

MODELACIÓN DE ONDAS CRUZADAS EN CANALES CURVOS EN RÉGIMEN SUPERCRÍTICO MEDIANTE EL ESQUEMA *VOLUME OF FLUID*

Nicolás D. Badano^{a,b}, Martín Sabarots Gerbec^{a,b} y Ángel N. Menéndez^{a,b}

^a*Programa de Hidráulica Computacional, Laboratorio de Hidráulica, Instituto Nacional del Agua, Ezeiza, Buenos Aires, Argentina, nicolas.d.badano@gmail.com, <http://www.ina.gob.ar/>*

^b*Laboratorio de Modelación Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, <http://laboratorios.fi.uba.ar/lmm/>*

Palabras Clave: Flujo supercrítico, ondas cruzadas, VOF, OpenFOAM.

Resumen. En el diseño de obras hidráulicas son frecuentes los canales de descarga en régimen supercrítico. Cuando el flujo supercrítico ingresa en tramos de eje curvo aparecen ondas superficiales cruzadas que se propagan en la dirección del flujo, cuya amplitud debe preverse en el diseño de modo que queden contenidas dentro de la estructura. Ensayos en canales de laboratorio y modelos teóricos simplificados indican que la amplitud de estas ondas cruzadas, así como la posición de los máximos y mínimos relativos, dependen del número de Froude y del radio de curvatura relativo del canal. En este trabajo se presenta la modelación numérica tridimensional de este fenómeno, realizada mediante una técnica de captura de interfaz *Volume of Fluid* bajo OpenFOAM[®]. Se muestra que los resultados numéricos comparan bien con las mediciones en canales de laboratorio publicadas en la literatura, aunque se observan algunas discrepancias. Se muestra que los modelos numéricos presentan escasa sensibilidad a los parámetros y que el fenómeno es sensible a las condiciones de aproximación en los ensayos físicos.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Descripción del fenómeno

En canales hidráulicos a superficie libre las ondas superficiales se propagan con una celeridad $c = \sqrt{gh}$, donde h es la profundidad del escurrimiento y g la aceleración de la gravedad. Cuando la velocidad del escurrimiento es mayor que esta celeridad se produce un escurrimiento llamado supercrítico, en el cual cualquier perturbación se transmiten solamente en la dirección del escurrimiento, ya que no puede remontar la corriente.

Cuando un escurrimiento supercrítico se encuentra con un tramo de canal curvo se produce una sobrelevación sobre la pared externa de la curva y una depresión sobre la cara interna. Estas se propagan hacia aguas abajo generando un patrón de ondas cruzadas, superpuestas al escurrimiento principal, que rebotan alternadamente sobre ambas paredes.

Los escurrimientos supercríticos son habituales en muchas obras de ingeniería, desde canales de desagüe o riego hasta obras hidroeléctricas. Los tramos curvos en canales supercríticos requieren atención en la mayoría de los casos, ya que la amplitud de las ondas cruzadas es a menudo varias veces mayor que el tirante medio del escurrimiento.

1.2. Antecedentes experimentales

Los primeros estudios de ondas cruzadas en canales supercríticos fueron realizados por [Ippen \(1936\)](#) y [Knapp y Ippen \(1938\)](#). Se ensayó un canal de sección rectangular con una pendiente constante, en el cual se dejó establecer un régimen de escurrimiento constante en cada caso. Se ensayaron distintos caudales, pendientes del canal y radio de curvatura del tramo circular, registrándose en cada caso el perfil de la superficie libre sobre las paredes externa e interna del canal.

[Reinauer y Hager \(1997\)](#) publicaron también ensayos de ondas cruzadas, incluyendo perfiles de la superficie libre a lo largo de las paredes del canal. En este caso se ensayaron tres canales rectangulares de fondo plano, sin pendiente, con el flujo proveniente de un conducto a presión equipado con una boquilla de salida a fin de establecer un tirante uniforme de entrada de la curva.

Existen también en la bibliografía fórmulas teóricas y empíricas que indican el valor de la sobrelevación máxima sobre la pared externa de una curva en canales rectangulares. Se define h_M al tirante máximo sobre la pared externa, h_0 al tirante al principio de la curva, $F_0 = U/\sqrt{gh_0}$ como el número de Froude de entrada, b el ancho del canal, R el radio de curvatura y $\rho_a = b/R$ la curvatura del canal. Realizando ciertas hipótesis, [Knapp \(1951\)](#) derivó teóricamente la expresión:

$$Y_M = h_M/h_0 = \left(1 + \frac{1}{2}B^2\right)^2, \quad (1)$$

donde la amplitud del máximo depende exclusivamente del llamado número de curva $B = \rho_a^{1/2} F_0$. Esta expresión resulta válida para números de curva reducidos. Por otro lado, en función de resultados experimentales [Poggi \(1956\)](#) propuso el siguiente ajuste, válido para un rango mayor de condiciones:

$$Y_M = h_M/h_0 = \begin{cases} (1 + 0,40B^2)^2 & \text{si } B \leq 1,5 \\ (1 + 0,60B^2)^2 & \text{si } B > 1,5 \end{cases}, \quad (2)$$

2. MODELO NUMÉRICO

2.1. Ecuaciones

El modelo numérico utilizado se basa en el promedio de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes (RANS, por sus siglas en inglés). Como hipótesis de cierre se utilizó un modelo de viscosidad de torbellino de dos ecuaciones tipo *realizable k-ε* (Shih et al., 1995), ya que se alcanzan en este problemas números de Reynolds de hasta 670,000. El tratamiento de la superficie libre del escurrimiento se basó en una variante del método de captura de interfaz *Volume of Fluid* (VOF, Hirt y Nicholls (1981)).

En el método VOF utilizado, ambos fluidos (aire y agua) se tratan mediante un solo juego de ecuaciones de Navier-Stokes, junto con una ecuación adicional advectiva de transporte de fase (Ferziger y Peric, 2002):

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) - \nabla \cdot \left[(\mu + \mu_t) \left(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \right) \right] = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \sigma \kappa \nabla \alpha, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \alpha) = 0, \quad (5)$$

donde \mathbf{U} es la velocidad, ρ la densidad, μ y μ_t la viscosidad y viscosidad de torbellino respectivamente, p la presión, \mathbf{g} la aceleración de la gravedad, σ la tensión superficial, κ la curvatura de la superficie libre y $\alpha \in [0, 1]$ es la proporción de la fase líquida que ocupa determinado punto del espacio. La presión se trata en el modelo como presión modificada, resolviendo como incógnita el valor de $p - \rho g_z z$.

Las propiedades efectivas del fluido-mezcla utilizadas en las ecuaciones de Navier-Stokes se calculan localmente como un promedio de las propiedades de los fluidos componentes pesado con la proporción de fase:

$$\rho = \alpha \rho_w + (1 - \alpha) \rho_a, \quad (6)$$

$$\mu_t = \alpha \mu_{tw} + (1 - \alpha) \mu_{ta}, \quad (7)$$

donde ρ_w y μ_{tw} corresponden a la fase líquida, mientras que ρ_a y μ_{ta} corresponden a la fase gaseosa.

Uno de los problemas de este método clásico es que, al resolver numéricamente la ecuación de transporte de fase aparece inevitablemente cierta cantidad de difusión numérica. Esta tiene a hacer que la superficie libre entre fases deje de ser abrupta y se genere toda una zona de mezcla, aun cuando las propiedades físicas de los fluidos no lo permitan en realidad. Por lo tanto, en el presente modelo utiliza una corrección de la ecuación de transporte de fase, que se deduce de aplicar un modelo euleriano de dos fluidos (Rusche, 2002). Esta introduce un término adicional actuante en la zona de transición de fases:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \alpha) + \nabla \cdot (\mathbf{U}_r \alpha (1 - \alpha)) = 0, \quad (8)$$

donde \mathbf{U}_r es la diferencia entre la velocidad del agua y del aire. Dado que en el método VOF ambas velocidades se consideran iguales, este término debe modelarse, adoptandose un campo de velocidades apropiado para comprimir la superficie libre, de manera de contrarrestar la difusión numérica. Al discretizar en volúmenes finitos esta ecuación, las divergencias se calculan a

partir de los flujos en las caras. Si se denomina ϕ al flujo del campo de velocidades, ϕ_r al flujo correspondiente a U_r que comprime la superficie libre, y $|S|$ a la superficie de cada cara, la ecuación del flujo compresivo es:

$$\phi_r = C_\alpha \hat{n} \max \frac{|\hat{n}\phi|}{|S|^2}, \quad (9)$$

donde \hat{n} es el vector normal a la superficie libre, estimado a partir de $\nabla\alpha$ y C_α es el coeficiente de compresión de la superficie libre (Rusche, 2002). Para el coeficiente C_α se recomienda un valor cercano a 1,0, que corresponde a una compresión conservativa (OpenCFD, 2012), algo inferior al valor 1,5 utilizado por Rusche (2002).

El modelo numérico utilizado está implementado en OpenFOAM[®] (*Open Field Operation and Manipulation*, Jasak (1996); Weller et al. (1998)), utilizando el Método de los Volúmenes Finitos. Este es de carácter impermanente, por lo que se establecieron condiciones de entrada constantes en el tiempo y se realizó un proceso de marcha temporal hasta alcanzar una situación estacionaria.

El procedimiento de iteración utilizado por el solver se basa en un método mixto PISO-SIMPLE. A fin de minimizar la difusión numérica se utilizaron esquemas de interpolación TVD con limitadores de flujo: van Leer (van Leer, 1974) para la advección de α y linear limitado para los restantes términos. Para el término de compresión de la superficie libre el solver utiliza un esquema de discretización especialmente diseñado.

2.2. Generación de malla

Para la generación de las mallas de cálculo se utilizó una versión modificada del generador *blockMesh* de OpenFOAM[®]. Este genera mallas hexaédricas a partir de la división en tres direcciones de bloques hexaédricos de aristas curvas definidos por el usuario.

El tamaño de las celdas cercanas a las paredes es importante debido al uso de funciones de pared para representar el efecto de la capa límite. Típicamente *blockMesh* permite definir los tamaños de elemento de manera que crezcan de manera geométrica al alejarse de la pared. No obstante, esto lleva a que los elementos más lejanos a la pared resulten con tamaños proporcionalmente demasiado grande. Al mismo tiempo, la proporción de elementos totales generados cercanos a la pared es muy grande respecto del total.

Para realizar una discretización más eficiente, el software se modificó de manera de permitir un mayor control sobre el tamaño de las celdas. La discretización de cada arista se estableció a partir de tres parámetros: el espesor de la primera capa de celdas h_0 , la cantidad de celdas totales n_T y la cantidad de celdas de transición n_t . Para una arista de longitud total H , el tamaño de cada celdas surge de obtener el factor de expansión ψ resolviendo iterativamente:

$$h_i = \begin{cases} h_0 \psi^i & \text{si } 0 \leq i < n_t \\ h_0 \psi^{(n_t-1)} & \text{si } n_t \leq i < n_T \end{cases}, \quad (10)$$

$$H = \sum_{i=0}^{n_T-1} h_i$$

Usando esta técnica, el tamaño de celdas crece geoméricamente hasta alcanzar un determinado tamaño que luego se mantiene para el resto de las celdas. A fin de resolver correctamente la zona cercana a la pared, la cantidad de celdas de transición debe ser tal que ψ resulte cercano 1.5.

Se desarrolló también un código análogo a fin de contemplar los casos en que existen paredes en ambos extremos de una arista. En este caso existen elementos de n_t elementos de transición a cada lado, con $n_T - 2n_t$ elementos uniformes en el centro de la malla.

En la figura 1 se presenta una sección transversal y una vista general de la malla para la simulación del canal 1 ensayado por Reinauer y Hager. Utilizando esta discretización de malla se obtuvo un valor de y^+ dentro del rango 75 – 300 para todo el perímetro mojado, lo cual es apropiado para una función de pared logarítmica.

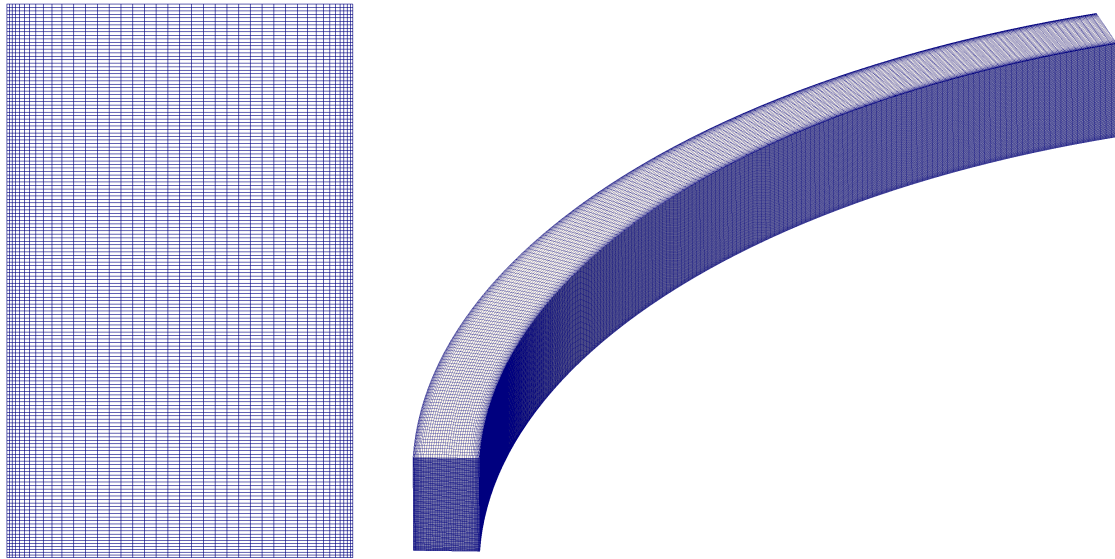


Figura 1: Sección transversal y vista general de la malla de cálculo para el Canal 1 de Reinauer

3. ENSAYOS NUMÉRICOS

Se realizaron en primer lugar ensayos sobre el Canal 1 de Reinauer y Hager. Este es de sección rectangular con un ancho de fondo de 250 mm y un radio medio de 3607 mm, con un tramo recto de aproximación de 300 mm y un desarrollo de curva de 51.8° (Figura 1, Reinauer y Hager (1997)). Simulando la salida del difusor descrita en el trabajo experimental, se impuso una condición de borde de entrada de velocidad uniforme y $\alpha = 1$ sobre un tirante inicial de 50mm. Los parámetros de la turbulencia en la entrada k y ϵ se impusieron compatibles con un escurrimiento a presión totalmente desarrollado.

Se realizó una sensibilidad al tamaño de malla. Las dimensiones de la malla base utilizada se presentan en la tabla 1. La malla se refinó de manera independiente en sentido transversal y longitudinal, duplicando en cada caso la cantidad de elementos. Los resultados obtenidos sobre la pared externa (figura 2a) muestran muy baja sensibilidad al refinamiento. Se ensayó también un refinamiento vertical de la malla (figura 2b). Se observa un efecto ligero al duplicar la cantidad de elementos, aunque se alcanza la convergencia, ya que un segundo refinamiento sucesivo ya no muestra diferencias. Considerando las diferencias aceptables en todos los casos, por cuestiones de tiempo de cálculo se utilizó por el momento la malla base para realizar el resto de los ensayos.

Se replicaron los ensayos realizados por Reinauer y Hager en el canal 1 para distintos número de Froude de entrada. Por el momento se prestó principal atención al perfil de la sobrelevación

Dirección	Tamaño medio de elemento [mm]	Cantidad de elementos
Vertical	2.50	160
Trasversal	6.25	40
Longitudinal	25.00	176

Tabla 1: Tamaño de elemento de la malla base

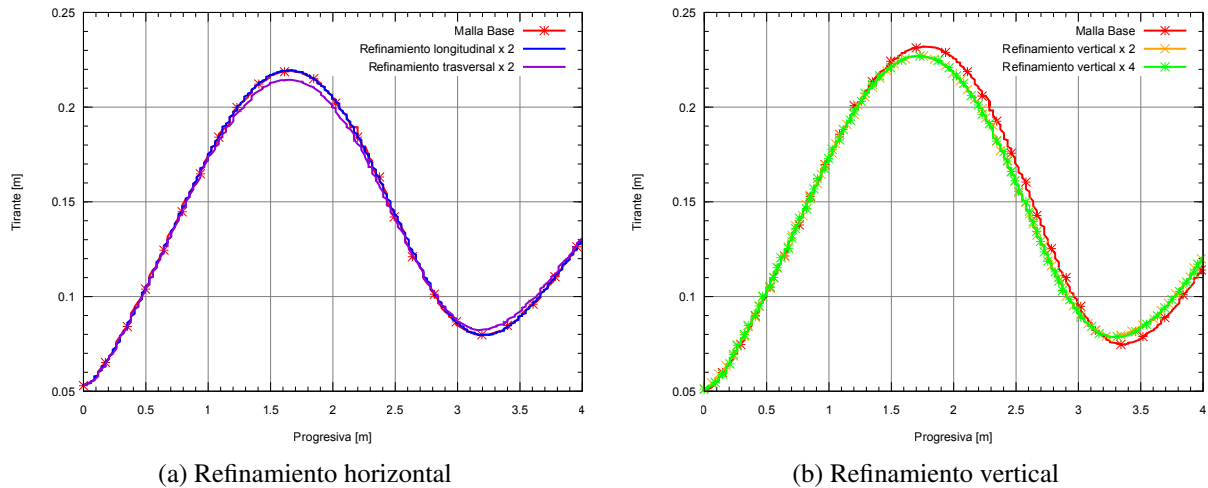


Figura 2: Reinauer Canal 1 - Sensibilidad de malla

sobre la pared exterior de la curva. Los resultados obtenidos sobre la malla base se presentan en la figura 3. Se observa que el modelo numérico subestima ligeramente la amplitud de la onda para los números de Froude más altos. Además, la longitud de onda simulada es ligeramente más larga que la observada para esos casos. El ajuste para los números de Froude más pequeños es muy bueno, tanto en amplitud como en longitud de onda.

Se replicaron también los ensayos realizados por Reinauer y Hager sobre el canal 2. Este tiene un ancho de fondo de 50 mm, cubriendo el ancho completo del difusor, y un radio de curvatura de 3482 mm. Este presenta igual tramo de aproximación y desarrollo de curva que el primer canal. Por razones de disposición durante los experimentos, la pared interna no es curva, sino que se conforma de dos tramos rectos. No obstante, los autores indican que la influencia de la geometría de la pared interna no llega a propagarse lo suficiente como para perturbar el primer máximo sobre la pared externa. Para el modelo numérico se representó la geometría según se describe en el paper original, adoptándose iguales tamaños de elementos que para la malla base del canal 1.

Los resultados para la pared externa del canal 2 se presentan en la figura 4. Se observa en este caso una subestimación de la amplitud similar a la ya observada. No obstante, no se observa una diferencia apreciable entre la longitud de onda de las series simuladas y observadas. Al igual que en el caso anterior, el ajuste es sustancialmente mejor para los números de Froude más bajos.

A fin de intentar mejorar el ajuste obtenido se realizaron distintos análisis de sensibilidad sobre la simulación de $F_0 = 8$ del canal 1. La sensibilidad al tamaño de elemento de malla ya fue presentada. Además de ser baja, esta muestra tendencia hacia menores amplitudes al aumentar el número de elementos, por lo que no contribuye a explicar las discrepancias.

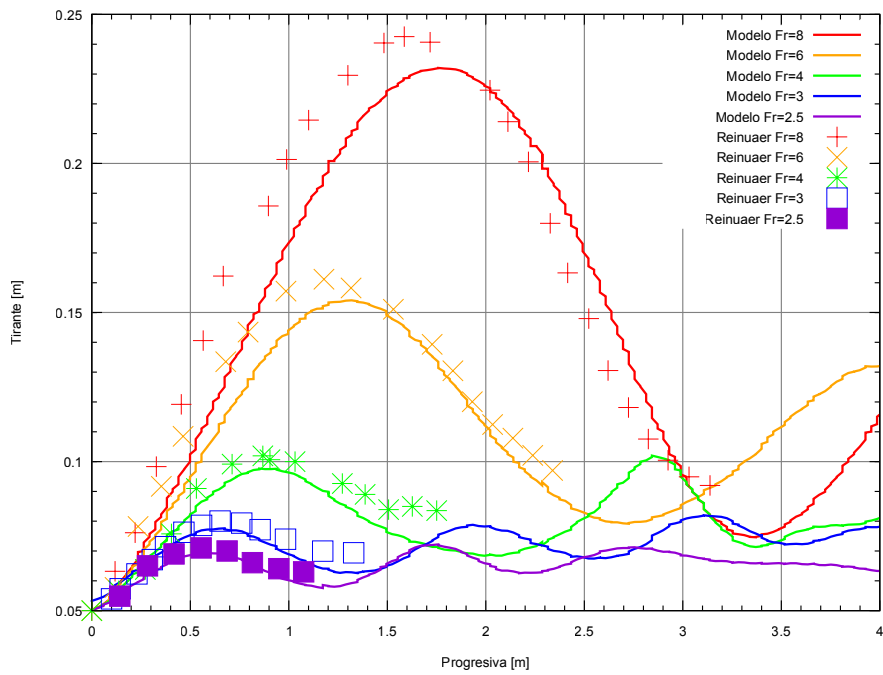


Figura 3: Canal 1 de Reinauer - Comparación de valores simulados y observados sobre la pared externa

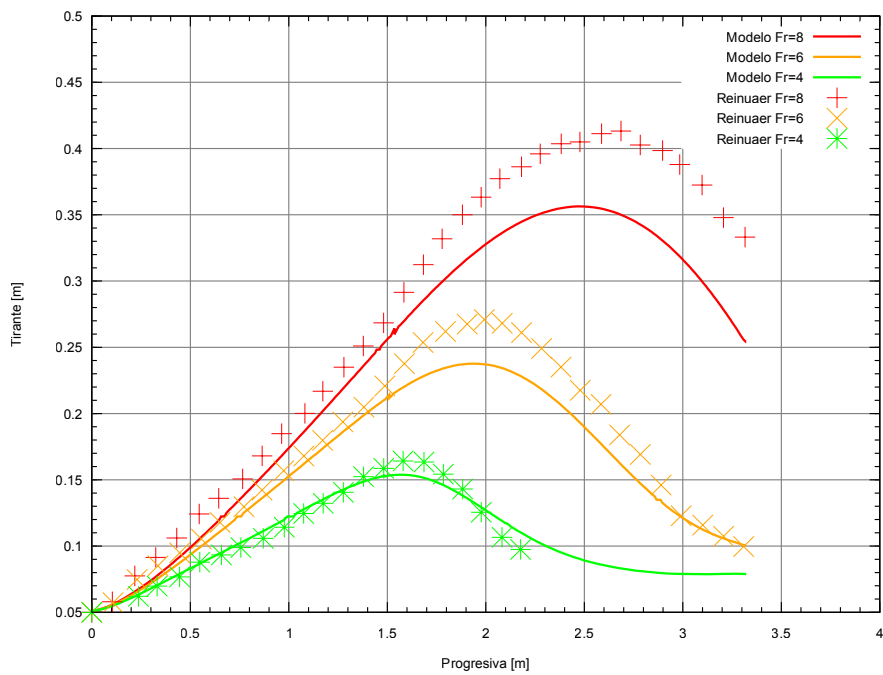


Figura 4: Canal 2 de Reinauer - Comparación de valores simulados y observados sobre la pared externa

Entre los parámetros numéricos, se realizaron ensayos en primer lugar sobre el coeficiente de compresión de la superficie libre C_α (figura 5). Este no mostró sensibilidad apreciable. Tampoco se observó sensibilidad a los esquemas numéricos de discretización.

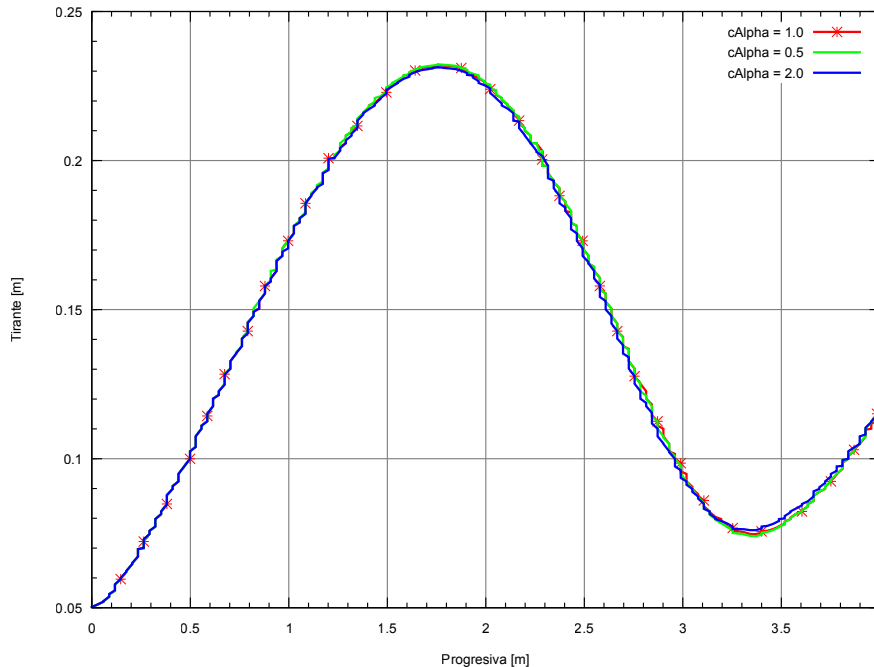


Figura 5: Sensibilidad al coeficiente C_α

Para simular la fricción en el canal de Reinauer y Hager se utilizó una función de pared rugosa. La rugosidad adoptada fue de 0.0025 mm, correspondiente a vidrio o acrílico, ya que el canal es descrito como liso por los autores del trabajo. Con esa rugosidad la función de pared se comporta como lisa. Esto fue verificado reemplazándola por una función de pared lisa, a fin de descartar cualquier problema en la implementación de la función de pared rugosa para estas condiciones. Los resultados (figura 6) no mostraron sensibilidad.

También se realizó un prueba expeditiva utilizando un modelo de turbulencia *Large Eddy Simulation* (LES), a fin de evaluar si la simulación de una parte del espectro turbulento permite una mejor representación del fenómeno observado. Para este ensayo se utilizó un modelo de una ecuación que calcula la energía de la turbulencia (Fureby et al., 1997), junto con una función de pared. Los resultados preliminares obtenidos (figura 7) muestran escasas diferencias respecto de la simulación bajo RAS.

La escasa sensibilidad observada sobre las variables numéricas del problema parece incapaz por el momento para explicar las diferencias obtenidas entre las simulaciones numéricas y los ensayos físicos. Se evaluó por lo tanto la sensibilidad del problema a posibles deficiencias en la condición de aproximación del modelo físico.

En particular, en los ensayos del canal 1 el ancho del difusor colocado a la entrada (500 mm) fue reducido para coincidir con el ancho del canal (250 mm) mediante la colocación de un aditamento del lado interno de la curva (Reinauer y Hager, 1997). Es posible que la contracción generada introdujera una pequeña velocidad transversal al escurrimiento, sobre todo para las velocidades más altas. A fin de evaluar la sensibilidad de la respuesta a una perturbación de esas características se realizó una simulación introduciendo una velocidad transversal centrí-

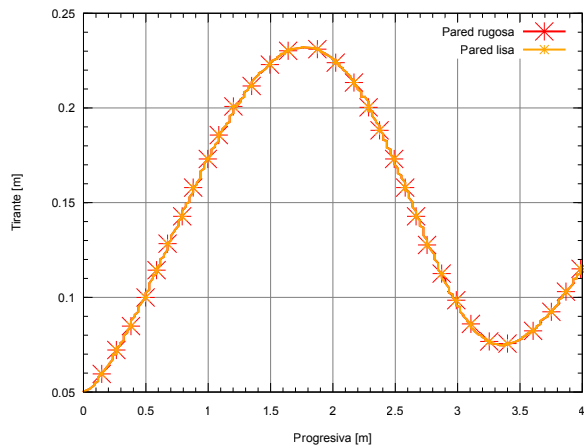


Figura 6: Canal 1 de Reinauer - Comparación de funciones de pared

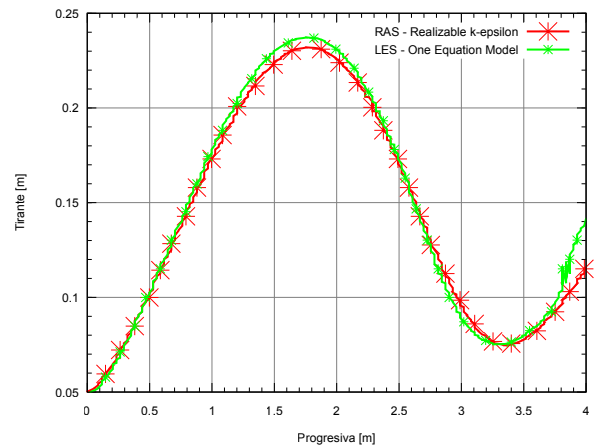


Figura 7: Canal 1 de Reinauer - Comparación de modelos de turbulencia

fuga constante a la entrada igual al 5 % de la velocidad longitudinal. Los resultados muestran un efecto notable sobre el perfil de onda sobre la pared externa, que no solo crece en amplitud sino que reduce su longitud de onda (figura 8). Evidentemente el fenómeno es sensible a perturbaciones experimentales de esa naturaleza.

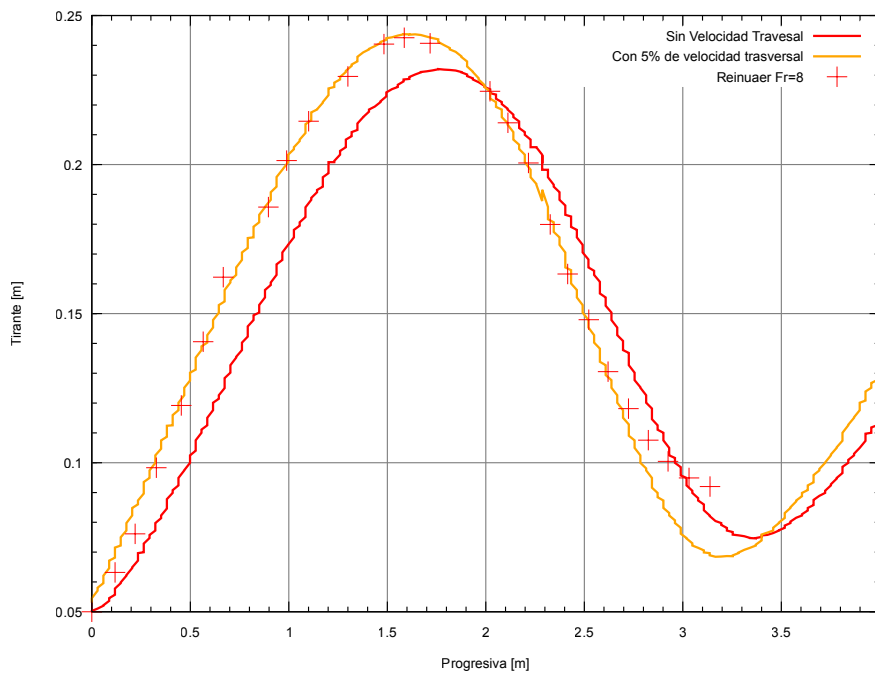


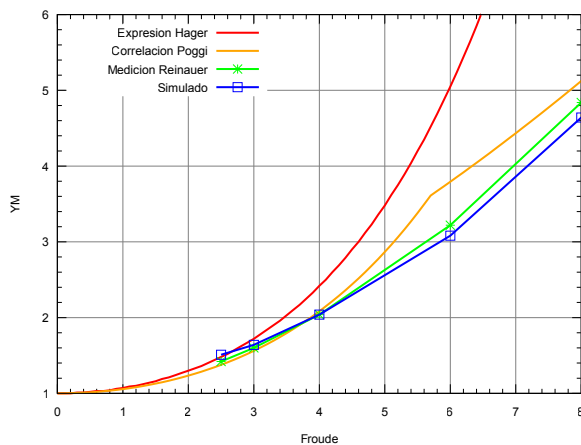
Figura 8: Canal 1 de Reinauer - Sensibilidad a la velocidad trasversal en la entrada

A modo de resumen de los resultados obtenidos se compara finalmente el primer pico de sobrelevación sobre la pared externa de ambos canales en términos de magnitud y posición con las mediciones de Reinauer y Hager y las correlaciones de la bibliografía.

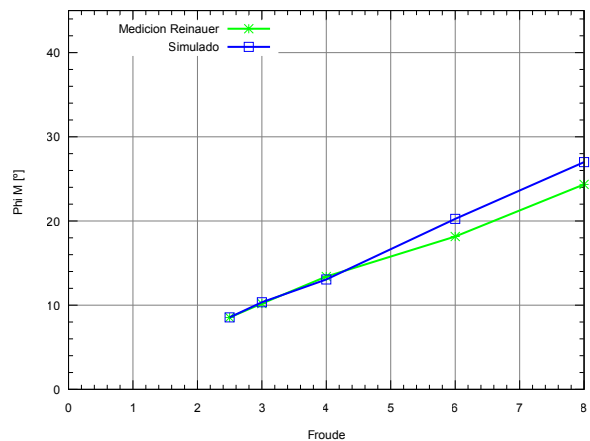
Los resultados para el canal 1 se presentan en las figuras 9a y 9b. Se observa que los resultados de magnitud del canal 1 comparan favorablemente con las mediciones de Reinauer, si bien

estas se alejan de la correlación de Poggi para los valores de $F_0 \geq 6$. En cuanto a la comparación de la posición angular del pico, se observa un atraso del modelo numérico respecto de las mediciones para los caudales más altos, que ya fue destacado anteriormente.

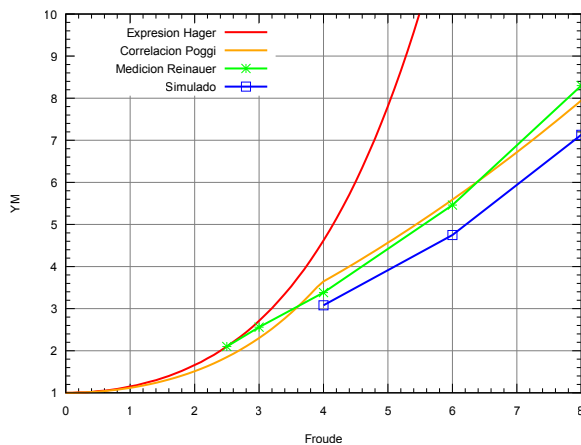
En las figuras 9c y 9d se presentan las mismas comparaciones para el caso del canal 2. En este caso la amplitud de las sobrelevación registrada en el modelo físico está muy cercana a los valores resultantes de la correlación de Poggi, mientras que el modelo numérico resulta en amplitudes algo menores. En cambio, el ajuste en términos de posición del primer pico es muy bueno respecto de las mediciones.



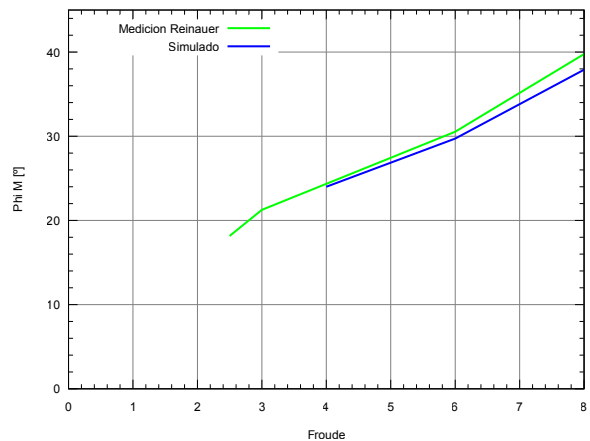
(a) Reinauer Canal 1 - Magnitud del primer máximo



(b) Reinauer Canal 1 - Posición del primer máximo



(c) Reinauer Canal 2 - Magnitud del primer máximo



(d) Reinauer Canal 2 - Posición del primer máximo

Figura 9: Comparación del primer máximo sobre la pared externa

Dada las discrepancias observadas entre el modelo numérico y el modelo físico, es necesario continuar con la comparación de más casos de laboratorio. Se encuentran en ejecución las simulaciones correspondientes a los casos ensayados por [Ippen \(1936\)](#) y para el tercer canal de Reinauer y Hager.

4. CONCLUSIONES

Se realizó la comparación de distintos casos registrados en laboratorio de ondas cruzadas en canales curvos en régimen supercrítico. La metodología de simulación mediante el método V_0 -

lume of Fluid se considera apropiada. Si bien el ajuste general es bueno, se observaron algunas discrepancias entre las sobreelevaciones observadas y simuladas. Estas no pudieron ser explicadas por el momento modificando los parámetros del modelo numérico, que mostraron baja sensibilidad para estos ensayos. Por el contrario, se comprobó que pequeñas perturbaciones en el modelo físico podrían explicar las diferencias observadas. Es necesario ampliar la base de casos comparados a fin de llegar a conclusiones más fuertes.

REFERENCIAS

- Ferziger J. y Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, third edición, 2002.
- Fureby C., Tabor G., Weller H., y Gosman A. Differential subgrid stress models in large eddy simulations. *Physics of Fluids*, 9:1416, 1997.
- Hirt C. y Nicholls B. Volume of fluid (vof) method for dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39:201–225, 1981.
- Ippen A. *An analytical and experimental study of high velocity flow in curved sections of open channels*. Tesis de Doctorado, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1936.
- Jasak H. *Error analysis and estimation for the finite volume method with application to fluid flows*. Tesis de Doctorado, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, 1996.
- Knapp R. Design of channel curves for supercritical flow. En *ASCE Transactions*, volumen 116, páginas 296–325. 1951.
- Knapp R. y Ippen A. Curvilinear flow of liquids with free surfaces at velocities above that of wave propagation. En *Proc., 5th International Congress of Applied Mechanics*, páginas 531–536. Cambridge University Press, New York, 1938.
- OpenCFD. *OpenFOAM User Guide 2.1.0*. 2012. <http://foam.sourceforge.net/docs/Guides-a4/UserGuide.pdf>.
- Poggi B. Correnti veloci in curva a 90° molto strette. En *Idrotecnica, Milan, Italia*, volumen 33, páginas 465–480. 1956.
- Reinauer R. y Hager W. Supercritical bend flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123:208–218, 1997.
- Rusche H. *Computational fluid dynamics of dispersed two-phase flow at high-phase fractions*. Tesis de Doctorado, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, 2002.
- Shih T., Liou W., Shabbir A., Tang Z., y Zhu J. A new k-epsilon eddy viscosity model for high reynolds number turbulent flows. *Computers and Fluids*, 24:227–238, 1995.
- van Leer B. Towards the ultimate conservation difference scheme. ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14:361–370, 1974.
- Weller H., Tabor G., Jasak H., y Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object orientated techniques. *Computers in Physics*, 12:620–631, 1998.