated masses. *European Journal Physics*, 28:961–975, 2007. doi:doi:10.1088/0143-0807/28/5/019.
- Khondker A.N., Rezwan Khan M., and Anwar A.F.M. Transmission line analogy of resonance tunneling phenomena: the generalized impedance concept. *J. Appl. Phys.*, 63:5191–5193, 1988.
- Kushwaha M.S., Halevi P., Dobrzynski L., and Djafari-Rouhani B. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.*, 71(13):2022–2025, 1993.
- Ye Z. and Hoskinson E. Band gaps and localization in acoustic propagation in water with air cylinders. *Appl. Phys. Lett.*, 77(26):4428–4430, 2000.