

## RESOLUCIÓN DE LA ECUACIONES DE EULER COMPRESIBLES MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

**Germán Weht, Carlos G. Sacco, Mario A. D'Errico**

*Dpto. Mec. Aer., Facultad de Ingeniería, Instituto Universitario Aeronáutico*

*Av. Fuerza Aérea 6500 (X5010JMX) Córdoba, Argentina.*

*e-mail: gweht@iua.edu.ar, página web: <http://www.iua.edu.ar>*

**Palabras clave:** Flujo compresible, Elementos Finitos, Equilibrio termoquímico.

**Resumen.** Se presenta un esquema explícito para simulación de flujos compresibles no viscosos en dominios tridimensionales (3D). El sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se resuelve utilizando el método de los Elementos Finitos (MEF) para la discretización espacial. Para resolver los problemas de estabilidad de origen numérico se utilizó una variante de la formulación conocida como "Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin" (SUPG) de alto orden. Este método es acompañado por un término de captura de choque que provee estabilidad en las discontinuidades. El código fue validado resolviendo distintos problemas test que permitieron analizar la precisión de los resultados. Además se muestran los resultados numéricos y desempeño computacional de varios ejemplos para flujos en régimen transónico, supersónico e hipersónico. En el caso de flujos hipersónicos se utilizan correlaciones termodinámicas de aire en equilibrio termoquímico.

## 1. INTRODUCCIÓN

El método de elementos finitos es ampliamente utilizado para la resolución de problemas gobernados por sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Las ecuaciones de la mecánica de fluidos ha sido uno de los problemas más estudiados y analizados dentro de la mecánica computacional aplicando diversas técnicas, entre ellas los Elementos Finitos. Dentro de la amplia gama de problemas físicos que se pueden representar en la dinámica de fluidos los flujos compresibles en regímenes transónicos y supersónicos presentan características muy particulares, debido a la presencia de discontinuidades en las soluciones por la aparición de ondas de choque. El desarrollo de este tipo de flujos generalmente se analizan mediante las ecuaciones de Euler, donde los efectos viscosos se consideran despreciables.

La presencia de discontinuidades en la solución de las ecuaciones de Euler dan origen a inestabilidades numéricas las cuales producen oscilaciones, que deterioran la calidad de la solución y muchas veces no permiten lograr la convergencia o directamente hacen que el problema diverja.

A lo largo de la historia se han planteado diversas formulaciones y métodos para obtener esquemas que garanticen la convergencia y estabilidad del problema. En general los primeros algoritmos que se plantearon para los esquemas obtenidos de la aplicación del método de los elementos finitos a las ecuaciones de Euler fueron extensiones de métodos desarrollados para la técnica de diferencias finitas (DF) y que brindaban buenos resultados. Luego se comenzaron a plantear esquemas específicos para elementos finitos donde principalmente se utilizan grillas no estructuradas, por lo tanto, los esquemas utilizados en DF no son fácilmente adaptables.

Por otro lado, en la simulación de flujos compresibles mediante las ecuaciones de Euler aparece otra fuente de inestabilidad producida por los términos convectivos. Esta dificultad aparece en diversos problemas y ha sido estudiado por numerosos autores, proponiéndose en la literatura una gran cantidad de algoritmos que brindan buenas soluciones.

Para resolver el problema de la presencia de las ondas de choque, en el presente trabajo se adoptó un método de captura de choques basado en un trabajo de (Codina, 1993). Este algoritmo se basa en añadir una difusión isótropa en las zonas donde están presentes las discontinuidades y se hace nula en el resto del dominio.

En cuanto a la estabilización de los términos convectivos se adoptó un esquema tipo SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) al que se le añade un término que permite obtener un esquema de alto orden (Soto, 2001). En este tipo de algoritmo juega un papel fundamental la correcta estimación de un parámetro denominado tiempo intrínseco, que es el encargado de añadir la cantidad adecuada de difusión numérica para estabilizar el problema discreto sin hacer la solución excesivamente difusiva.

El esquema resultante es transitorio, por lo tanto deben discretizarse las ecuaciones respecto al tiempo. Para ello, en el presente trabajo se utilizó un esquema de Runge-Kutta que permite elegir el orden de la aproximación variando los coeficientes de manera sistemática (Lohner, 2008).

Como es sabido, para que las ecuaciones de Euler cierren se debe utilizar una ecuación adicional que relacionen las propiedades termodinámicas del flujo, generalmente para tal efecto, se utiliza la ecuación de estado suponiendo la hipótesis de gas ideal. Sin embargo, si tratamos con flujos a alta temperatura esta hipótesis deja de ser válida, por este motivo, y para permitir simular flujos a elevados números de Mach, se trabaja con un modelo de gas en equilibrio termoquímico.

Las altas temperaturas en un gas pueden inducir la excitación de los modos vibracionales, la diso-

ciación y eventualmente la ionización de las especies químicas presentes en el gas. En estos casos, la hipótesis de equilibrio químico y termodinámico es adecuada para describir estos fenómenos, independientemente del proceso fluido dinámico que genera las altas temperaturas.

En el trabajo se analizan dos formas de tratar los gases a alta temperatura. La primera aproximación, sólo válida para aire, está basada en el modelo presentado por (Tannehill, 1974). Este modelo presenta una importante ventaja en su bajo costo computacional. El segundo modelo de gas real utilizado está basado en la minimización de la energía libre de Gibbs y permite trabajar con cualquier tipo de gas y con muchas especies al mismo tiempo. El algoritmo utilizado fue desarrollado por (Gordon, 1994) en NASA Lewis Research Center. La principal desventaja del algoritmo es su elevado costo computacional, aunque su potencialidad es mucho mayor que el método de Tannehill.

## 2. ECUACIONES DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS

Las ecuaciones de Euler de la dinámica de fluidos representan un sistema de leyes de conservación no lineal, en las que se desprecian los efectos viscosos.

El sistema queda formado por las ecuaciones de la conservación de masa (1), cantidad de movimiento (2) y conservación de la energía (3),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) + \nabla p = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{V}) = 0 \quad (3)$$

donde  $\rho$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $p$ ,  $e$  y  $h = e + p/\rho$  son la densidad, velocidad, presión, energía total por unidad de masa, y la entalpía respectivamente.

Para cerrar el sistema de ecuaciones se añade la ecuación de estado, la cual nos permite relacionar las propiedades termodinámicas del fluido:

$$p = (\gamma - 1) \rho \left( e - \frac{|\mathbf{V}|^2}{2} \right) \quad (4)$$

donde  $\gamma$  es la relación de calores específicos.

Para el análisis de las ecuaciones de Euler es conveniente escribir las mismas en función del vector de variables conservativas  $\mathbf{U}$  cuya expresión es:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho e \end{bmatrix} \quad (5)$$

siendo  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  las componentes de vector velocidad  $\mathbf{V}$ . Por otro lado, la  $i$ -ésima componente del vector

de flujos advectivos se puede expresar en función de las variables conservativas como

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_1 v_i + p \delta_{1i} \\ \rho v_2 v_i + p \delta_{2i} \\ \rho v_3 v_i + p \delta_{3i} \\ \rho h v_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

Utilizando las variables conservativas y los flujos advectivos las ecuaciones de Euler se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0 \quad (7)$$

Esta ecuación puede ser escrita en su forma cuasi-lineal (Toro, 1999), de forma tal que la ecuación (7) queda expresada mediante:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = 0 \quad (8)$$

donde los  $\mathbf{A}_i = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}}$  se denominan Jacobianos advectivos.

Los Jacobianos advectivos para el caso tridimensional como el que se analiza en este trabajo tienen las siguientes expresiones:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{\gamma}}{2} \|V\|^2 - v_1^2 & (3 - \gamma) v_1 & -\bar{\gamma} v_2 & -\bar{\gamma} v_3 & \bar{\gamma} \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 & 0 & 0 \\ -v_1 v_3 & v_3 & 0 & v_1 & 0 \\ (\bar{\gamma} \|V\|^2 - \gamma e) v_1 & \gamma e - \frac{\bar{\gamma}}{2} \|V\|^2 - \bar{\gamma} v_1^2 & -\bar{\gamma} v_1 v_2 & -\bar{\gamma} v_1 v_3 & \gamma v_1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{\gamma}}{2} \|V\|^2 - v_2^2 & -\bar{\gamma} v_1 & (3 - \gamma) v_2 & -\bar{\gamma} v_3 & \bar{\gamma} \\ -v_1 v_3 & 0 & v_3 & v_2 & 0 \\ (\bar{\gamma} \|V\|^2 - \gamma e) v_2 & -\bar{\gamma} v_1 v_2 & \gamma e - \frac{\bar{\gamma}}{2} \|V\|^2 - \bar{\gamma} v_2^2 & -\bar{\gamma} v_2 v_3 & \gamma v_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_1 v_3 & v_3 & 0 & v_1 & 0 \\ -v_2 v_3 & 0 & v_3 & v_2 & 0 \\ \frac{\bar{\gamma}}{2} \|V\|^2 - v_3^2 & -\bar{\gamma} v_1 & -\bar{\gamma} v_2 & (3 - \gamma) v_3 & \bar{\gamma} \\ (\bar{\gamma} \|V\|^2 - \gamma e) v_3 & -\bar{\gamma} v_1 v_3 & -\bar{\gamma} v_2 v_3 & \gamma e - \frac{\bar{\gamma}}{2} \|V\|^2 - \bar{\gamma} v_3^2 & \gamma v_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

donde por simplicidad se introdujo  $\bar{\gamma} = \gamma - 1$ .

Finalmente, el problema queda definido imponiendo a las ecuaciones (8) las condiciones iniciales y las condiciones de borde adecuadas.

### 3. ESQUEMAS DE ESTABILIZACIÓN Y CAPTURA DE DISCONTINUIDADES.

En esta sección se analizan los esquemas de estabilización de los términos convectivos y la captura de las discontinuidades en la solución por la presencia de las ondas de choque.

#### 3.1. Algoritmo de estabilización

Para la estabilización de los términos convectivos presentes en las ecuaciones (8), se han desarrollado numerosas técnicas. Una de las más utilizadas es la formulación denominada SUPG propuesta inicialmente por (Tezduyar, 1982) con ampliación en (Tezduyar, 2004) y (Tezduyar, 2005), la cual garantiza que las oscilaciones espurias existentes en las zonas de elevados gradientes, oscilaciones intrínsecas del algoritmo numérico utilizado, no se propaguen a todo el dominio computacional.

Básicamente, el método de SUPG consiste en añadir un término a la ecuación (8) discreta, que contemple una contribución elemento a elemento dependiendo del residuo local de la ecuación discreta.

En este trabajo se utiliza una formulación SUPG de alto orden basada en el trabajo presentado por (Soto, 2001) para flujo incompresible. En esta formulación, a los términos del SUPG, se le añade la proyección de los términos advectivos en el espacio de las funciones de forma utilizadas para discretizar el problema. Finalmente la estabilización queda:

$$\tau A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - \vartheta \right) \quad (12)$$

donde  $\vartheta$  es el vector de las proyecciones de los términos convectivos, mientras que  $\tau$  es matriz de tiempo intrínseco y juegan un rol fundamental en la técnica de estabilización. En este trabajo se adopta una formulación de estabilización denominada  $(SUPG)_{82}$  propuesta en (?). Las expresiones que definen a  $\tau$  se obtienen de ???) y se presentan a continuación:

$$\tau_{SUPG}^i = \left( \frac{1}{(\tau_{sugn1}^i)^r} + \frac{1}{(\tau_{sugn2}^i)^r} \right)^{-\frac{1}{r}} ; i = \rho, \mathbf{V}, e \quad (13)$$

asociados con  $\rho$ ,  $\rho V$  y  $\rho e$  respectivamente. Los parámetros involucrados en (13) propuestos en el trabajo original tienen las siguientes expresiones:

$$\tau_{sugn1}^\rho = \tau_{sugn1}^u = \tau_{sugn1}^e = \left( \sum_{a=1}^{n_{en}} \left( c |j \cdot \nabla N| + |u^h \cdot \nabla N| \right) \right)^{-1} \quad (14)$$

$$\tau_{sugn2}^\rho = \tau_{sugn2}^u = \tau_{sugn2}^e = \frac{\Delta t}{2} \quad (15)$$

donde  $N$  son las funciones de forma,  $c$  es la velocidad del sonido,  $\Delta t$  es el paso de tiempo determinado por algún criterio de estabilidad del algoritmo de integración temporal, mientras que  $r$  es un parámetro denominado “ $r$ -switch”, finalmente  $j$  es un vector unitario definido por:

$$j = \frac{\nabla \rho}{\|\nabla \rho\|} \quad (16)$$

Estos parámetros deben ser calculados para cada elemento y en cada paso de tiempo.

### 3.2. Algoritmo de captura de discontinuidades

Como se mencionó en la sección anterior, el método SUPG es ampliamente utilizado debido que los resultados obtenidos son precisos y libre de oscilaciones en gran parte del dominio computacional, salvo en regiones donde se presentan discontinuidades, apareciendo oscilaciones espúreas (overshooting y undershooting) localizadas en las regiones cercanas a las mismas. Estas oscilaciones son de origen numérico, usualmente de pequeña magnitud pero inaceptables en muchas aplicaciones.

Los algoritmos de captura de discontinuidades son utilizados para disminuir las oscilaciones numéricas producidas en zonas cercanas a las discontinuidades en la solución, las cuales en ocasiones se dispersan en todo el dominio de análisis. La idea principal del tratamiento numérico de ondas de choque o discontinuidades, es la introducción de un término de viscosidad artificial adicional en las ecuaciones de conservación. Uno de los primeros métodos en utilizar técnicas de captura de discontinuidades en las ecuaciones de Euler, fue el método de presión pseudo-viscosa introducido en (Neumann, 1950).

El problema básico de todos estos métodos es encontrar la cantidad apropiada de difusión la cual provea las menores oscilaciones (difusión artificial no demasiado pequeña) con una precisión suficientemente elevada (difusión artificial no demasiado grande).

El término de captura de discontinuidades utilizado en este trabajo es similar al desarrollado en (Codina, 1993) donde se adiciona viscosidad de manera anisotrópica utilizando expresiones de los residuos. El término de captura de discontinuidades es:

$$\mu_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \quad (17)$$

donde  $\mu_a$  es un coeficiente de difusión artificial que debe elegirse adecuadamente. Surgen diferentes formas de obtener este parámetro, tal que la adicional de difusión solo tenga efecto en la zona de discontinuidades sin introducir perturbaciones en el resto del dominio de análisis. La expresión utilizada para determinar el término de viscosidad adicional es:

$$\mu_a = \alpha_\mu h (|V| + c) S_e I \quad (18)$$

donde  $\alpha_\mu$  es un coeficiente adimensional,  $h$  es una dimensión característica del elemento y  $S_e$  es un parámetro denominado “*pressure switch*”, el cual se obtiene de promediar sobre el elemento los valores nodales  $S_i$  obtenidos de la siguiente ecuación:

$$S_i = \frac{|\sum_e (p_i - p_k)|}{\sum_e |p_i - p_k|} \quad (19)$$

Puede verificarse de la ecuación anterior que  $S_i = 1$  cuando la presión tiene un máximo (o mínimo) local en el nodo  $n_i$ , y  $S_i = 0$  cuando la presión en el nodo es el promedio del valor de la presión en todos los nodos  $n_k$  adyacentes.

### 3.3. Cálculo de las propiedades de equilibrio termoquímico

Se utilizan dos métodos para obtener las propiedades termodinámicas de un gas a altas temperaturas en equilibrio termoquímico. El primero está basado en aproximaciones polinómicas de las propiedades termodinámicas de aire a altas temperaturas. Estas correlaciones fueron obtenidas por (Tannehill, 1974) y permiten obtener una rápida aproximación del campo fluido con un bajo costo computacional. El segundo método está basado en la subrutina desarrollada por NASA Lewis Research Center llamada CEA2, la cual brinda información de las propiedades termodinámicas, de transporte, ionización, electrones libres, disociación de gases, etc. de las especies químicas presentes en el gas. Esta última es utilizada a través de una subrutina llamada SET (Subrutina de Equilibrio Termoquímico) generada por (Scarpin, 2006). Dicha subrutina sirve de interfaz de cálculo entre CEA2 y el código implementado.

En ambos casos (correlaciones o CEA2), la hipótesis de equilibrio químico y termodinámico es adecuada para describir estos fenómenos, independientemente del proceso fluido dinámico que hace que el gas adquiera la temperatura necesaria para producirlos.

En ambos casos la forma en que se calculan las incógnitas del campo fluido se especifican a continuación:

$$\left. \begin{array}{l} \rho - \text{Densidad} \\ \mathbf{V} - \text{Velocidad} \\ e - \text{energía} \end{array} \right\} \text{ Ecuaciones de conservación}$$

$$\left. \begin{array}{l} T = T(\rho, e) \\ p = p(\rho, e) \end{array} \right\} \text{ Calculadas a partir de las propiedades termodinámicas}$$

De lo anterior notamos que dos propiedades termodinámicas  $(\rho, e)$  son obtenidas de las ecuaciones de conservación (8), y las restantes propiedades termodinámicas pueden ser calculadas conociendo  $\rho$  y  $e$ . En general para aire en equilibrio, con solo dos propiedades termodinámicas podemos definir el estado termodinámico del gas.

En todos los cálculos que involucren equilibrio termoquímico presentados en este trabajo, primeramente se utilizaron las correlaciones de Tannehill y Mugge (Tannehill, 1974), por su eficiencia computacional y finalmente se hace uso de CEA2 (Gordon, 1994) para obtener la solución final.

## 4. DISCRETIZACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

De las ecuaciones de la dinámica de fluidos en forma conservativa (8), considerando los términos asociados a la formulación de estabilidad (12) y captura de discontinuidades (17), se obtiene la siguiente ecuación resultado de la formulación adoptada:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - \tau A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - \vartheta \right) - \mu_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (20)$$

Aplicando el método de residuos ponderados de Galerkin a la ecuación (20) y aproximando  $U$  mediante  $U^h$  obtenemos la forma débil de la misma:

$$\int_{\Omega^e} N^T \frac{\partial U^h}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega^e} N^T A_i^h \frac{\partial U^h}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{\partial N^T}{\partial x_i} \tau A_i^h \left( A_j^h \frac{\partial U^h}{\partial x_j} - \vartheta^h \right) d\Omega + \int_{\Omega^e} \frac{\partial N^T}{\partial x_i} \mu_a^e \left( \frac{\partial U^h}{\partial x_j} \right) d\Omega = 0 \quad (21)$$

El cálculo de las proyecciones de los términos convectivos  $\vartheta^h$  se realiza mediante:

$$\int_{\Omega^e} N^T \vartheta^h d\Omega = \int_{\Omega} N^T A_j^h \frac{\partial U^h}{\partial x_j} d\Omega \quad (22)$$

En las expresiones anteriores  $\Omega = \Sigma \Omega^e$  es el dominio con contorno  $\Gamma$ , mientras que las matrices  $\tau, \mu_a, A_i^h$  son: la matriz de estabilización advectiva, la matriz de términos de captura de choque y los términos advectivos respectivamente.  $N$  es una matriz conteniendo las funciones de forma adoptadas.

## 5. EJEMPLOS

En este apartado se presentan los resultados de varios ejemplos clásicos con el objetivo de validar el código y comparar el desempeño del esquema utilizado. Todos los ejemplos fueron modelados en 3D mediante las ecuaciones de Euler. Las simulaciones fueron realizadas utilizando refinamiento adaptativo con remallado, siguiendo los estimadores de error de [y O.C. Zienkiewicz \(1987\)](#); y [J.Z. Zhu \(1990\)](#).

En un primer ejemplo se muestran 2 casos de cuñas en flujo compresible a dos condiciones de velocidad distintas manteniendo en ángulo de inclinación constante. Este ejemplo permite demostrar la capacidad de capturar tanto la solución fuerte como la solución débil.

En un segundo test se evaluará el patrón de onda resultante de una cuña en un tubo donde se puede apreciar la interacción de las ondas de choque y la forma en que se reflejan en las paredes del tubo.

Como tercer ejemplo se presenta un problema con solución tridimensional que ha sido ampliamente analizado desde el punto de vista experimental. El mismo es un cuerpo que se utiliza para la caracterización de municiones.

Finalmente se presenta un rampa con un flujo en régimen hipersónico, lo que permite demostrar la capacidad del código para resolver problemas con gas real. Por otro lado este ejemplo demuestra la robustez del algoritmo para capturar ondas de choque extremadamente fuertes.

### 5.1. Flujo inviscido sobre cuña $M = 1,5$ y $\delta = 15^\circ$ .

En este primer caso se analizará un problema tradicional de flujo compresible, una cuña a Mach 1,5 y  $\delta = 15^\circ$ . En este caso se busca captar la solución fuerte.

Para el análisis se utilizó una malla de 43253 nodos y 223525 elementos. Se realizó una primera corrida sobre una malla gruesa, para luego utilizar un refinamiento adaptativo y así obtener una buena definición en la onda.

Las condiciones de corriente libre y de contorno, representadas en la figura (1) corresponden a nivel del mar en atmósfera estándar para la presión y temperatura.



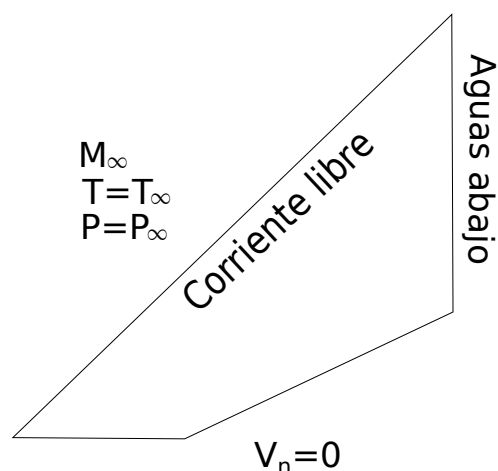


Figura 1: Condiciones de corriente libre y condiciones de contorno para el caso  $M=1.5$  y  $\delta = 15^\circ$ .

A continuación se muestran los resultados obtenidos.

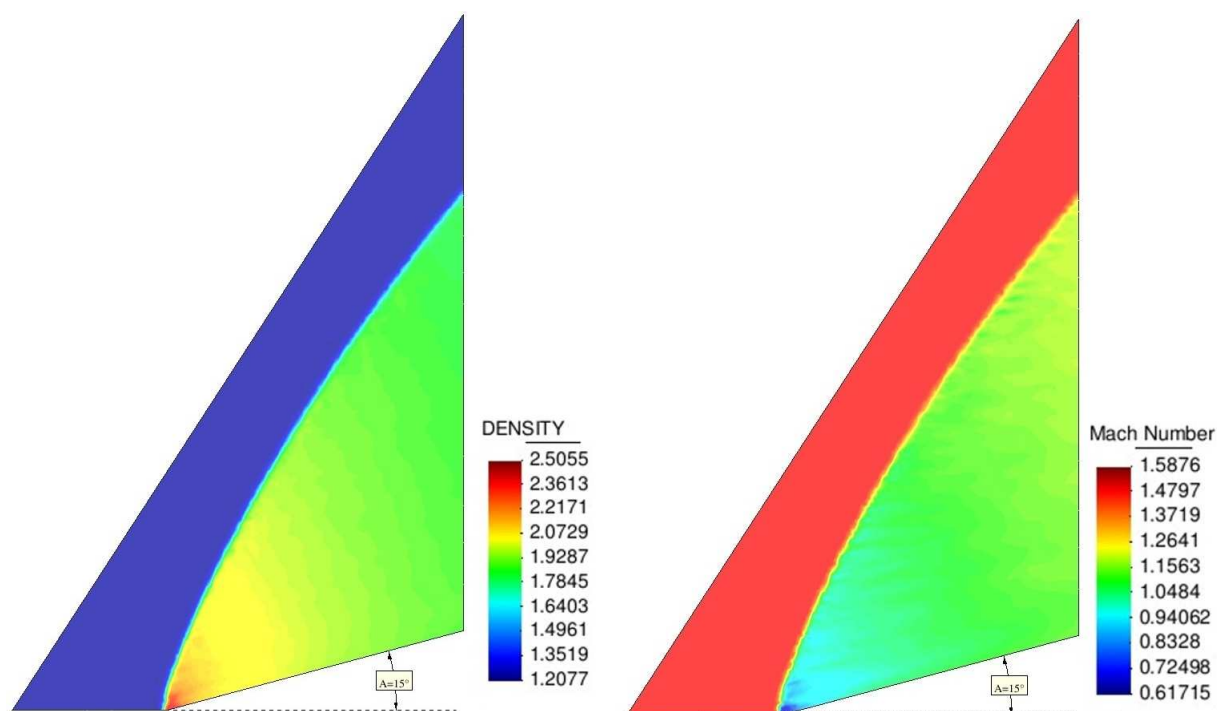


Figura 2: Contornos de densidad y número de Mach respectivamente, para el caso  $M=1.5$  y  $\delta = 15^\circ$

Se muestra una imagen (3) de la malla utilizada para realizar el cálculo.

Como se puede observar de la figura (2), los resultados muestran la onda desplazada del cuerpo y con forma curvada, característica típica de la solución fuerte. Otro signo importante de que se ha obtenido dicha solución es la zona subsónica que se aprecia en la figura (2) en la zona del punto de estancamiento.

## 5.2. Flujo inviscido sobre cuña $M = 2,08$ y $\delta = 15^\circ$ .

Siguiendo con el objetivo de mostrar las soluciones sobre rampas, este caso tiene como objetivo mostrar la solución débil de ondas de choque oblicuas.

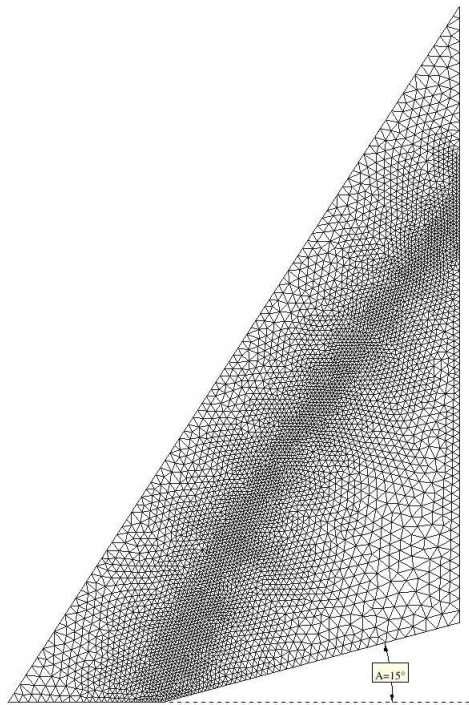


Figura 3: Malla utilizada en el caso de  $M=1.5$  y  $\delta = 15^\circ$ .

Para el análisis se utilizó una malla de 69453 nodos y 367385 elementos. Al igual que en el caso anterior se realizó el mismo método de cálculo, se hizo una primera estimación mediante una malla gruesa, y posteriormente se aplicó un método de refinamiento adaptativo.

Las condiciones iniciales y de contorno son iguales al caso anterior (5.1) y corresponden a las mostradas en la figura (1).

Los contornos de densidad, presión, número de Mach y la malla utilizada se muestran en la figura (4) y (5).

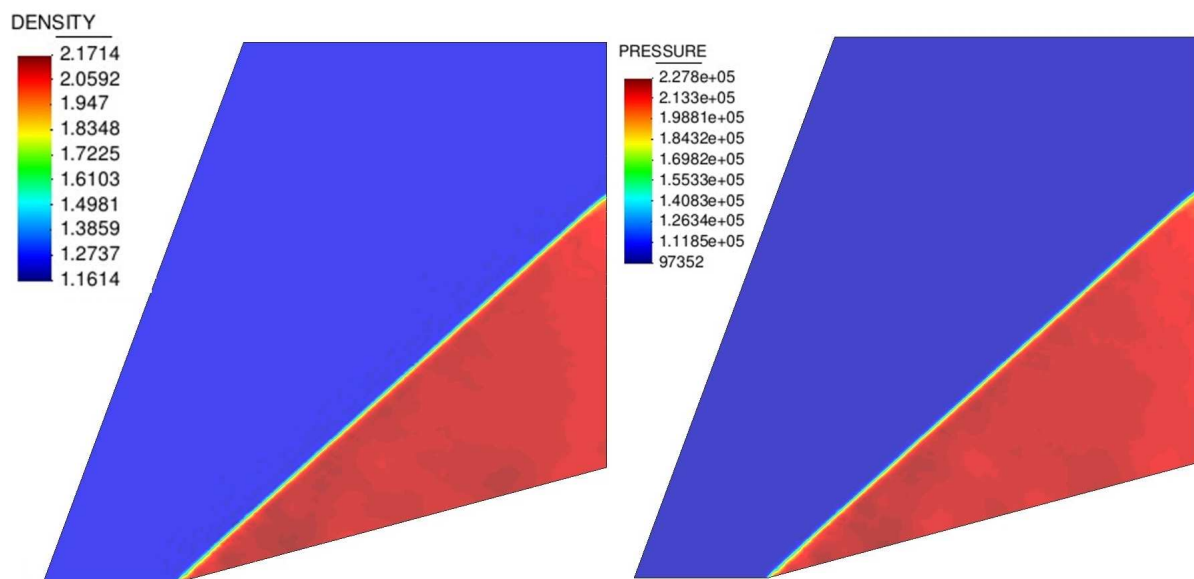


Figura 4: Contornos de densidad y presión para  $M=2.08$  y  $\delta = 15^\circ$ .

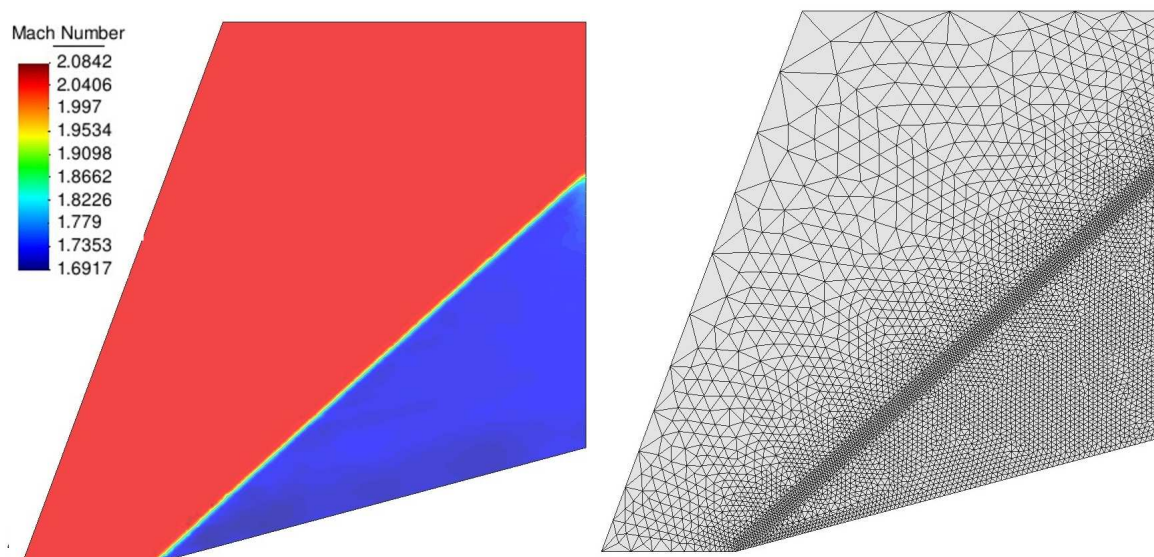


Figura 5: Contorno de número de Mach y malla utilizada para el caso de  $M=2.08$  y  $\delta = 15^\circ$ .

En las figuras se aprecia que la solución obtenida se corresponde correctamente con la solución débil de choque oblicuo del problema planteado, como se esperaba para esta simulación.

Los resultados obtenidos en ambos casos muestran una excelente correlación con los datos analíticos que se pueden encontrar en cualquier bibliografía sobre flujo supersónico.

### 5.3. Flujo supersónico en un ducto

En este ejemplo el objetivo es analizar la interacción de ondas de choque y la reflexión de las mismas en las paredes del dominio. Para realizar esta simulación se utilizó una malla de 67874 nodos y 356032 elementos obtenida tras dos ciclos de refinamiento adaptativo. Las condiciones iniciales son  $T = 288,15 [K]$ ,  $\rho = 1.225 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$ , con  $M_\infty = 2$ . Las condiciones de borde son ( $V_n = 0$ ) en las pared superior e inferior del dominio, mientras que en la entrada del dominio se fijan  $V$ ,  $T$  y  $\rho$ . En la salida se dejan todas las variables libre.

En la figura (6) y (7) se muestran los contornos de densidad, presión y número de Mach, como así también la malla utilizada.

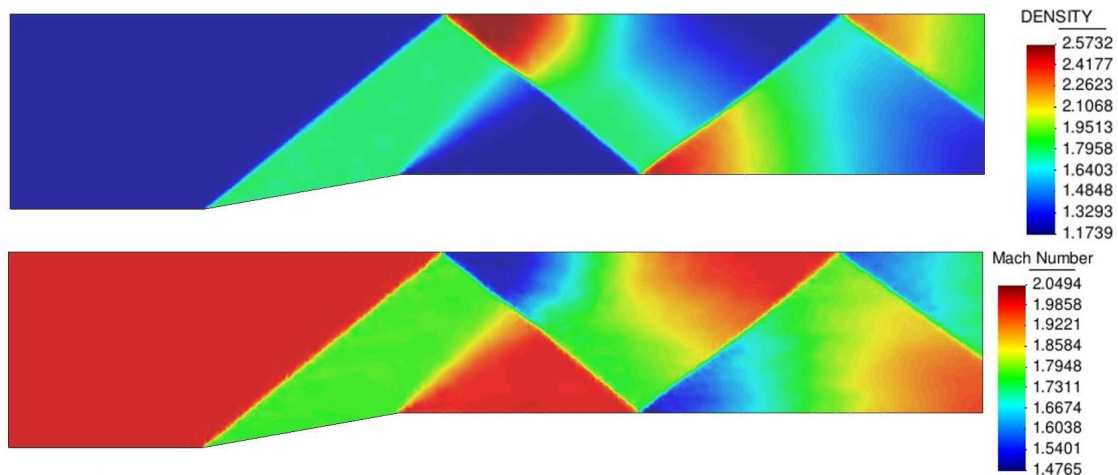


Figura 6: Contornos de número de densidad y número de Mach en un ducto con condiciones  $T = 288,15 [K]$ ,  $\rho = 1.225 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$ , con  $M_\infty = 2$ .

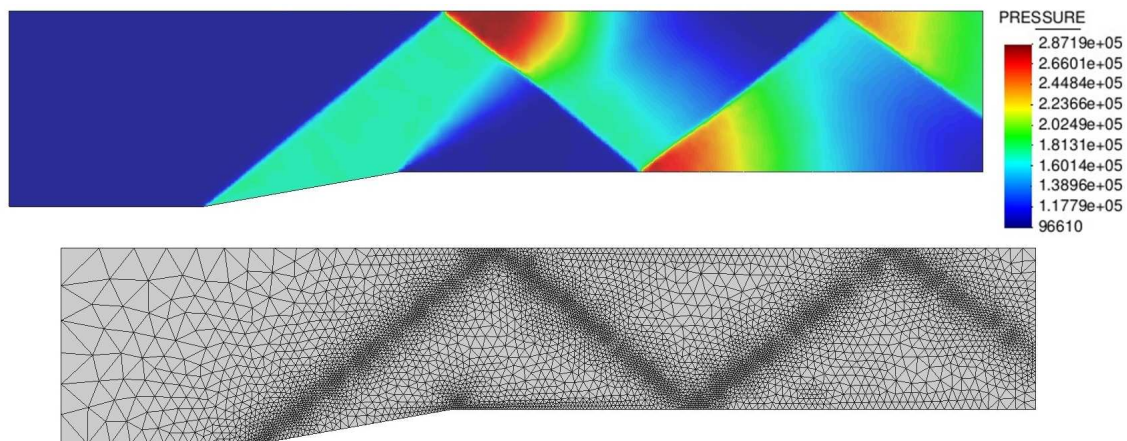


Figura 7: Contorno de presión y malla utilizada con condiciones  $T = 288,15 [K]$ ,  $\rho = 1.225 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$ , con  $M_\infty = 2$ .

De las figuras (6) y (7) se puede observar que se forma una onda de choque en el inicio de la cuña que interfiere con la onda de expansión que se genera en el final de la rampa, dando un patrón de onda particular.

#### 5.4. Caracterización de una munición

Si bien el código presentado es tridimensional todos los problemas anteriores representaban soluciones bidimensionales, por ese motivo en este apartado se plantea un problema con solución 3D. La geometría analizada se corresponde con un *spinner* de la ARMY-NAVY (Schmidt, 1954) que se utiliza generalmente para análisis de balística externa. Este cuerpo ha sido muy estudiado en túnel de viento y ensayos de campo, contándose con una gran cantidad de datos para su análisis. La geometría está dada en la figura (8).



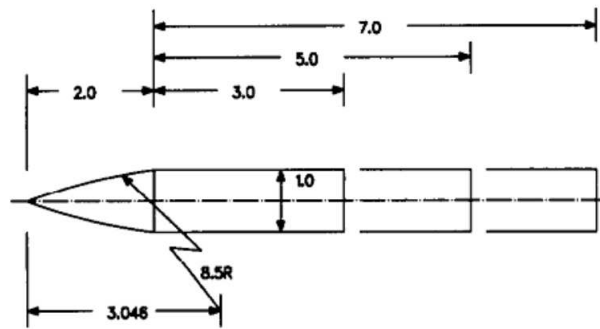
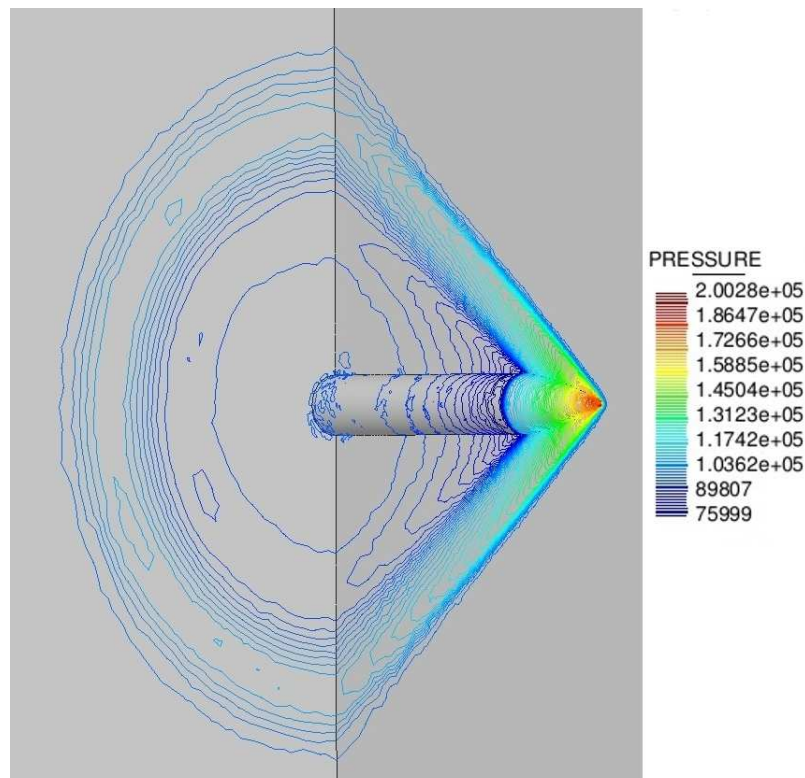


Figura 8: Geometría del ARMY-NAVY spinner.

Las medidas están referenciadas a un calibre, en nuestro caso se tomó 1 calibre = 20mm.

Se utilizaron mallas de  $1,5 \times 10^6$  elementos aproximadamente con remallado adaptativo para cada componente de la matriz de cálculo (variación de Mach y ángulo de ataque).

Las condiciones para el ensayo son  $T = 288,15 [K]$ ,  $\rho = 1.225 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$  y  $M = 1,8$ . El cálculo se realizó con el fin de conocer la resistencia de onda generada por dicho cuerpo. Los contornos de presión y número de Mach son presentados a continuación:

Figura 9: Contorno de presión ARMY-NAVY spinner para  $M_\infty = 1.8$  y  $\alpha = 0^\circ$ .

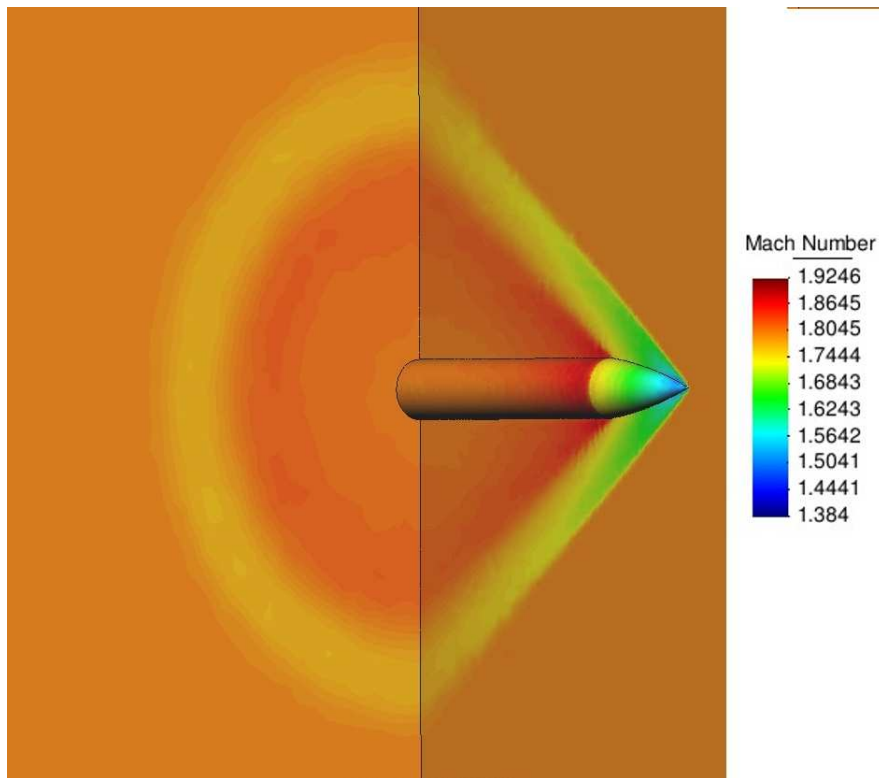


Figura 10: Contorno de número de Mach ARMY-NAVY spinner para  $M_\infty = 1.8$  y  $\alpha = 0^\circ$ .

Los resultados obtenidos se corresponden de manera satisfactoria a los presentados en (Schmidt, 1954).

### 5.5. Rampa Hipersónica

En este caso se analizará la influencia de la alta velocidad en el flujo sobre cuñas. La solución del flujo sobre cuñas es exactamente la solución del flujo a través de una onda de choque oblicua. Se sabe que para un valor dado de ángulo de cuña  $\delta$  pueden existir teóricamente dos ángulos de onda  $\beta$  correspondientes a una de onda de choque fuerte. Para el caso de cuñas moviéndose en vuelo atmosférico, la única solución posible es la onda de choque débil. Mediante las ecuaciones de conservación en 1 dimensión es posible encontrar, usando métodos iterativos, la solución analítica para aire calórico perfecto ( $\gamma = \text{cte}$ ) y en equilibrio. La malla utilizada en este caso consta de 27763 nodos y 115035 elementos.

Se presentan una comparación de los resultados obtenidos para aire calórico perfecto y en equilibrio, entre las ecuaciones de conservación 1D y el esquema en elementos finitos implementado.

Las condiciones de corriente libre son:  $\rho_\infty = 0,0039 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$ ,  $T_\infty = 251,1 [K]$  y  $V_\infty = 10 \left[ \frac{Km}{s} \right]$  para una cuña de inclinación  $\delta = 40^\circ$ , dichas condiciones corresponden a una altitud de vuelo de 40 Km. Las condiciones de borde impuestas son:  $\rho = \rho_\infty$ ,  $V = V_\infty$ ,  $T = T_\infty$  a la entrada del dominio, velocidad normal nula ( $V_n = 0$ ) sobre la base y aguas abajo las condiciones se dejan libres.

El número de Courant utilizado en este problema fue  $CFL = 0.1$

| Descripción                | Relación             | Sol. Analítica<br>$\gamma = 1,4$<br>cte. | Sol. Exacta<br>Gas en<br>Equilibrio | Sol. CFD<br>Gas en<br>Equilibrio |
|----------------------------|----------------------|--|-------------------------------------|----------------------------------|
| Ángulo de la onda          | $\beta$              | 52.24                                    | 43.82                               | 44.8                             |
| Relación de velocidades    | $V_2/V_\infty$       | 0.62                                     | 0.72                                | 0.70                             |
| Relación de presiones      | $p_2/p_\infty$       | 722.5                                    | 619.9                               | 600.7                            |
| Relación de densidades     | $\rho_2/\rho_\infty$ | 5.95                                     | 14.38                               | 13.2                             |
| Relación de temperatura    | $T_2/T_\infty$       | 121.4                                    | 28.06                               | 27.5                             |
| Relación de número de Mach | $M_2/M_\infty$       | 0.057                                    | 0.122                               | 0.122                            |

Tabla 1: Comparación entre los resultados obtenidos mediante la solución analítica y CFD para aire calórico perfecto ( $\gamma = 1.4$  cte) y aire en equilibrio.

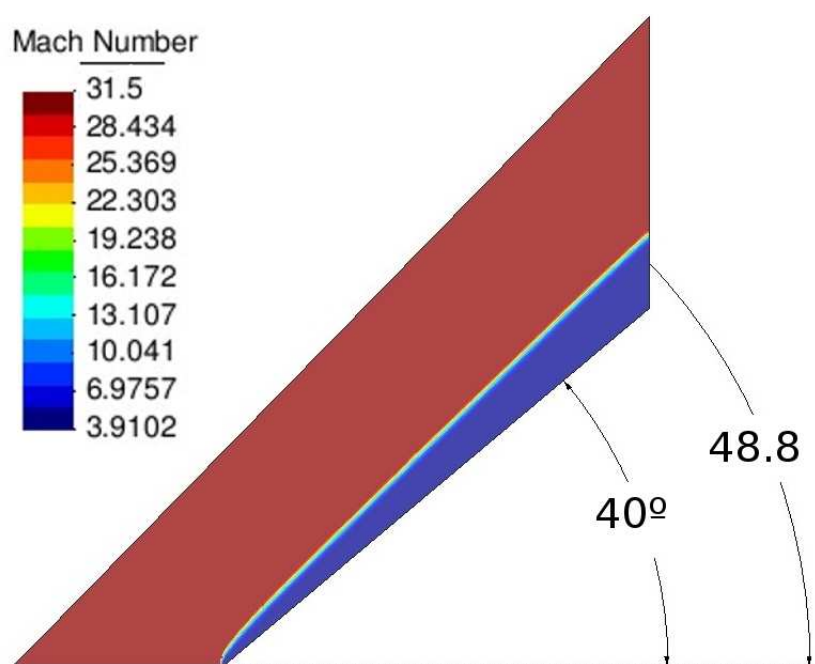


Figura 11: Contorno de temperatura obtenido mediante el esquema en elementos finitos (FEM) para aire en equilibrio termoquímico con condiciones iniciales:  $\rho_\infty = 0,0039 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$ ,  $T_\infty = 251,1 [K]$  y  $V_\infty = 10 \left[ \frac{Km}{S} \right]$ .

De la tabla (1) observamos que los resultados obtenidos con el código implementado difieren respecto a los calculados analíticamente. Debido a la proximidad de la onda al cuerpo y los elevados gradientes en las cercanías a las discontinuidades, la excesiva difusión aportada por el término de captura de choque daña la solución.

## 6. CONCLUSIONES.

Se desarrolló un modelo numérico explícito de las ecuaciones de Euler utilizando el método de los elementos finitos. Los resultados obtenidos son satisfactorios respecto a las soluciones analíticas.

De la implementación de las rutinas de cálculo de las propiedades en equilibrio podemos decir que se ha logrado obtener un código satisfactorio, para estimar flujos que involucren gases a altas temperaturas. Un detalle importante a destacar en la utilización de estas rutinas es que el tiempo computacional aumenta

debido a su uso y además los CFL utilizados son bajos.

Entre las posibles mejoras futuras a implementar en el esquema, una de ellas es trabajar sobre el algoritmo de captura de discontinuidades; esto debido a que las soluciones obtenidas en las zonas donde ocurren discontinuidades presentan pequeñas oscilaciones o inestabilidades locales. Además cuando se trabaja con altos números de Mach los gradientes en las cercanías de las discontinuidades son elevados, necesitando refinar sobre la onda y el cuerpo para obtener soluciones precisas.

## 7. AGRADECIMIENTOS

Se agradecen los aportes del Ministerio de Defensa quién financia el proyecto “Desarrollo de un código de flujo compresible mediante el método de elementos finitos” en el marco de los proyectos de investigación y desarrollo para la defensa (PIDDEF).

## REFERENCIAS

- Codina R. A discontinuity capturing crosswind dissipation for the finite element solution of the convection-diffusion equation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 110, 1993.
- Gordon S.y.M.B.J. Computer program for calculation of complex chemical equilibrium compositions and applications. *NASA Reference Publication 1311*, 1-2, 1994.
- Lohner R. *Applied computational fluid dynamics techniques: An introduction based on finite element method*. John Wiley and Sons, 2008.
- Neumann J. y Richtmyer R. A method for the numerical calculations of hydro-dynamical shocks. *Math. Phys.*, 21, 1950.
- Scarpin G.H. Cálculo de las propiedades de mezcla de gases en equilibrio termodinámico. *Msc. Dissertation*, Instituto Universitario Aeronáutico, 2006.
- Schmidt L. E. y Murphy C.H. Blr mr 775. 1954.
- Soto O. y Lohner R. A time-accurate implicit-monolithic finite element scheme for incompressible flow problems. *ECCOMAS*, 2001.
- Tannehill J.C. y Mugge P. Improved curve fits for the thermodynamic properties of equilibrium air suitable for numerical computation using time-dependent or shock- capturing methods. *NASA CR-2470*, 1974.
- Tezduyar T. E. y Masayoshi S. Stabilization and shock-capturing parameters in supg formulation of compressible flows. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195, 2005.
- Tezduyar T.E. Determination of the stabilization and shock-capturing parameters in supg formulation of compressible flows. *ECCOMAS*, 2004.
- Tezduyar T. E. y Hughes T.J.R. Development of time-accurate finite element techniques for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations. *NASA Tech. Rep. NASA-CR-204772*, 1982.
- Toro E. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 1999.



y J.Z. Zhu O.Z. The three r's of engineering analysis and error estimation and adaptivity. *Comp. Methods Appl. Mech. and Eng*, Vol. 82:95–113, 1990.

y O.C. Zienkiewicz E.R. A simple error estimator in the finite element method. *Common. Appl. Num. Methods*, Vol. 3:243–249, 1987.