

## **SIMULACIÓN EN TIEMPO REAL DE FLUIDOS Y SÓLIDOS RÍGIDOS MEDIANTE PARTÍCULAS**

**Alejandro C. Limache<sup>a</sup> y Pablo S. Rojas<sup>a</sup>**

*International Center of Computational Methods in Engineering (CIMEC).*

*INTEC-CONICET. Santa Fe, Argentina., <http://www.cimec.gov.ar/>*

**Palabras Clave:** fluid-solid interaction, rigid body, smoothed particle hydrodynamics, SPH, real-time.

**Resumen.** La simulación computacional de interacción fluido-estructuras es una de las principales áreas de investigación de la mecánica computacional. El caso más general de interacción, y por lo tanto el más complejo, es aquél donde los objetos o estructuras no permanecen fijos en el espacio sino que están libres y por lo tanto pueden desplazarse (y rotar) de manera arbitraria. El movimiento resultante dependerá dinámicamente de las fuerzas que el fluido hace sobre la estructura y vice-versa. Este trabajo describe técnicas que hemos desarrollado para simular este tipo general de interacciones entre fluidos y sólidos rígidos. Las técnicas están basadas en el uso de partículas tanto para caracterizar los fluidos como para describir los sólidos rígidos. La dinámica de la porción fluida se logra a través del método de partículas llamado Smoothed Particle Hydrodynamics y a través de una dualidad de las partículas sólidas. Una plataforma de simulación desarrollada por los autores, permite visualizar la dinámica de los objetos en tiempo real a medida que transcurre la simulación.

## 1. INTRODUCCIÓN

La mecánica computacional es la ciencia que trata de predecir mediante cálculos computacionales cual será el movimiento y propiedades físicas de un fluido (como por ejemplo el agua y el aire), o de un sólido (como por ejemplo un auto, una pelota, un puente, etc.) cuando éstos están sujetos a ciertas acciones externas. En ingeniería, el desarrollo de software de mecánica computacional permite tener herramientas para predecir por ejemplo cuál será el desplazamiento y los efectos que puede causar un torrente de agua producido por una inundación o determinar el movimiento de un auto o la dinámica de un avión. La simulación del movimiento de fluidos y de objetos tiene también diversas aplicaciones en la industria del video-juego y de la animación [Pixar \(2012\)](#), [Fedkiw \(2012\)](#). Tradicionalmente, la simulación de fluidos o de cuerpos rígidos, ha sido hecha partiendo de una descripción continua de dichos materiales. Es decir, tanto el fluido como el sólido rígido son vistos como un material compacto y no como el agregado de partículas. Esta dependencia con el continuo se expresa matemáticamente en la necesidad de representar mediante una malla el campo donde se mueve el fluido o el objeto sólido de interés. Sin embargo, en los últimos años, han surgido avances en parte de la comunidad científica mundial, en los llamados métodos de partículas [Liu \(2002\)](#); [Li y Liu \(2004\)](#). En términos computacionales, estos métodos regresan a la concepción primitiva de ver a fluidos y sólidos como un agregado de partículas interactuantes. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) es la denominación con que se conoce a uno de estos métodos. SPH fue inventado para simular fenómenos astrofísicos [Lucy \(1977\)](#); [Gingold y Monaghan \(1977\)](#) y luego fue aplicado a la simulación de fluidos [Liu y Liu \(2003\)](#); [Monaghan \(1992, 2005\)](#). SPH es un método atractivo por la simplicidad de la formulación resultante. No requiere de mallas (meshless) y su computación numérica se procesa en la forma de partículas fluidas elementales que interactúan entre sí como si estuvieran conectadas por simples resortes. Los autores del presente trabajo han desarrollado un software propio de SPH para simular fluidos en tiempo real [Rojas-Fredini y Limache \(Nov. 2010\)](#), [Limache y Rojas-Fredini \(Submitted Feb. 2012\)](#). A nivel físico la simulación de fluidos implica tener que resolver las ecuaciones diferenciales de Navier-Stokes de la mecánica de fluidos. También han desarrollado una plataforma de simulación y visualización en tiempo real que permite configurar experimentos interactivamente y ver el movimiento del fluido mientras transcurre la simulación.

El desarrollo de métodos para simular problemas de interacción de fluidos con sólidos es un tema con variadas aplicaciones prácticas. Un problema típico que se intenta determinar y simular es: ¿como es la dinámica de un objeto que cayendo libremente de pronto impacta en la superficie del mar?, ¿que tipos de olas genera en el agua?, ¿hasta que profundidad se sumerge?.

En este trabajo se describe como se puede lograr simular este tipo de problemas, a través de un método que han desarrollado los autores basado en la representación de los fluidos y de los sólidos mediante partículas. En la Sección 2, se describe la dinámica de cuerpos rígidos. En la sección 3, se describe la discretización de éstos mediante partículas. En la Sección 4, se describe la discretización de fluidos mediante partículas usando SPH. En la Sección 5, se describe la interacción fluido-sólido y en la Sección 6 se muestran resultados obtenidos.

La formulación presentada corresponde al caso 2D(imensional) es decir fluidos y sólidos moviéndose únicamente en un plano  $x_W$ - $y_W$  del mundo físico. El mundo físico denotado con la letra  $W$ (orld) está descrito por un sistema de ejes cartesianos  $x_W$ - $y_W$  y  $z_W$ . La formulación puede extenderse de manera directa al caso 3D.

## 2. SIMULACIÓN DE OBJETOS RÍGIDOS

Consideremos el movimiento 2D de un sólido rígido denotado con el índice  $B$  como el que se muestra en Fig. (1) con líneas rectangulares rojas.

Se define un sistema cartesiano  $x_B, y_B$  solidario al cuerpo rígido y localizado en el centro de masa denotado con el índice  $B$ . En un instante arbitrario la orientación del cuerpo rígido está definida por el ángulo  $\theta_B$  que forman el eje- $x_B$  cuerpo respecto del eje- $x_W$  del sistema mundo. El movimiento traslacional del sólido en el espacio está definido por la ecuación de momento lineal del centro de masa:

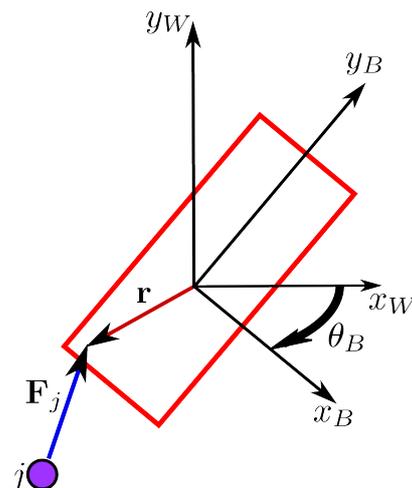


Figura 1: Sólido Rígido

$$M^B \mathbf{A}^B = M^B \frac{d\mathbf{V}^B}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (1)$$

donde  $M^B$  denota la masa total de sólido,  $\mathbf{A}^B$  es la aceleración del centro de masa y  $\mathbf{V}^B$  su velocidad.  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  es la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido. La posición del centro de masa puede hallarse integrando en el tiempo la velocidad del centro de masa:

$$\mathbf{V}^B = \frac{d\mathbf{X}^B}{dt} \quad (2)$$

Eqs. (1)-(2) definen la traslación del cuerpo rígido. Su rotación u orientación en función del tiempo puede hallarse por integración de la ecuación de momento angular:

$$I^B \frac{d\omega^B}{dt} = M^{\text{ext}} \quad (3)$$

donde  $\omega^B$  es la velocidad angular (respecto del eje  $z_B$ ) y está definida por:

$$\omega^B = \frac{d\theta^B}{dt} \quad (4)$$

y donde  $I^B$  es el momento de Inercia (respecto del eje  $z_B$ ).  $M^{\text{ext}}$  es el Momento Total de fuerzas (respecto del eje  $z_B$ ) producido por las fuerzas externas actuantes sobre el cuerpo rígido.

**Nota 2.1:** Dada una partícula  $j$ , como la partícula azul mostrada en la Fig. (1), que produce una fuerza externa  $\mathbf{F}_j$ , la contribución al momento total de fuerzas  $M_j^{\text{ext}}$  es:

$$M_j^{\text{ext}} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_j)_{z_B} \quad (5)$$

**Nota 2.2:** Dada la posición  $\mathbf{X}^{B,n}$  y orientación  $\theta^{B,n}$ , así como, la velocidad lineal  $\mathbf{V}^{B,n}$  y angular  $\omega^{B,n}$  de un sólido rígido al tiempo  $t^n$ , y conocidas las fuerzas externas  $\mathbf{F}^{\text{ext},n}$  y el momento resultante  $M^{\text{ext},n}$ , se pueden integrar fácilmente las Eqs. (1)-(2) y Eqs. (3)-(4), mediante el método de Newmark, para computar la nueva posición  $\mathbf{X}^{B,n+1}$ , orientación  $\theta^{B,n+1}$  y velocidades  $\mathbf{V}^{B,n+1}$  y  $\omega^{B,n+1}$  del objeto al tiempo  $t^{n+1}$ .

### 3. SIMULACIÓN DE OBJETOS RÍGIDOS MEDIANTE PARTÍCULAS

Los sólidos rígidos no son más que un conglomerado de partículas que mantienen su posición relativa. Siguiendo estas ideas, es posible discretizar el sólido por un conglomerado finito de  $N_b$  partículas. En la Fig. (2), se muestra una discretización de éste tipo para el caso del sólido rígido de la Fig. (1). Allí, las partículas rojas conforman la discretización del sólido.

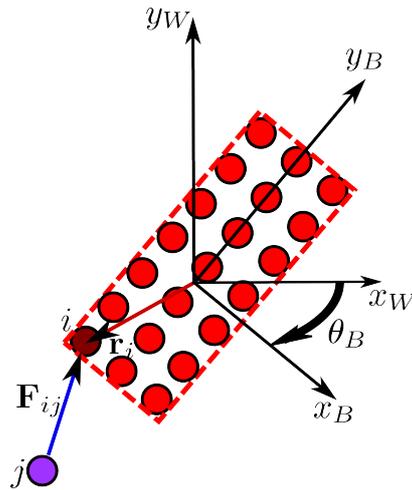


Figura 2: Discretización en Partículas (rojas) de un cuerpo rígido

Denotemos una partícula genérica en el conglomerado por un subíndice  $i$ . Si las masas  $m_i$  y posiciones  $\mathbf{r}_i^0$  y velocidades  $\mathbf{v}_i^0$  iniciales de las partículas al tiempo  $t^0$  son dados entonces es posible determinar la masa total del cuerpo rígido y su momento de Inercia, así como también, la posición  $\mathbf{X}^{B,0}$  y velocidad  $\mathbf{X}^{B,0}$  iniciales del centro de masa. Simplemente, por definición tenemos que:

$$M^B = \sum_{i=1}^{N_b} m_i \quad (6)$$

$$I^B = \sum_{i=1}^{N_b} m_i (\mathbf{r}_i^0 \cdot \mathbf{r}_i^0) \quad (7)$$

$$\mathbf{X}^{B,0} = \frac{1}{M^B} \sum_{i=1}^{N_b} m_i \mathbf{r}_i^0 \quad (8)$$

$$\mathbf{V}^{B,0} = \frac{1}{M^B} \sum_{i=1}^{N_b} m_i \mathbf{v}_i^0 \quad (9)$$

Las fuerzas  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  y momentos actuantes  $M^{\text{ext}}$  sobre el sólido pueden computarse sumando, en cada instante de tiempo, las fuerzas y momentos actuantes en cada partícula  $i$  del sólido. Tenemos así que:

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N_b} \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \quad (10)$$

$$M^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N_b} M_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N_b} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}})_{z_B} \quad (11)$$

**Nota 3.1** En la Fig. (2) se puede observar como una partícula externa  $j$ , ejerce una fuerza externa  $\mathbf{F}_{ij}$  sobre la partícula  $i$  (de color rojo oscuro). A esta fuerza externa se pueden sumar otras fuerzas de otras partículas  $j$  para formar la fuerza resultante externa  $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$  sobre la partícula  $i$ .

**Nota 3.2** Con la computación de las variables físicas definidas por las ecuaciones (6)-(11). Se puede proceder a la determinación del movimiento del sólido discretizado usando las Eqs. (1)-(2) y las Eqs. (3)-(4) y el método de integración temporal indicado en la Nota 2.2.

#### 4. SIMULACIÓN DE FLUIDOS MEDIANTE PARTÍCULAS SPH

La dinámica de fluidos está regida por la ecuación de Navier-Stokes que en forma de divergencia [Limache et al. \(2008\)](#) es:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (12)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del fluido,  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  su aceleración,  $p$  la presión y  $\rho$  la densidad.  $\mu$  es la viscosidad del fluido y  $\boldsymbol{\tau}$  el tensor viscoso:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \frac{\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T}{2} \quad (13)$$

Se ha asumido que las fuerzas externas de volumen son nulas para simplificar la presentación de las ecuaciones.

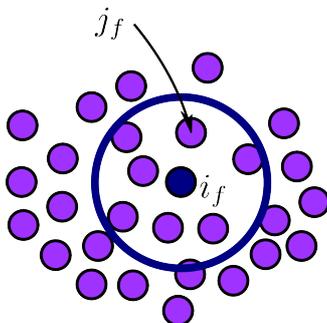


Figura 3: Partículas Fluidas tipo SPH

En SPH el material fluido es discretizado en partículas de una manera similar al caso del sólido rígido presentado en la sección precedente. En la Fig. (3) se muestra una porción de fluido que ha sido discretizado en partículas coloreadas en azul. En SPH, la ecuación (12) se puede computar alrededor de cada partícula fluida  $i_f$  usando un promediado particular. Dicha ecuación promediada resulta ser:

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = \frac{1}{\rho_i} \langle \nabla p_i \rangle + \frac{1}{\rho_i} \langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i \rangle \quad (14)$$

Que puede ser escrita de manera compacta como:

$$m_i \mathbf{a}_i = m_i \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = \mathbf{F}_i^{\text{press}} + \mathbf{F}_i^{\text{visc}} + \mathbf{F}_i^{\text{av}} \quad (15)$$

donde  $m_i$  es la masa asignada a la partícula fluida,  $\mathbf{a}_i$  su aceleración.  $\mathbf{F}_i^{\text{press}}$  denotan las fuerzas de presión promediadas,  $\mathbf{F}_i^{\text{visc}}$  denotan las fuerzas viscosas promediadas y donde  $\mathbf{F}_i^{\text{av}}$  denotan fuerzas de viscosidad artificial (ver ref. Liu y Liu (2003) para más detalles sobre estas fuerzas). Puede verse de la Eq. (15) que las partículas discretizadas mediante SPH se comportan como partículas elementales sobre las que actúan fuerzas externas.

El promediado SPH para el cómputo de las fuerzas actuantes sobre una dada partícula  $i$ , se realiza con las partículas fluidas vecinas contenidas en una región circular centrada alrededor de ésta. Para el caso de la partícula  $i_f$  de la Fig. (3) la región de promediado está definida por el interior del círculo azul. Y por lo tanto todas las partículas fluidas  $j$  contenidas en la región son usadas en el cómputo. Una de estas partículas  $j$  que ejercen fuerzas sobre  $i_f$  es la partícula  $j_f$  mostrada en la figura.

Puede verse Rojas-Fredini y Limache (Nov. 2010); Limache y Rojas-Fredini (Submitted Feb. 2012) que las fuerzas actuantes tienen la forma:

$$\mathbf{F}_i^{\text{press}} = \frac{m_i}{\rho_i} \langle \nabla p_i \rangle = \sum_j m_i m_j \left( \frac{p_j + p_i}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (16)$$

and

$$\mathbf{F}_i^{\text{visc}} = \frac{m_i}{\rho_i} \langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i \rangle = \sum_j m_i m_j \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_j + \boldsymbol{\tau}_i}{\rho_i \rho_j} \right) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (17)$$

En nuestra formulación, los valores del tensor viscoso  $\boldsymbol{\tau}_i$  en cada partícula  $i$  son computados usando Eq. (13), una vez que el gradiente de velocidad  $\nabla \mathbf{v}$  es calculado mediante:

$$\nabla \mathbf{v}_i = \langle \nabla \mathbf{v}_i \rangle = \sum_j m_j \left( \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (18)$$

En las ecuaciones de arriba, el término  $W_{ij}$  representa el valor de la función de peso  $W$ :

$$W_{ij} = W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (19)$$

para una dada distancia  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  entre partícula  $i$  y partícula  $j$ . La función de peso  $W$ , también conocida como función de Kernel, es una función decreciente con la distancia entre partículas. Es máxima para  $r_{ij} = 0$  y se anula cuando  $r_{ij}$  coincide con el radio del círculo de promediado. Por lo tanto, el soporte de la función de Kernel coincide con el área de promediado. Afuera del área de promediado la función es nula. Nótese que  $\nabla_i W_{ij}$  denota el gradiente de la

función de Kernel  $W$ , respecto de la posición  $\mathbf{r}_i$ . Ver Liu y Liu (2003); Limache y Rojas-Fredini (Submitted Feb. 2012) para mayor información.

La única información restante para poder computar las fuerzas actuantes en cada partícula fluida  $i$ , es la determinación de las variables de presión  $p_i$  y densidad  $\rho_i$ . Se puede demostrar usando el promediado SPH que la densidad de una partícula puede computarse mediante la siguiente fórmula:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{N_i} m_j W_{ij} \quad (20)$$

la presión puede determinarse de la ecuación de estado, que para fluidos quasi-incompresibles viene dada por:

$$p = \kappa \left( \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (21)$$

donde  $\kappa$  se define en función de la velocidad del sonido  $c_s$  como:

$$\kappa = \frac{\rho_0 c_s^2}{\gamma} \quad (22)$$

**Nota 4.1** De esta forma, dadas las posiciones  $\mathbf{r}_i^n$  y velocidades  $\mathbf{v}_i^n$  de las partículas fluidas al tiempo  $t^n$ . Mediante las Eqs. (16)-(17), se procede a computar las fuerzas externas producidas por las partículas vecinas  $j_f$  sobre cada partícula  $i_f$ . Una vez computadas las fuerzas, se procede a calcular las aceleraciones  $\mathbf{a}_i^n$  de cada partícula (Eq. 15) y por integración numérica se determina las nuevas posiciones  $\mathbf{r}_i^{n+1}$  y velocidades  $\mathbf{v}_i^{n+1}$  de las partículas, correspondientes al siguiente paso de tiempo  $t^{n+1}$ .

## 5. INTERACCIÓN ENTRE SÓLIDOS Y FLUIDOS MEDIANTE PARTÍCULAS

En las secciones previas se ha descrito separadamente:

1. Como simular sólidos rígidos formados por partículas  $i_b$  sobre las que pueden actuar fuerzas externas producidas por partículas foráneas  $j$  (ver Fig. (2)) y,
2. Como simular fluidos formados por partículas  $i_f$  cuyas fuerzas se determinan por la interacción de presión y viscosidad con las partículas fluidas vecinas  $j_f$  (ver Fig. (3)).

En esta sección describimos como simulamos la interacción entre sólidos y fluidos.

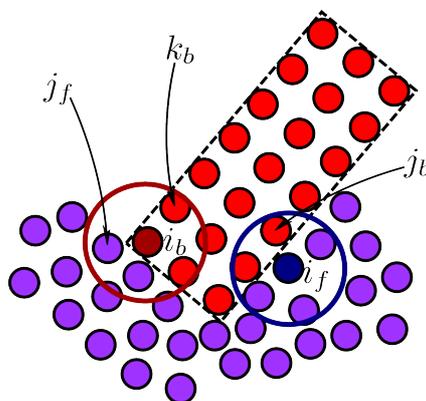


Figura 4: Partículas Fluidas y Sólidas en Interacción

Para analizar el problema observemos la Fig. (4) donde se muestra la zona donde interactúan partículas fluidas (en azul) con las partículas sólidas que conforman el sólido rígido (en rojo). Consideremos los dos casos particulares de interés. En el primer caso, queremos computar las fuerzas que se ejercen sobre una partícula fluida  $i_f$  (mostrada en color azul oscuro) debido a partículas vecinas sólidas como la partícula  $j_b$ . Para lograr simular este caso, extendemos el uso del método de *ghost particles* (Liu y Liu (2003); Limache y Rojas-Fredini (Submitted Feb. 2012)). Se asume entonces que las partículas sólidas actúan también como partículas fluidas ficticias. Y se procede con la computación estándar de las fuerzas sobre  $i_f$  definidas por Eqs. (16)-(17) donde la sumación se realiza no sólo sobre las partículas fluidas reales sino también sobre las partículas ficticias generadas a partir de las partículas sólidas. De esta manera, para el caso de la partícula  $i_f$  mostrada en la Fig. (4), la sumación de fuerzas se realiza sobre todas las partículas vecinas dentro del área de Kernel (círculo azul oscuro), esto es: sobre las 3 partículas fluidas vecinas (en azul) y sobre las 2 partículas fluidas ficticias (en rojo). Una vez computadas las fuerzas sobre partículas  $i_f$ , al tiempo  $t^n$ , se procede al cálculo de sus nuevas posiciones de manera estándar como se indica en la Nota 4.1.

Finalmente en el segundo caso de interés, queremos determinar las fuerzas que se ejercen sobre una partícula sólida  $i_b$  (mostrada en color rojo oscuro) debido a partículas vecinas fluidas como la partícula  $j_f$ . Para lograr simular este caso se asume nuevamente que las partículas sólidas actúan también como partículas fluidas ficticias. Se procede con la computación estándar de fuerzas fluidas (definidas por Eqs. (16)-(17)), esta vez calculando la fuerza actuante sobre  $i_b$  haciendo la sumación únicamente sobre las partículas fluidas reales (que son las únicas que producen fuerzas *externas*). De esta manera para el caso de la partícula  $i_b$  mostrada en la Fig. (4) la sumación de fuerzas se realiza sobre todas las partículas fluidas vecinas dentro del área de Kernel (círculo rojo oscuro), esto es: sobre las 3 partículas fluidas vecinas (en azul). Las fuerzas actuantes sobre las partículas  $i_b$ , al tiempo  $t^n$ , se almacenan como fuerzas del tipo  $\mathbf{F}_{i_b}^{\text{ext}}$ . Luego, se mapean a la estructura del sólido rígido para computar las fuerzas y momentos de acuerdo a las ecuaciones (10)-(11).

**Nota 5.1** Dada la configuración al tiempo  $t^n$ , se computan las fuerzas externas  $\mathbf{F}_{i_b}^{\text{ext}}$  actuantes sobre todas las partículas sólidas  $i_b$  de acuerdo a lo indicado en el párrafo anterior. Luego se procede al cálculo fuerzas y momentos totales (10)-(11) sobre el rígido. La nueva posición y velocidad del sólido queda definida usando la metodología indicada en las Notas 3.2 y 2.2.

## 6. RESULTADOS

A continuación se presentan imágenes de los resultados de una simulación obtenida usando la formulación de partículas descrita en este trabajo. Las simulaciones realizadas pueden ser mostradas a través de una plataforma de simulación y visualización que han desarrollado los autores. Mediante la plataforma uno puede interactuar y cambiar las propiedades físicas y numéricas del problema, en tiempo real, a medida que la computadora simula el proceso. La simulación presentada en éste trabajo consiste en simular la caída de un objeto rígido de forma rectangular en un tanque cilíndrico conteniendo agua en reposo. Los resultados se muestran en la Fig (5).

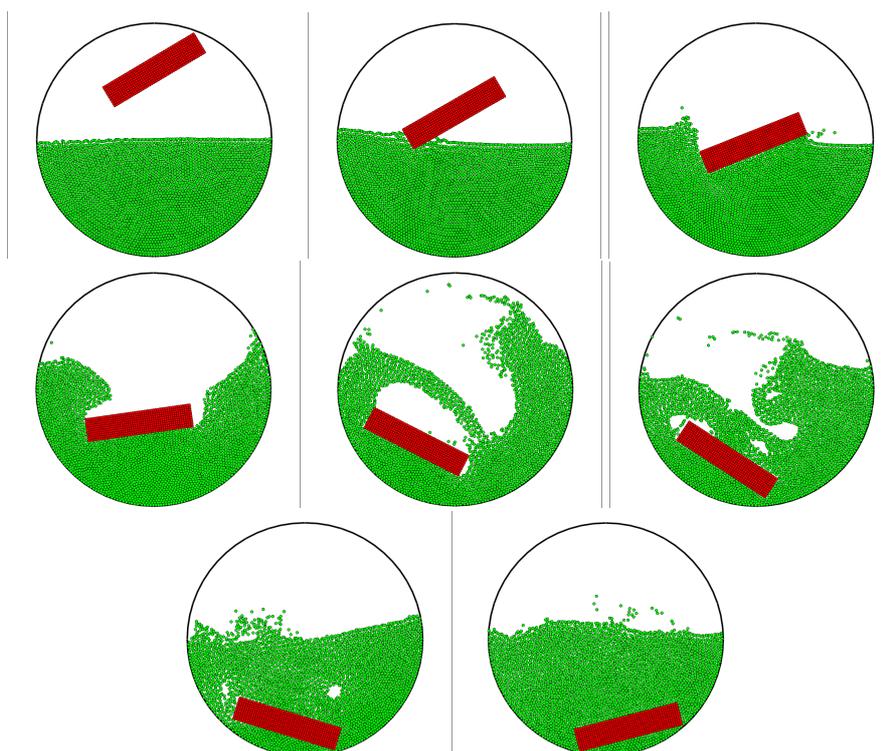


Figura 5: Simulación de la caída de un sólido rígido de forma rectangular en un tanque de agua.

Como se muestra en la figura, al tiempo inicial  $t^0$ , el agua (partículas verdes) está en reposo contenida en un contenedor cilíndrico. Sobre la superficie del agua se coloca un sólido rígido rectangular que ha sido discretizado en un conglomerado de partículas de color rojo. Las imágenes sucesivas muestran la caída de dicho objeto en el agua, hasta que llega al reposo al fondo del tanque.

## 7. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha presentado una formulación unificada para simular fluidos y sólidos rígidos. La formulación ha sido desarrollada por los autores y está basada en la discretización tanto del fluido como del sólido en partículas. La dinámica de las partículas sólidas está integrada a las ecuaciones estándar de sólidos rígidos, mientras que la dinámica de las partículas fluidas está dictada por las ecuaciones de fuerza resultantes derivadas del método Smoothed Particle Hydrodynamics. Se ha logrado realizar simulaciones de interacciones fluido-sólido de gran complejidad. Se planea continuar realizando más investigación y desarrollo sobre esta metodología.

## REFERENCIAS

- Fedkiw R. Stanford computer science. <http://physbam.stanford.edu/fedkiw/>, 2012.
- Gingold R.A. y Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181:375–389, 1977.
- Li S. y Liu W. *Meshfree Particle Methods*. Springer, 2004.
- Limache A. y Rojas-Fredini P. Evaluation of weakly compressible sph variants using derived analytical solutions of taylor-couette flows. *Computational Mechanics*, in review, Submitted Feb. 2012.

- Limache A., Sanchez P., Dalcin L., y Idelsohn S. Objectivity tests for navier-stokes simulations: the revealing of non-physical solutions produced by laplace formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:1703–1759, 2008.
- Liu G. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC Press, 2002.
- Liu M. y Liu G. *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003.
- Lucy L.B. Numerical approach to testing the fission hypothesis,. *Astronomical Journal*, 82:1013–1024, 1977.
- Monaghan J. Smoothed particle hydrodynamics. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 30:543–574, 1992.
- Monaghan J. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 68:1703–1759, 2005.
- Pixar. Pixar animation studios. <http://www.pixar.com/>, 2012.
- Rojas-Fredini P. y Limache A. Simulación de fluidos en tiempo real usando sph. *Mecanica Computacional*, XXIX:4955–4966, Nov. 2010.