

REOLOGÍA DEL HORMIGÓN - FLUENCIA BÁSICA, ESTADO DEL ARTE – PROPUESTA DE SIMULACIÓN NUMÉRICA

Edgardo Urtubey*, Ricardo Lorefice*

* Grupo de Mecánica Computacional – FCEyT – UNSE
4200, Santiago del Estero, Argentina (urtubey@unse.edu.ar)

Palabras clave: fluencia básica, fenómenos tiempo-dependientes, simulación numérica

Resumen. *El carácter reológico del hormigón implica la necesidad de analizar y evaluar las deformaciones diferidas que se producen en este material cuando está sometido a cargas de larga duración. Si bien los fenómenos reológicos (retracción y fluencia) se producen simultáneamente, se pueden estudiar por separado y en este trabajo solo se considera la fluencia básica (sin intercambio de humedad con el medio ambiente). Se presenta el estado del arte describiendo la evolución de los análisis sobre el tema empezando por la ponencia efectuada por el CEB-FIP en el Code Modele del año 1978, la actualización de esa ponencia que tuvo lugar en 1990 y se compara con trabajos mas recientes como el de Bazant y Baweja (Adam Neville Symposium) además de las prescripciones del ACI 209R-92/ 1997. Con base en la evidencia experimental disponible y en los resultados de modelos empíricos, se propone un modelo numérico-computacional para predecir fenómenos tiempo-dependientes tales como relajación de tensiones ante deformación sostenida y fluencia básica del hormigón considerando la Teoría Viscoplastica de Perzyna (1966) .*

1 INTRODUCCIÓN

Las deformaciones provocadas por una carga externa son:

- deformación instantánea, se produce inmediatamente después de aplicar la carga (comportamiento del hormigón como sólido verdadero)
- deformación lenta o fluencia, aumento de deformación en el tiempo bajo carga permanente (deformación diferida)

1.1 Deformación inmediata

Causada por una acomodación de los cristales que forman el material.

1.2 Deformación lenta o fluencia

En una pieza comprimida la acomodación de cristales provoca una compresión del agua capilar aumentando la evaporación. Si la carga permanece los meniscos se desplazan hacia capilares cada vez mas finos aumentando la tensión capilar y provocando la deformación lenta¹.

La fluencia lenta del hormigón depende principalmente de las condiciones higrométricas del ambiente, de las dimensiones de la pieza y de la composición del hormigón. Depende también del grado de endurecimiento del hormigón a la edad en que se aplican las cargas y de la magnitud y duración de las mismas².

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 CODE MODELE CEB-FIP 1978

El procedimiento propuesto por el Code Modele CEB-FIB 1978, es aplicable para tensiones que no superen el 50 % de la resistencia del hormigón. La deformación diferida para un instante t , originada por una tensión constante \mathbf{s}_b^* aplicada en el instante t_c está dada por:

$$\mathbf{e}_{b,k}(t) = \frac{\mathbf{s}_b^*}{E_b(28)} \mathbf{j}(t_c - t_h, t - t_c) \quad (1)$$

donde $E_b(28)$ es el módulo de elasticidad del hormigón a los 28 días y $\mathbf{j}(t_c - t_h, t - t_c)$ es el coeficiente de deformación diferida, que depende de la edad del hormigón al momento de aplicar la carga y del tiempo que permanece aplicada la carga.

$$\mathbf{j}(t_c - t_h, t - t_c) = \mathbf{b}_a(t_c - t_h) + \mathbf{j}_d \cdot \mathbf{b}_d(t - t_c) + \mathbf{j}_f [\mathbf{b}_f(t - t_h) - \mathbf{b}_f(t_c - t_h)] \quad (2)$$

$\mathbf{b}_a(t_c - t_h)$ función de plasticidad instantánea, que tiende a cero, dependiendo de la edad del hormigón al momento de aplicar la carga.

\mathbf{j}_d coeficiente de elasticidad diferida igual a 0,4.

$\mathbf{b}_d(t - t_h)$ función de elasticidad diferida, que varía entre 0 y 1, dependiendo de la duración de la carga.

\mathbf{j}_f coeficiente de plasticidad diferida: $\mathbf{j}_f = \mathbf{j}_{f1} \mathbf{j}_{f2}$ donde \mathbf{j}_{f1} depende del medio ambiente que rodea al hormigón; \mathbf{j}_{f2} depende del espesor efectivo

dw. A su vez, $dw = \mathbf{I} \cdot \frac{2 \cdot A_b}{u_b}$ donde \mathbf{I} es un coeficiente que depende del medio ambiente. A_b y u_b son sección transversal y perímetro del elemento.

\mathbf{b}_f función plasticidad diferida, varía entre 0 y 1 y depende de la edad del hormigón y del espesor efectivo.

Nótese que los sumandos primero y tercero de la ecuación de \mathbf{j} ($t_c - t_h$, t_c) están asociados a la deformación plástica o fluencia (irrecuperable), $\mathbf{e}_{b,f}$; el segundo sumando tiene que ver con la deformación elástica diferida (recuperable) $\mathbf{e}_{b,d}$ ³.

2.2 CODE MODELE CEB-FIP 1990⁴

2.2.1 Nomenclatura

- $\mathbf{f}(t, t_0)$ Coeficiente de fluencia, define la fluencia entre los tiempos t y t_0
- E_c Módulo de elasticidad a los 28 días (N/mm^2)
- $E_c(t_0)$ Módulo de elasticidad a la edad de carga (N/mm^2)
- $\mathbf{e}(t)$ Deformación total; instantánea mas fluencia y retracción (mm/mm)
- $\mathbf{e}_{cs}(t - t_s)$ Deformación por retracción entre los tiempos t y t_s (mm/mm)
- t Edad del hormigón después del colado (días)
- t_s Edad del hormigón al comienzo de la retracción (días)
- f_{cm} Resistencia principal a compresión del hormigón a los 28 días (N/mm^2)
- f_{ck} Resistencia característica a compresión del hormigón con 95 % de confianza (N/mm^2)
- t_0 Edad del hormigón al cargar (días)
- \mathbf{f}_0 Coeficiente de fluencia ideal
- $\mathbf{b}_c(t - t_0)$ Coeficiente que describe el desarrollo de la fluencia con el tiempo después de la carga
- \mathbf{f}_{RH} Factor que permite considerar la humedad relativa sobre el coeficiente de fluencia ideal (\mathbf{f}_0)
- $\mathbf{b}_c(f_{cm})$ Factor que permite considerar el efecto de la resistencia del hormigón sobre el coeficiente de fluencia ideal (\mathbf{f}_0)
- $\mathbf{b}_c(t_0)$ Factor que permite tener en cuenta el efecto de la edad al cargar sobre el coeficiente de fluencia (\mathbf{f}_0)
- RH Humedad relativa (%)
- Ac Sección del área transversal del miembro (mm^2)
- u Perímetro del miembro en contacto con la atmósfera (mm)
- ho = $2Ac/u$ Tamaño ficticio del miembro
- \mathbf{b}_H Coeficiente que permite considerar el efecto de la humedad relativa y del tamaño ficticio del miembro (ho) sobre la fluencia
- \mathbf{e}_{cso} Coeficiente de retracción ideal
- $\mathbf{b}_c(t - t_s)$ Ecuación que describe el desarrollo de la retracción con el tiempo
- $\mathbf{e}_c(f_{cm})$ Factor que permite considerar el efecto de la resistencia del hormigón sobre

la retracción

b_{RH} Coeficiente que permite considerar el efecto de la humedad relativa sobre el coeficiente de retracción ideal (e_{cso})

b_{sc} Coeficiente que depende del tipo de cemento

b_s Coeficiente que describe el desarrollo de la retracción con el tiempo

s Tensión aplicada (N/mm²)

a Coeficiente para el tipo de cemento

$t_{0,T}$ Edad ajustada a la temperatura del hormigón al cargar (días)

Δti Número de días a temperatura T

$T(\Delta ti)$ Temperatura durante el período Δti (° C)

n Número de intervalos de tiempo considerados

2.2.2 Ecuaciones del Código Modelo CEB 90

Deformación total

$$e(t) = e_{cs}(t - t_s) + \left[\frac{f(t, t_0)}{E_c} + \frac{1}{E_c(t_0)} \right] s \quad (3)$$

Resistencia principal del hormigón

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ N/mm}^2 \quad (4)$$

Módulo de elasticidad a la edad t

$$E_c = 10000 \sqrt[3]{f_{cm}} \quad (5)$$

$$E_c(t_0) = E_c e^{\left[\frac{s}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right) \right]} \quad (6)$$

Función conformidad fluencia

$$\text{Función conformidad } [m\epsilon / psi] = \frac{f(t, t_0)}{E_c} + \frac{1}{E_c(t_0)} \quad (7)$$

Con

$$f(t, t_0) = (f_0) * b_c(t - t_0) \quad (8)$$

$$f_0 = f_{RH} * b(f_{cm}) * b(t_0) \quad (9)$$

$$f_{RH} = 1 + \frac{(1 - \frac{RH}{100})}{0.1 * \sqrt[3]{h_0}} \quad (10)$$

$$b(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (11)$$

$$b(t_0) = \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,2})} \quad (12)$$

$$b_c(t-t_0) = \frac{(t-t_0)^{0,3}}{[b_H + (t-t_0)]^{0,3}} \quad (13)$$

$$b_H = 1,5 * [1 + (0,012 * RH)^{18}] (h_0) + 250 \leq 1500 \text{ días} \quad (14)$$

El efecto del tipo de cemento puede ser modificado por el coeficiente de fluencia modificando la edad de carga:

$$t_0 = t_{0,T} * \left[\frac{9}{2 + (t_{0,T})^{1,2}} + 1 \right]^a \geq 0,5 \text{ días} \quad (15)$$

$$t_{0,T} = \sum_{i=1}^n \Delta t_i * e^{-\left[\frac{4000}{273+T(\Delta_i)} - 13,65 \right]} \quad (16)$$

Tipos de cemento **a**

SL	- 1	(Endurecimiento lento)
N, R	0	(Endurecimiento Normal y Rápido)
RS	1	(Endurecimiento Rápido, Alta Resistencia)

2.3 Modelo Predictivo de Fluencia y Retracción para Análisis y Diseño

Estructuras de Hormigón: Modelo B3

S. P. Bazant y S. Baweja – Simposio Adam Neville “Creep and Shrinkage – Structural Design Effects”⁵

2.3.1 Introducción

Este informe presenta una alternativa mejorada del Capítulo 2 del ACI 209 que consiste en que los coeficientes de variación de error de predicción de las deformaciones por fluencia y por retracción son 23 % para fluencia (básica y con secado) y 34 % para la retracción para el modelo B3. Mientras que para el modelo del Capítulo 2 del ACI 209 son 58 % para fluencia, 45 % para fluencia y secado y 55 % para retracción. El usuario decidirá que precisión necesita según la sensibilidad de la estructura.

2.3.2 Rangos de los parámetros

La predicción de los parámetros materiales para el presente modelo, está restringida a hormigones de cemento portland con los siguientes rangos de parámetros:

Relación agua-cemento (w/c):	0,35	w/c	0,85
Relación agregado-cemento (a/c):	2,5	a/c	13,5
Valores de resistencia (fc):	17 MPa	fc	70 Mpa
Cont. de cemento por m3 de horm. (c):	160 kg/m ³	c	720 kg/m ³

Fórmulas válidas para hormigones curados al menos UN día. Si los parámetros del modelo son calibrados mediante ensayos, el presente modelo es aplicable a cualquier

hormigón de cemento portland incluyendo los hormigones livianos y los de alta resistencia.

2.3.3 Definiciones, conceptos básicos y repaso del procedimiento de cálculo

Condiciones de carga: las tensiones aplicadas deben ser de rango restringido; concretamente, $0,45 \bar{f}_c$ donde \bar{f}_c es la resistencia cilíndrica a compresión a 28 días

Deformaciones

Para una tensión constante \mathbf{s} aplicada a la edad t' :

$$\mathbf{e}(t) = J(t, t') \mathbf{s} + \mathbf{e}_{sh}(t) + \mathbf{a} \Delta T(t) \quad (17)$$

donde:

$J(t, t')$ es la función conformidad = deformación (fluencia + elasticidad) en el tiempo t causada por una tensión constante uniaxial unitaria aplicada a la edad t'

\mathbf{s} es la tensión uniaxial

\mathbf{e} es la deformación (tanto \mathbf{s} como \mathbf{e} son positivas si es tracción)

\mathbf{e}_{sh} es la retracción (negativa si el volumen disminuye)

$\Delta T(t)$ es el cambio de temp. desde la temperatura de referencia en el tiempo t

\mathbf{a} es el coeficiente de expansión térmica (que puede ser aproximadamente pronosticado de acuerdo a ACI 209)

La función de conformidad puede descomponerse del siguiente modo:

$$J(t, t') = q_1 + C_0(t, t') + C_d(t, t', t_0) \quad (18)$$

donde:

q_1 es la deformación instantánea debida a la tensión unitaria

$C_0(t, t')$ es la función conformidad para fluencia básica (fluencia con contenido de humedad constante y ningún cambio de humedad a través del material)

$C_d(t, t', t_0)$ función conformidad adicional debida a secado simultáneo

El coeficiente de fluencia $\mathbf{f}(t, t')$, que representa el camino mas conveniente para introducir la fluencia en un análisis estructural simple, puede calcularse como:

$$\mathbf{f}(t, t') = E(t') J(t, t') - 1 \quad (19)$$

donde $E(t')$ es el módulo estático de elasticidad a la edad de carga t' . Existen varias definiciones de E ; pero se puede usar cualquier estimación razonable. Por ejemplo el resultado del ensayo estándar de ASTM o el valor para una resistencia $\bar{f}_c(t')$ a la edad t' dado por la fórmula del ACI, válida si \bar{f}_c y E están en psi (si la unidad es MPa reemplazar 57.000 por 4.734:

$$E(t') = 57.000 (\bar{f}_c)^{1/2} \quad ; \quad E(t') = 4.734 (\bar{f}_c(t'))^{1/2}$$

La humedad relativa en los poros es inicialmente 100 %; si no hay intercambios de humedad, esa humedad va decreciendo. La exposición en ambientes secos origina retracción, como consecuencia de las reacciones químicas de la hidratación. La retracción es usualmente pequeña para hormigones normales (no para hormigones de alta resistencia) y puede despreciarse.

2.3.4 Fluencia básica (Propiedades constitutivas materiales)

La conformidad de fluencia básica se define mejor por su tasa temporal que por su valor:

$$\dot{C}_0(t, t') = \frac{n(q_2 t^{-m} + q_3)}{(t - t') + (t - t')^{1-n}} + \frac{q_4}{t} \quad m = 0,5, n = 0,1 \quad (20)$$

con $\dot{C}_0(t, t') = \partial C_0(t, t') / \partial t$, t y t' en días, m y n son parámetros empíricos cuyos valores son iguales para todos los hormigones normales (indicados arriba); q_2 , q_3 y q_4 son parámetros constitutivos empíricos que se definirán después. La conformidad de fluencia básica total se obtiene integrando la (1.6):

$$C_0(t, t') = q_2 Q(t, t') + q_3 \ln [1 + (t - t')^n] + q_4 \ln (t/t') \quad (21)$$

$Q(t, t')$ se da en Tabla 1.1 página 8) y puede calcularse en forma aproximada con la Ecuación (1.35) del Apéndice de este capítulo. La función $Q(t, t')$ por supuesto, puede obtenerse fácilmente mediante integración numérica (ver Sección 1.8.1 del Apéndice).

$$Q(t, t') = Q_f(t') \left[1 + \left(\frac{Q_f(t')}{Z(t, t')} \right)^{r t'} \right]^{-1/r(t')} \quad (22)$$

Los valores de la función $Q(t, t')$ para $m = 0,5$ y $n = 0,1$ están tabulados

En la Ecuación (1.7) los términos que contienen q_2 , q_3 y q_4 representan:

- aging viscoelastic compliance
- non-aging viscoelastic compliance
- flow compliance

respectivamente, como se dedujo de la teoría de solidificación.

2.4 ACI 209⁶ – Predicción de fluencia, retracción y efectos de temperatura en estructuras de hormigón

2.4.1 General

2.4.1.1 Alcances

Se presenta un método unificado para predecir efectos de cambios de humedad, cargas sostenidas y temperatura en estructuras de hormigón armado y pretensado.

La consideración de estructuras especiales (centrales nucleares, estructuras off shore, etc.) están fuera del alcance de este trabajo.

2.4.1.2 Naturaleza del problema

Factores tales como la naturaleza heterogénea del hormigón originada por las etapas de construcción, las historias de contenido de agua, temperatura y carga y sus efectos sobre la respuesta material dificultan la cuantificación del fenómeno.

2.4.1.3 Definiciones de términos

La separación en retracción y fluencia es convencional. En el hormigón, con o sin carga las deformaciones dependientes del tiempo, deberían considerarse los dos aspectos del mismo complejo fenómeno físico.

2.4.1.4 Retracción

Disminución del volumen en el tiempo, debida a cambios en el contenido de humedad en el hormigón y a cambios físico-químicos que ocurren independientes de toda acción externa. La retracción se expresa como deformación adimensional (in/in, m/m). Las definiciones anteriores incluyen:

- retracción por secado, debida a la pérdida de humedad en el hormigón.
- retracción autógena, causada por la hidratación del cemento.
- Retracción por carbonatación, consecuencia de que varios productos de la hidratación del cemento se carbonatan en presencia de CO₂.

2.4.1.5 Fluencia

Aumento de deformación en el tiempo bajo tensión sostenida. Se obtiene restando de la deformación total medida en un espécimen cargado, la suma de la deformación inicial instantánea (usualmente considerada elástica) debida a la tensión sostenida, la retracción y la eventual deformación térmica. Se reconocen:

- fluencia básica, cuando no hay intercambio de humedad con el ambiente.
- fluencia bajo secado es la fluencia adicional causada por secado.

Para considerar los efectos de la fluencia se pueden usar la deformación unitaria \mathbf{d}_t (fluencia por unidad de tensión) o el coeficiente de fluencia \mathbf{n}_t (relación entre deformación por fluencia y deformación inicial) que conducen a los mismos resultados:

$$\mathbf{n}_t = \mathbf{d}_t E_{ci}$$

donde E_{ci} es el módulo de elasticidad inicial.

$$\text{Deformación por fluencia} = \mathbf{s} \mathbf{d}_t = \mathbf{e}_t \mathbf{n}_t$$

$$E_{ci} = \mathbf{s} / \mathbf{e}_t$$

2.4.2 Respuesta material

2.4.2.1 Introducción

Los procedimientos usados para predecir efectos tiempo-dependientes de cambios de volumen en el hormigón dependen de la predicción de los parámetros de respuesta material: resistencia, módulos elásticos, fluencia, retracción y coeficiente de expansión térmica.

Las ecuaciones recomendadas son expresiones simplificadas que representan datos promedio de laboratorio obtenidos en ambientes estables y bajo ciertas condiciones de carga. Ningún método puede conducir a mejores resultados. Debe enfatizarse la importancia de considerar apropiados contenidos de agua, temperaturas e historias de carga,

2.4.2.2 Resistencia y propiedades elásticas

2.4.2.2.1 Resistencia a compresión del hormigón versus tiempo

La resistencia a compresión para un tiempo t es:

$$(f'_c)_t = \frac{t}{a + bt} (f'_c)_{28} \quad (23)$$

donde a en días y b son constantes, $(f'_c)_{28}$ es la resistencia a 28 días y t en días es la edad del hormigón.

Moist cured conditions se refiere a ASTM C192 y C 511. Temperaturas distintas a $23 \text{ }^\circ\text{C} \pm 1,7 \text{ }^\circ\text{C}$ y humedades relativas menores que 95 % pueden conducir a valores diferentes de los predecidos usando constantes de tabla, que no pueden aplicarse a hormigones masivos, con cementos tipo II o tipo V.

Steam cured significa curado con vapor saturado a presión atmosférica y $100 \text{ }^\circ\text{C}$.

2.4.2.2.2 Teoría para la predicción de fluencia y retracción en el hormigón

Las principales variable que afectan a fluencia y retracción en el hormigón son la composición, el curado inicial, el medio ambiente, la geometría de la pieza, la historia de carga y las condiciones de tensión. El método de predicción que se presenta se refiere a condiciones normales.

$$\mathbf{n}_t = \frac{t^y}{d + ty} \mathbf{n}_u \quad (24)$$

$$(\mathbf{e}_{sh})_t = \frac{t^a}{f + t^a} (\mathbf{e}_{sh})_u \quad (25)$$

donde d y f (en días), y y a se consideran constantes para un miembro de forma y tamaño dados, \mathbf{n}_u es el coeficiente de fluencia último definido como relación entre deformación de fluencia y deformación inicial, $(\mathbf{e}_{sh})_u$ es la deformación por retracción última y t es tiempo después de la carga en ecuación (24) y tiempo desde el final del curado inicial en ecuación (25). Cuando y y a valen 1,0 estas ecuaciones son las familiares hipérbolas de Ross y Lorman. El incremento de la fluencia después de, digamos, 100 a 200 días, es usualmente mas pronunciado que el de la retracción.

Valores de y, d, \mathbf{n}_u, a, f y $(\mathbf{e}_{sh})_u$ pueden determinarse de acuerdo con ASTM C 512.

Rango de valores de las constantes:

$$\begin{aligned} y &= 0,40 \text{ a } 0,80 \\ \mathbf{n}_u &= 1,30 \text{ a } 4,15 \\ d &= 6 \text{ a } 30 \text{ días} \\ f &= 20 \text{ a } 130 \text{ días} \\ a &= 0,90 \text{ a } 1,10 \\ (\mathbf{e}_{sh})_u &= 415 \times 10^{-6} \text{ a } 1070 \times 10^{-6} \text{ in/in, (m/m)} \end{aligned}$$

2.4.2.2.3 Ecuaciones de fluencia y retracción recomendadas para condiciones normales

El coeficiente de fluencia n_t para 7 días de edad de carga, para hormigón curado en ambiente húmedo o con 1 a 3 días de curado a vapor, está dado por la (26)

$$n_t = \frac{t^{0,60}}{d + t^{0,60}} n_u \quad (26)$$

La retracción después de 7 días, para hormigón curado en ambiente húmedo es:

$$(e_{sh})_t = \frac{t}{35 + t} (e_{sh})_u \quad (27)$$

La retracción para hormigón después de 1-3 días de curado con vapor es:

$$(e_{sh})_t = \frac{t}{55 + t} (e_{sh})_u \quad (28)$$

En Ec. (26), t es el tiempo en días después de la carga. En Ecs. (27) y (28), t es el tiempo después de la retracción, esto es, después del final del curado mojado. Si no hay datos específicos sobre fluencia y retracción para agregados y condiciones locales, los valores promedio sugeridos para n_t y n_u son:

$$n_t = 2,35 g_c$$

$$(e_{sh})_u = 780 g_{sh} \times 10^{-6} \text{ in/in (m/m)}$$

donde g_c y g_{sh} representan el producto de los factores de corrección aplicables.

3. Teoría de Perzyna

En el modelo de Perzyna (1963), (1966) la evolución de la deformación viscoplástica depende de una función de la forma

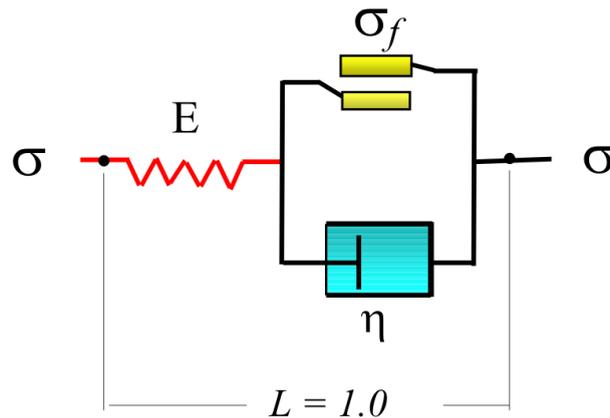


Fig. 1 – Modelo elasto-viscoplástico unidimensional

$$\dot{\mathbf{a}}_{vp} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, F, \dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{\mathbf{h}} \langle \mathbf{y}(F) \rangle \mathbf{m} \quad (29)$$

$$\mathbf{m} = \frac{\partial G}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (30)$$

$$\mathbf{y}(F) = \left[\frac{F(\mathbf{\sigma}, \mathbf{q})}{F_0} \right]^N \quad (31)$$

$$\dot{\mathbf{I}} = \frac{1}{\mathbf{h}} \langle \mathbf{y}(F) \rangle \quad (32)$$

donde $\dot{\mathbf{a}}_{vp}$ representa la parte tiempo-dependiente del tensor de deformación $\dot{\mathbf{a}}$, η representa la viscosidad aparente y \mathbf{q} un conjunto de variables que dependen de la historia del material, denominado tensor de historia. En forma análoga a la teoría clásica de la elasto-plasticidad, es válida aquí la descomposición aditiva del tensor de deformaciones en una parte elástica y otra viscoplástica en la forma $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_e + \dot{\mathbf{a}}_{vp}$. Las ecuaciones (30) y (31) describen una regla de flujo general, no asociada, en la cual el tensor \mathbf{m} define la dirección del flujo viscoplástico, en términos de la función potencial plástico G . La magnitud del flujo viscoplástico lo define el multiplicador escalar λ el cual depende de la función de sobretensión adoptada y de la viscosidad. La función de sobretensión $\mathbf{y}(F)$ es adimensional y monótonicamente creciente, mientras que F_0 representa un factor de normalización, que se escoge en general igual al límite inicial de fluencia del material. El exponente N en la (31) define el orden de la formulación de Perzyna. Cuanto mayor el valor de N , más sensible a la deformación resulta la formulación viscoplástica. El operador de McCauley en la Ec. (32) define las características de la función de sobretensión

$$\langle \mathbf{y}(F) \rangle = \begin{cases} F & \text{if } F > 0 \\ 0 & \text{if } F \leq 0 \end{cases} \quad (33)$$

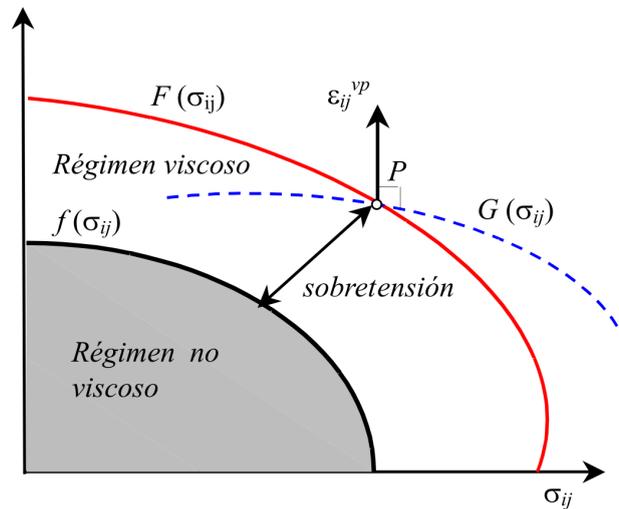


Fig. 2 – Función de sobretensión en el espacio de tensiones

La formulación viscoplástica continua se define entonces planteando la condición de restricción

$$\bar{F} = F - \mathbf{y}^{-1}(\dot{\mathbf{I}}\mathbf{h}) = 0 \quad (34)$$

la cual representa una generalización del planteo elastoplástico clásico $F=0$. El término *formulación continua* se debe a que para la condición $\eta = 0$ (sin efecto viscoso), conduce a la restricción de la elastoplasticidad clásica $F=0$. El otro caso extremo, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \infty$ conduce a la desigualdad $\bar{F} < 0$ para cualquier estado de tensión posible, y por lo tanto, sólo se activa la respuesta elástica. La condición de restricción dada por la Ec. (34) permite describir las condiciones de consistencia de Kuhn-Tucker como

$$\dot{\mathbf{I}}\bar{F} = 0 \quad \dot{\mathbf{I}} \geq 0 \quad \bar{F} \leq 0 \quad (35)$$

El planteo de las condiciones de consistencia permite escribir

$$\dot{\bar{F}} = \mathbf{n}\dot{\mathbf{o}} \cdot \mathbf{r}\bar{\mathbf{q}} \cdot -\frac{\partial \mathbf{y}^{-1}(\dot{\mathbf{I}}\mathbf{h})}{\partial \dot{\mathbf{I}}} \dot{\mathbf{I}} = 0 \quad (36)$$

con

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{y}^{-1}(\dot{\mathbf{I}}\mathbf{h})}{\partial \mathbf{q}} \quad (37)$$

Aquí, consideramos que \mathbf{n} y $\bar{\mathbf{r}}$ son tomados al final del paso de tiempo discreto considerado. De este modo estas cantidades son incrementalmente constantes, por lo que la ecuación diferencial de segundo orden dada por la Ec. (36) es lineal desde el punto de vista incremental. Un método conveniente para afrontar la solución de esta ecuación diferencial es el de la Transformada de Laplace, Kreyszig (1997). La principal ventaja de este procedimiento es la de transformar el sistema de ecuaciones diferenciales formado por las Ecs. (35) a (37) en un sistema de ecuaciones algebraicas.

4. Modelo elastoviscoplastico de Drucker-Prager

Uno de los modelos más usados en la modelación de materiales cohesivo-friccionales es el modelo de Drucker-Prager. Este modelo puede interpretarse como una extensión de la formulación de von Mises para materiales cohesivos, denominado criterio J_2 . En el caso del modelo de Drucker-Prager, se incorpora un término que es función del primer invariante de tensiones por medio del denominado tensor hidrostático $\mathbf{p} = p\mathbf{I}$, con p la presión media $p = I_1/3$ e \mathbf{I} el tensor identidad de segundo orden

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - k \quad (38)$$

En la Ec. (10), J_{2D} representa el segundo invariante del tensor desviador, α y k son constantes materiales que se determinan a partir de ensayos de tracción y compresión uniaxial. El criterio dado por la (38) brinda simplicidad y robustez, y al mismo tiempo permite considerar la influencia de la presión de confinamiento, lo que es fundamental al estudiar la respuesta constitutiva de un material fuertemente sensible a la presión de confinamiento como el hormigón. Cabe aclarar aquí que existen diversas versiones del criterio de Drucker-Prager, correspondiendo la (38) a la formulación clásica. La extensión viscoplastica para considerar efectos dinámicos se realiza aquí siguiendo el criterio definido en la sección precedente, siendo posible el estudio de fenómenos de endurecimiento/ablandamiento mediante una adecuada definición del factor k . En el contexto del MEF, esto permite estudiar fenómenos de localización de deformaciones,

falla dinámica, predicción de patrones de falla, capacidad de carga última de elementos estructurales y comportamiento de postpico.

5. Análisis numérico

Se presentan aquí diversos ejemplos de la capacidad del modelo viscoplástico para reproducir ensayos clásicos de la reología. Primeramente, se presenta el caso de relajación de tensiones. Con el fin de estudiar la respuesta material en forma independiente del problema de valores de borde, el modelo se implementó como rutina constitutiva, siendo posible realizar un control de deformaciones, de tensiones o mixto. El caso de relajación de tensiones consiste en la imposición de una deformación tal que genere en el modelo un estado tensional que supere el límite de fluencia convencional definido por $k = \sigma_f$, con σ_f la tensión de fluencia del material. Una vez alcanzado el nivel de deformación deseado, el estado de deformación se mantiene constante y se estudia la evolución del estado tensional en el tiempo. Esta es una particularidad propia de las formulaciones viscoplásticas, ya que en la teoría de la elastoplasticidad no se permiten en teoría estados tensionales que violen el límite de fluencia (caso unidimensional), o bien $F(\sigma) = 0$ en el caso general 3D. Los valores adoptados para los parámetros materiales fueron: $E = 50000 \text{ KN/m}^2$, límite de fluencia $\sigma_f = 100 \text{ KN/m}^2$, $\eta = 100000 \text{ KN/m}^2\text{s}$, mientras que la deformación corresponde a un desplazamiento de 5mm.

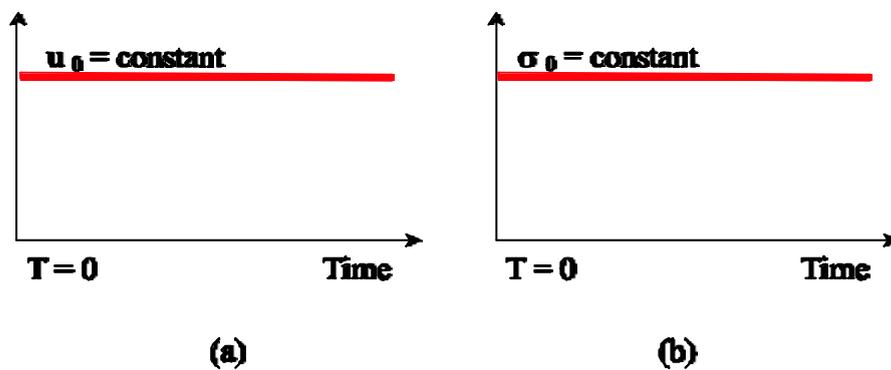


Fig. 3 – Ensayos reológicos a) Relajación b) Deformación diferida (Creep)

En la Fig. 4 se presentan los resultados numéricos comparados con una solución teórica formulada por Simo y Hughes (1998) para el caso de relajación viscoplástica perfecta, representando la línea de trazos a la solución numérica y la línea continua a la solución analítica. Como se observa en la figura, ambas soluciones decaen exponencialmente y tienden a alcanzar el límite elastoplástico dado por la línea punteada, la cual corresponde a la resistencia teórica.

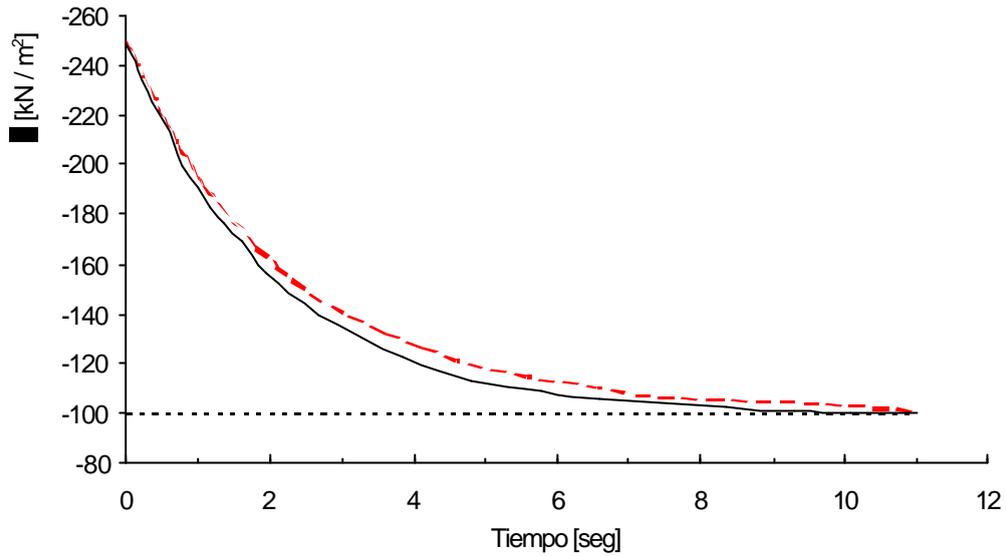


Fig. 4 – Ensayo de *Relajación* – *Solución numérica vs. analítica*

Desde el punto de vista físico, es importante comprender que el proceso de relajación de tensiones es gobernado por el factor de tiempo relativo, t/τ , con $\tau = \eta/E$. El tiempo absoluto t es largo o corto sólo en relación al denominado tiempo intrínseco o tiempo de relajación natural τ . Desde el punto de vista computacional, el intervalo t se considera como un incremento de tiempo finito Δt , y debe ser elegido lo suficientemente pequeño de modo de evitar inestabilidades en el proceso numérico de solución del sistema de ecuaciones diferenciales. La influencia de la viscosidad aparente puede apreciarse en las curvas de la Fig. 5, donde se puede inferir el significado físico del parámetro viscoso η el cual puede interpretarse como el tiempo que necesita el sistema para alcanzar el estado final, es decir, la solución elastoplástica, siendo en este caso el valor de la tensión límite $\sigma_f = 52.125 \text{ KN/m}^2$

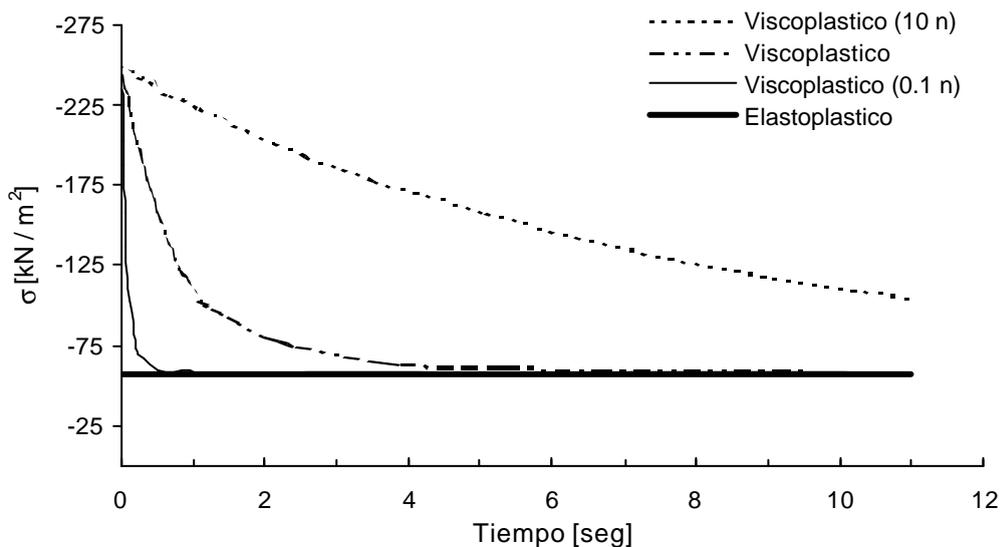


Fig. 5 – *Influencia del valor de la viscosidad*

Consideremos ahora el caso de creep o deformación diferida. Aquí, el procedimiento de análisis a nivel constitutivo consiste en imponer un estado de tensión tal que active la función de fluencia. Una vez alcanzado este nivel de tensión, se mantiene constante mientras se estudia la evolución de las deformaciones en el tiempo (ver Fig. 3b). Considerando los parámetros materiales dados anteriormente, esto corresponde a una carga $P = 60 \text{ KN}$. Los resultados de este ensayo se muestran en la Fig. 6, donde se incluyen con el fin de comparar, diversos casos correspondientes a la solución viscoplástica y el caso elastoplástico. Analizando la figura, podemos ver que a medida que aumenta el valor del parámetro viscoso η adoptado, se tiende a alcanzar la solución elastoplástica en un tiempo mayor. La solución elastoplástica o invíscida es independiente del tiempo, desarrollando en forma instantánea el total de la deformación plástica.

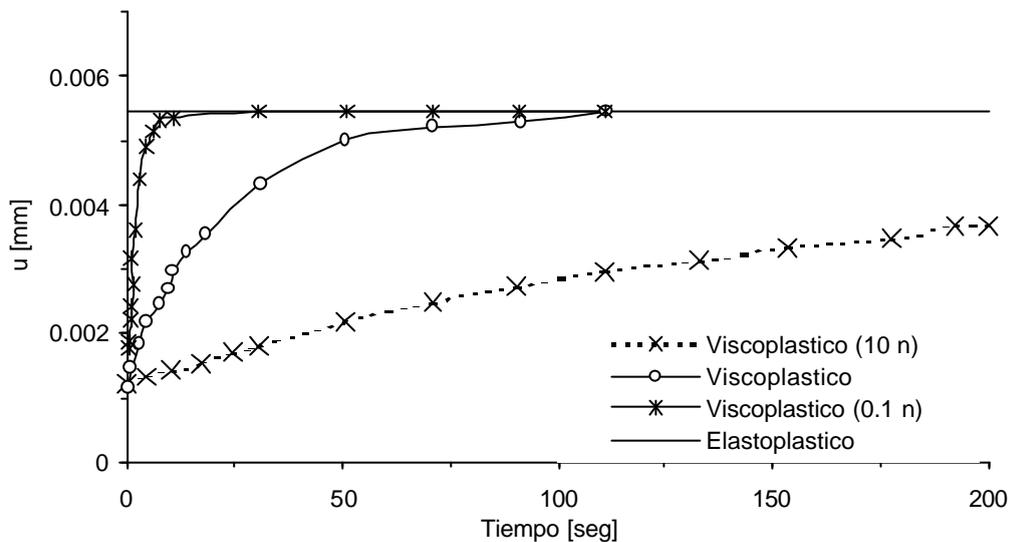


Fig. 6 – Ensayo de Creep – solución viscoplástica vs. elastoplástica

Finalmente, un ensayo importante que sirve a los efectos de chequear la capacidad predictiva del modelo es el que involucra situaciones de descarga/recarga. Una vez que el mecanismo reológico viscoplástico se activa, existirá en el caso de descarga una cierta cantidad de deformación plástica remanente. Lo que se debe tener presente aquí, es que al emplear un modelo elastoviscoplástico, la cantidad de deformación permanente no es la misma que la que le correspondería a un modelo elastoplástico, ya que la deformación permanente depende del tiempo de descarga. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente, en el cual luego de imponer un estado de tensión determinado, la carga se remueve luego de un lapso de tiempo de 11 segundos. Luego de la descarga, el modelo experimenta una descarga elástica, mientras que la deformación permanente es plástica. En ambos casos, la deformación elástica es la misma y vale $\epsilon_e = \sigma/E$, siendo σ la tensión aplicada.

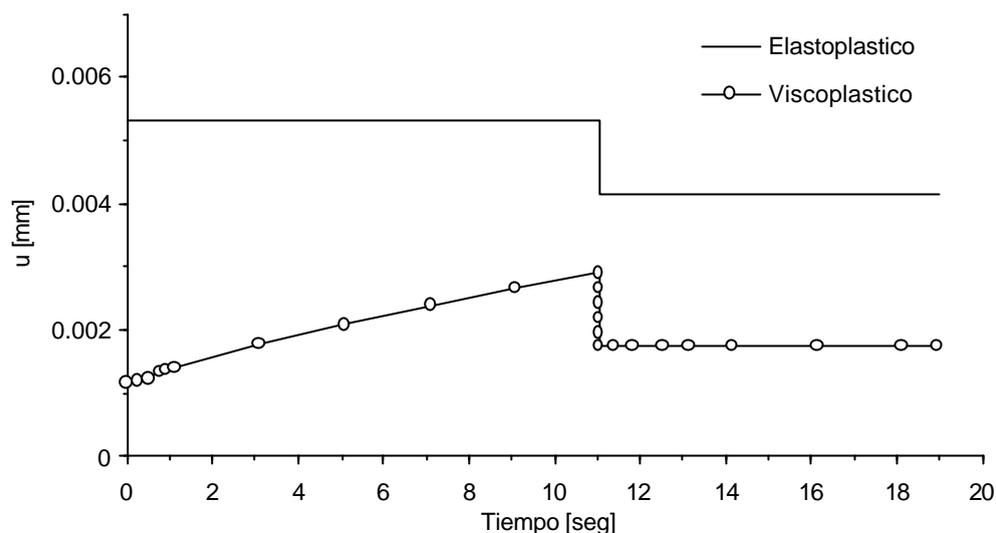


Fig. 7 – Ensayo de Creep con descarga - solución viscoplastica vs. elastoplástica

Sin embargo, la deformación plástica remanente es diferente en cada caso, debido a que en el modelo elastoplástico ésta se ha desarrollado totalmente, mientras que en el caso viscoplastico se produce sólo un desarrollo parcial debido a que esto depende del tiempo en el que se produce la descarga.

6. Conclusiones

El análisis numérico empleando un modelo elastoviscoplastico de continuo demuestra que la teoría viscoplastica de Perzyna puede aplicarse al estudio de la reología de diversos materiales ingenieriles. En particular, el modelo para materiales cohesivo-friccionales de Drucker-Prager estudiado en este trabajo, presenta un gran potencial para el estudio de fenómenos de carga dinámica bajo estados de tensiones complejos en el marco del MEF, ya que mediante una adecuada calibración de los parámetros materiales del mismo es posible reproducir el comportamiento tiempo dependiente de estructuras de hormigón simple y hormigón armado o pretensado, tanto frente a acciones rápidas como frente a procesos de larga duración. Finalmente, se debe puntualizar que el análisis mediante una teoría elasto-viscoplastica como la presentada aquí tiene la ventaja de brindar un marco integral para el análisis tanto del problema inviscido como del problema viscoplastico, al incluir a la solución elastoplástica básica en el caso de viscosidad nula.

7. Bibliografía

- [1] Miranda Pinheiro, L., Giongo, J. S., *Concreto Armado: Propriedades dos Materiais*, USP, Escola de Engenharia de Sao Carlos, Dpto. de Engenharia de Estruturas, Sao Carlos, 1996.
- [2] Reglamento CIRSOC 201 (Proyecto, Cálculo y Ejecución de Estructuras de Hormigón Armado y Pretensado), Tomo 2, 1984.
- [3] Puppo, A., *Cálculo límite de vigas y estructuras aporticadas de hormigón armado*, ICPA, 1980.
- [4] Colegio de Ingenieros de Caminos y Puertos, Grupo Español del Hormigón, Asociación Técnicas Española del Pretensado, Código modelo CEB-FIP 1990.

- [5] Bazant, Z. P., Baweja, S., *Creep and Shrinkage Prediction Model for Analysis and Design of Structures: Model B3*, The Adam Neville Symposium, ACI international, SP-194.
- [6] ACI 209R-92 (Reapproved 1997).
- [7] Perzyna, P. (1963), "The Constitutive Equations for Rate Sensitive Materials". *Quarter of Applied Mathematics*, Vol. 20, pp. 321-332.
- [8] Perzyna, P. (1966), "Fundamental Problems in Viscoplasticity". *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, (9), pp. 244-368.
- [9] Kreyszig, E. (1997), "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería", Vol. I y II. Ed. Limusa, México.
- [10] Simo, J.C., Hughes, T.J.R., (1998), "Computational Inelasticity". Interdisciplinary Applied Mathematics, New York.
- [11] Ortiz, M., SIMO, J.C., (1986), "Analysis of new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive equations". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 23, pp. 353-366.