

## CÁLCULO PARALELO EN PROBLEMA DE MECÁNICA DE FLUIDOS CON SUPERFICIES LIBRES: SIMULACIÓN Y VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

Marcela A. Cruchaga<sup>a</sup>, Ricardo S. Reinoso<sup>a</sup> and Mario A. Storti<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad de Santiago de Chile – USACH, Av. Bdo. O’Higgins 3363, Santiago, Chile, marcela.cruchaga@usach.cl*

<sup>b</sup>*CIMEC, INTEC - Universidad Nacional del Litoral, Colectora Ruta Nac 168, Km 472, Paraje El Pozo 3000 Santa Fe, Argentina*

**Palabras claves:** superficie libre, simulación numérica, cálculo en paralelo, validación experimental

**Resumen.** En este trabajo presentamos un estudio numérico y experimental para el problema de fluidos confinados en estanques de sección rectangular sometidos a desplazamientos impuestos. Para la simulación se utiliza una formulación que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes en forma monolítica para todo el dominio de análisis. El seguimiento de la superficie libre se realiza con un método de seguimiento Lagrangeano partículas marcadoras de la interfaz. El código de análisis existente en su versión secuencial se extiende y adapta a una arquitectura paralela de memoria compartida utilizando estructuras del software libre *Open Multiprocessing standard (OpenMP)* en los bloques de cálculo de matrices y vectores del método de elementos finitos. Para la solución del sistema algebraico resultante se utilizan las librerías incluidas en el compilador del procesador *Intel Math Kernel Library (MKL)*. Los resultados de la evolución de la superficie libre en puntos de control determinados se validan con los registros experimentales obtenidos con sensores ultrasónicos de nivel. Las experiencias se realizan en una mesa vibradora que permite imponer desplazamientos controlados a un estanque contenedor de agua de sección rectangular. El movimiento impuesto es del tipo senoidal y se realiza un barrido de frecuencias con la finalidad de analizar el comportamiento de la superficie libre para frecuencias cercanas a resonancia en el primer modo del sistema analizado.

## 1 INTRODUCCIÓN

El estudio de la evolución de la superficie libre de líquidos en el interior de estanques contenedores sometidos a aceleraciones externas es de interés en diversas aplicaciones de la ingeniería. Entre ellas puede mencionarse el transporte, tanto terrestre como marítimo, de líquidos o el estudio del comportamiento de estanques durante un sismo para analizar su funcionamiento estructural o para evaluar su influencia en mitigar los efectos sísmicos actuando como absorbedor de vibraciones. Para este tipo de problemas interesa describir la evolución de la superficie libre con la finalidad de determinar las cargas hidrodinámicas sobre las paredes del contenedor. También interesa determinar las frecuencias propias del sistema para evaluar las condiciones de resonancia durante las maniobras. Debido a esto, el problema de agitación de líquidos en estanques contenedores ha sido estudiado por diversos autores desde el punto de vista analítico, experimental y numérico. En este trabajo proponemos la verificación experimental de los resultados numéricos obtenidos con los desarrollos propuestos para realizar cómputo paralelo en memoria compartida.

Dentro de los estudios analíticos realizados en sistemas de estanques de sección rectangular, cuadrada y circular se destacan los desarrollos de [Faltinsen et al., 2000, 2005 y 2010](#); basados en modelos no viscosos e irrotacionales para el cálculo del flujo. Sus desarrollos han aportado claridad en el comportamiento de modos de vibración en frecuencias bajas cercanas a los primeros modos de resonancia de los sistemas estudiados.

Desde el punto de vista de la modelación numérica, este tipo de análisis es ampliamente utilizado para la evaluación del comportamiento a largo plazo de las formulaciones propuestas. Dentro de la diversidad de las metodologías desarrolladas para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas al seguimiento de superficies libres, pueden mencionarse las técnicas de captura utilizadas por [Aliabadi and Tezduyar, 2000](#) para el análisis de la hidrodinámica de superficies libres en camiones aljibes. [Akyildiz and Ünal, 2006](#) y [Liu and Lin, 2008](#) presentan un análisis comparativo numérico-experimental utilizando la técnica de fracción de volumen (*volume-of-fluid, VOF*) para el seguimiento de la interfaz líquido-aire. [Löhner et. al., 2006](#) presenta una técnica de paso fraccionario para el tratamiento de las ecuaciones de la mecánica de fluido junto a una metodología tipo *VOF* para el tratamiento de la superficie libre, mostrando satisfactorios resultados para el tratamiento de superficies que modifican violentamente su forma en problemas de comportamiento temporal a largo plazo. También han sido utilizados programas comerciales de cálculo fluidodinámico para el análisis de este tipo de problemas como es presentado por [Virella et al., 2008](#) donde se determina el efecto sobre la frecuencia natural al realizar análisis considerando el comportamiento lineal o no lineal para el tratamiento de la propagación de ondas de la superficie libre. En dicha referencia se ha encontrado que el comportamiento obtenido a través de modelos no lineales no introducen modificaciones significantes respecto a los lineales. [Idelsohn y colaboradores, 2001, 2006](#) han desarrollado técnicas lagrangeanas para la solución numérica de problemas de flujo incompresible de un fluido no viscoso con superficies libres aplicadas con éxito en el análisis del oleaje que impacta sobre barcos aljibes.

Éstas y muchas otras aplicaciones de las formulaciones propuestas a problemas de Ingeniería requieren de elevados tiempos de cálculo no sólo porque demandan soluciones para tiempos a muy largo plazo sino que además necesitan exactitud en las predicciones y/o, muchas otras veces, cubrir grandes dominios de análisis. Para alcanzar ambas metas, además de mejorar las formulaciones, se utilizan normalmente discretizaciones espaciales con gran número de grados de libertad y pasos temporales, lo que ha llevado desde hace ya tiempo a elaborar estrategias de cálculo simultáneo en más de un procesador. Además de las grandes máquinas desarrolladas para tal fin se ha planteado como alternativa la interconexión de

computadores personales en sus formas de memoria distribuida y/o compartida entre procesadores. Una alternativa más reciente y en pleno desarrollo es la utilización de placas gráficas con fines de cálculo. Estas técnicas permiten resolver problemas de gran escala en términos de tiempo y grados de libertad reduciendo significativamente los tiempos de cómputo. Claro que, esto no es sólo un tema de desarrollo de hardware sino de los programas de cálculo utilizados en las arquitecturas disponibles para cálculo en paralelo. Son muchos los trabajos dirigidos al último aspecto mencionado, pudiendo mencionarse entre ellos los trabajos realizados por [Aliabadi and Tezduyar, 2000](#); [Sonzogni et al., 2002](#); [Paz and Storti, 2005](#); [Löhner et al., 2006](#); [Paz et al., 2006](#); [Dalcín et al., 2008](#); y las referencias contenidas en ellos y los trabajos emanados de los referidos grupos de investigación.

En este artículo se presenta una alternativa de programación en paralelo para modificar un código secuencial preexistente mejorando sus capacidades de cálculo. El código se adapta a la arquitectura paralela disponible realizando cálculo en memoria compartida. Con esta finalidad, los bloques de cálculo de matrices y vectores del método de elementos finitos se reescriben utilizando las estructuras del software libre *Open Multiprocessing standard (OpenMP)* mientras que la solución del sistema algebraico resultante se realiza con rutinas disponibles en las librerías del compilador, *Intel Math Kernel Library (MKL)*.

La formulación numérica de elementos finitos de malla fija corresponde a la desarrollada por [Cruchaga et al., 2001, 2006, 2010](#). En el presente estudio, realizamos un análisis de tiempos de cálculo para la simulación de una cavidad cúbica a  $Re=1000$  y proponemos la simulación del comportamiento de un líquido confinado en un estanque contenedor de relación de aspecto 2:1 sometido a cargas cíclicas controladas y del que se presenta, además, mediciones experimentales obtenidas en un modelo físico con la finalidad de validar la codificación propuesta.

Los aspectos característicos de la formulación utilizada y de la versión paralela del código se presentan en la Sección 2. En la Sección 3 se resume el trabajo experimental desarrollado. Los resultados numéricos obtenidos son expuestos en la Sección 4 junto a su validación experimental y, finalmente, se presentan las conclusiones.

## 2 TÉCNICAS NUMÉRICAS

### 2.1 Ecuaciones fundamentales y forma débil

El seguimiento de una superficie interfaz requiere determinar las velocidades y presiones en conjunto con la posición de la superficie libre. Este tipo de problemas es clásicamente resuelto con las ecuaciones de Navier-Stokes incompesibles para fluidos Newtonianos que se escriben como:

- conservación de la cantidad de movimiento:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}) = \rho \mathbf{g} \quad \text{en } \Omega \times Y \quad (1)$$

- ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \times Y \quad (2)$$

donde  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y  $\mathbf{g}$  son el vector velocidad, la presión, la densidad, la viscosidad dinámica, el tensor tasa de deformación y el vector gravedad. El símbolo  $\nabla$  representa el operador gradiente espacial y el punto sobre una variable indica su derivada parcial respecto del

tiempo. Estas ecuaciones se resuelven en el dominio completo de análisis  $\Omega$  de contorno  $\Gamma$  para el intervalo de tiempo de interés  $Y$  y necesitan para la completa definición de cada problema las respectivas condiciones de contorno e iniciales.

La evolución de la superficie libre entre dos fluidos de interés, aire y agua por ejemplo, cuyos dominios satisfacen en todo instante las condiciones de  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  y  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , necesita ser determinada mediante una ecuación adicional como ser la que se indica en el apartado siguiente en el contexto de dominios discretizados con mallas fijas.

Las principales características de la formulación de elementos finitos utilizada para la solución del sistema de ecuaciones (1) y (2) puede resumirse como (para detalles ver [Cruchaga and Oñate, 1997](#); [Cruchaga et al., 2001, 2006, 2010](#)):

- la formulación débil se escribe en el contexto de la técnica conocida como ponderación generalizada a contracorriente (*Generalized Streamline Operator Technique*, GSO) que permite el uso de igual orden de interpolación para las variables primitivas del problema (velocidad y presión).
- la integración de los elementos por los que pasa el frente material es mejorada integrando por partes el dominio elemental. Estas partes o subdominios quedan definidos por la interfaz y el elemento se subdivide por dicha interfaz para integrar exactamente cada porción del mismo. Una alternativa es integrar por cuadrículas regulares definidas en el espacio isoparamétrico evitando casos complejos de intersecciones elementales con el frente material. Esta integración elemental evita regularizar las propiedades y es diferente a incrementar el número de puntos de integración.
- el seguimiento del frente material se realiza en este contexto mediante una aproximación lagrangeana de la trayectoria de marcadores de la superficie. Esta metodología se resume en el apartado siguiente.
- la formulación es monolítica.

## 2.2 Seguimiento de la superficie libre: seguimiento lagrangeano de la interfaz

La interfaz entre dos fluidos se define por una colección de puntos que sirven de marcadores de la interfaz. El seguimiento del movimiento de dicha interfaz se realiza actualizando la posición de dichos marcadores de acuerdo a un esquema lagrangeano simple de actualización definido como:

$$\mathbf{X}^{t+dt} = \mathbf{X}^t + dt \mathbf{V}^{t+\alpha dt} \quad (3)$$

donde  $dt$  es el paso de tiempo,  $\alpha$  es el parámetro de integración (normalmente es 1.0),  $\mathbf{X}^t$  es el vector de la posición conocida de los marcadores de la interfaz a tiempo  $t$ ,  $\mathbf{X}^{t+dt}$  es la nueva posición de los marcadores del frente para  $t+dt$  y  $\mathbf{V}^{t+\alpha dt}$  es la velocidad de los puntos marcadores.

Esta formulación básica se completa con dos estrategias numéricas que le dan robustez al método:

- algoritmo de conservación global de la masa que interpreta y corrige el desbalance de masa producido por el flujo másico a lo largo de la superficie móvil. Este es normalmente pequeño pero acumulativo en el tiempo, por lo cual y en particular en formulaciones de malla fija necesita ser tenido en cuenta. El algoritmo utilizado en el presente análisis, por tratarse de fluidos incompresibles, se basa en principios de optimización del volumen ([Cruchaga et al., 2001, 2010](#)). El desbalance de masa introducido por la forma discreta de la ecuación de seguimiento de la interfaz ha sido evaluada en trabajos previos y detectada con la utilización de diversas técnicas numéricas. La influencia en el comportamiento de la interfaz móvil y el efecto de esta corrección fue evaluada en los trabajos citados.

- un algoritmo de remallado de la superficie libre, es decir de redistribución de los marcadores para evitar fuertes distorsiones en la discretización de la superficie libre. El procedimiento propuesto preserva las curvaturas de la superficie libre para redistribuir los marcadores (Cruchaga *et al.*, 2006, 2010).

### 2.3 Algoritmo paralelo

En el presente trabajo, como se mencionó anteriormente, se hace uso del estándar *OpenMP* para realizar el cómputo en memoria compartida de los lazos de cálculo de matrices y vectores asociados al método de elementos finitos. El sistema de ecuaciones algebraicas resultantes se resuelve utilizando las rutinas incluidas en las librerías MKL, en particular se programaron las interfaces necesarias para un método directo y otro iterativo, individualizados respectivamente como *Parallel Direct Sparse Solver Interface (PARDISO)* e *Iterative Sparse Solvers based (ISS)* de la librería MKL. El método ISS incluye preconditionamiento de la matriz mediante la factorización incompleta de la descomposición LU. En la Sección 4 se presenta una evaluación de las capacidades del algoritmo paralelo resultante.

## 3 MODELO FÍSICO Y TOMA EXPERIMENTAL DE DATOS

En este estudio se ha utilizado un modelo físico de un estanque de sección rectangular de aspecto 2:1 para ser ensayado en una mesa vibradora con la finalidad de registrar la evolución de la superficie libre a través de sensores ultrasónicos ubicados en determinados puntos de control. Las dimensiones del estanque son: largo 388 mm, ancho 183 mm y alto 490 mm (sólo relevante para no derramar líquido). La precisión en la medición de niveles es  $\pm 0.5$  mm. La disposición de la experiencia, la ubicación CP1, CP2 y CP3 de los sensores utilizados y la geometría del estanque se presentan en la Figura 1. El estudio se centra particularmente en caracterizar el comportamiento estacionario durante vibración forzada a frecuencias bajas con la finalidad de identificar las dos primeras frecuencias naturales y las transiciones entre movimientos planos lineales, planos no lineales y tridimensionales en ese rango de frecuencias. En el presente análisis se presentan los resultados experimentales para sólo dos frecuencias: una por debajo y otra por sobre la frecuencia de resonancia primaria en dirección del movimiento impuesto, en las que se obtienen movimientos planos, es decir que no presentan efectos 3D. El movimiento horizontal impuesto tiene una amplitud de 10 mm con frecuencias  $0.75f_n$  y  $1.1f_n$  siendo  $f_n$  la primer frecuencia natural definida como  $f_n = (g/(4\pi l)\tanh(\pi d/l))^{1/2}$  donde  $g$  es la gravedad,  $l$  es el largo del estanque (ver Figura 1) y  $d$  es la profundidad de llenado que en los casos presentados es 100 mm. Para la configuración descrita resulta  $f_n = 1.16$  Hz. La excitación externa es aplicada durante 150 s instante en el cual el movimiento de la mesa vibratoria cesa. La Figura 2 muestra la evolución de la superficie libre para los puntos identificados como CP1 y CP2 (en la Figura 1) para las frecuencias ensayadas  $0.75f_n$  y  $1.1f_n$ . Se identifican los regímenes característicos durante excitación forzada: transitorio inicial y estacionario; así como el comportamiento en vibración libre una vez que cesa el movimiento impuesto a la mesa. La Figura 3 muestra un detalle de la evolución de la superficie durante el comportamiento forzado estacionario registrado en los sensores ubicados en CP1, CP2 y CP3 para las dos frecuencias analizadas, dichas curvas muestran idéntico registro para CP1 y CP3 demostrando el comportamiento bidimensional del movimiento y el desfase de un período entre los registros de CP1 y CP2. Estas mediciones son utilizadas para validar las predicciones numéricas reportadas en la Sección 4.

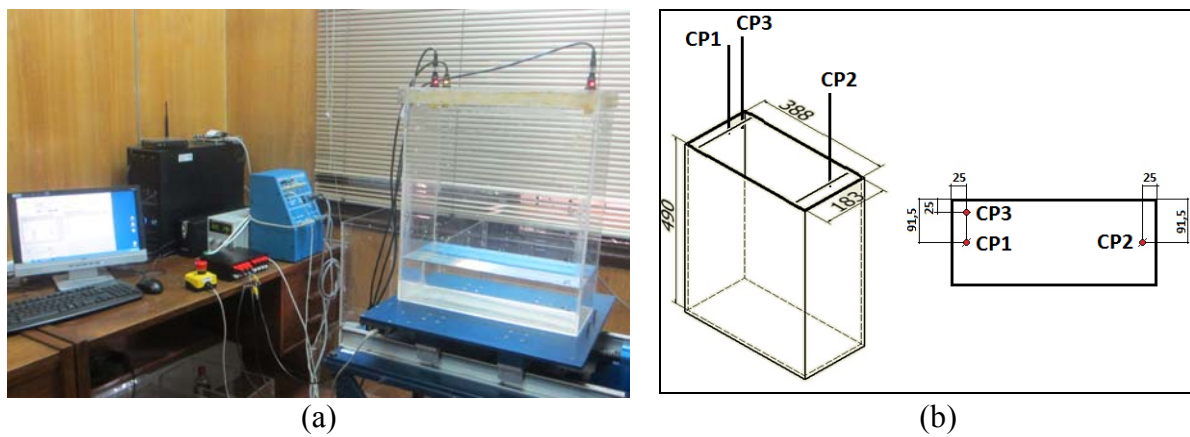


Figura 1: Disposición de la experiencia e instrumentación, estanque instrumentado con los sensores ultrasónicos posicionado sobre la mesa vibratoria (a), posición de los sensores y geometría del estanque en mm (b).

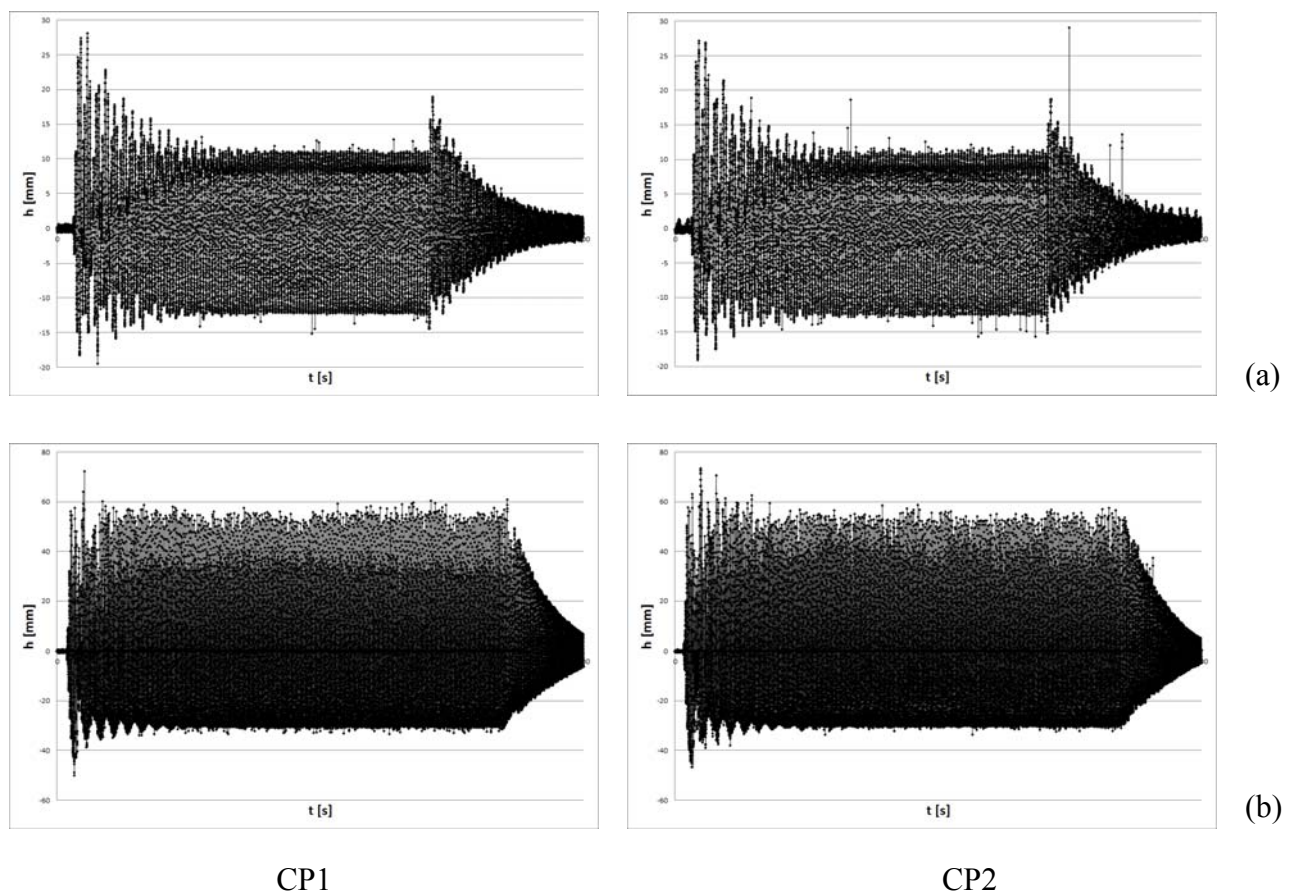


Figura 2: Evolución experimental de la superficie libre (altura de ola  $h$  en mm, tiempo en s) en los puntos de control CP1 y CP2 para un desplazamiento impuesto con amplitud de 10 mm y frecuencias (a)  $0.75f_n$  y (b)  $1.1f_n$ .

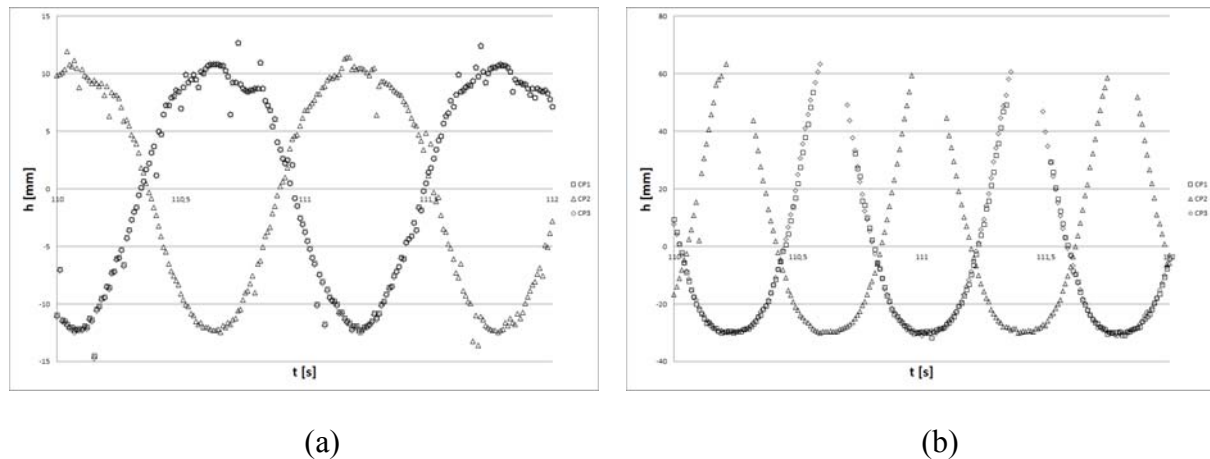


Figura 3: Validación de las condiciones de movimiento plano – Evolución de la superficie libre en los puntos de control CP1, CP2 y CP3 (altura de ola  $h$  en mm, tiempo en s) para un desplazamiento impuesto con amplitud de 10 mm y frecuencias (a) 0.75fn. y (b) 1.1fn.

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 4.1 Prueba de rendimiento del cálculo en paralelo

Para evaluar las capacidades del algoritmo paralelo que se implementó, se propone el análisis del flujo en una cavidad cúbica a  $Re=1000$ . Las condiciones de contorno son: paredes impermeables e ind deslizantes a excepción de la cara superior donde se impone una velocidad horizontal (en la dirección  $x$ ) unitaria. Para el análisis se utilizaron diferentes mallas de elementos cúbicos trilineales. La Figura 4 muestra las componentes de velocidad horizontal y vertical a lo largo de las líneas centrales vertical y horizontal, respectivamente, obtenidas para mallas de  $30^3$  y  $70^3$  en comparación con los resultados publicados por Yang *et al.*, 1998. Estos resultados muestran un correcto comportamiento del código de mecánica de fluidos ejecutado en paralelo. En la Tabla 1 se presenta los tiempos computacionales empleados para el cálculo realizado en un computador Intel Core i7 975 de cuatro núcleos con velocidad de 3.33GHz y 24 GiB de RAM. Estos resultados muestran una escalabilidad razonable de los modelos implementados. El factor de aceleración (speedup) obtenido para la malla de  $50^3$  es de 4.0 para el cálculo de matrices y vectores, y de 3.2 para la resolución del sistema lineal.

Número de elementos	Grados de libertad	Número de núcleos	Tiempo de cálculo de matrices y vectores (s)	Tiempo de solución del sistema algebraico (s)	
				Directo	Iterativo
30x30x30	119164	4	0.8	17	5
		1	3.3	51	-
40x40x40	275684	4	2.6	112	-
		1	7.8	284	-
50x50x50	530604	4	3.8	344	35
		1	15.4	1099	-
70x70x70	1431644	4	14	-	100

Tabla 1: Verificación de la eficiencia de la paralelización del código. Tiempos de ejecución para mallas de diferente tamaño.

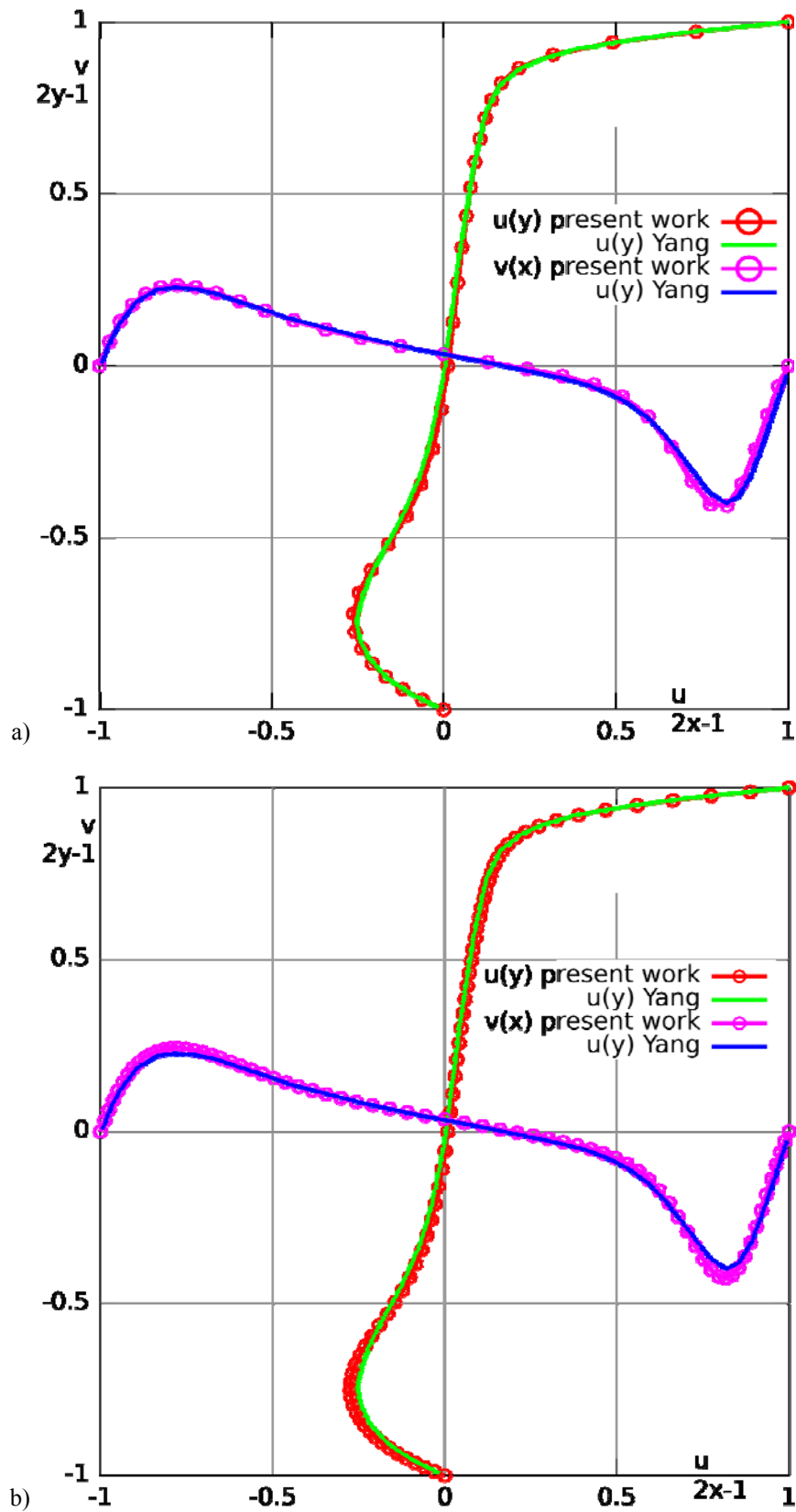


Figura 4: Verificación de las capacidades del código paralelo, resultados obtenidos en el presente estudio para el flujo en una cavidad cuadrada a  $Re=1000$  en mallas de (a)  $30^3$  y (b)  $70^3$  en comparación con los resultados reportados por Yang *et al.*, 1998 en una malla  $33^3$ .



## 4.2 Modelación numérica de los experimentos: validación experimental

En este apartado se presentan resultados obtenidos de la modelación de las experiencias descritas en la Sección 3. Como los casos seleccionados no registran efectos 3D, se realiza un análisis bidimensional del problema. La geometría utilizada en la simulación respecta las dimensiones y disposición de los sensores reportada en la experiencia. Las propiedades utilizadas en la simulación son:  $\rho_{\text{aire}}=1.25 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_{\text{aire}}=0.000018 \text{ Kg/(ms)}$ ,  $\rho_{\text{agua}}=998 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_{\text{agua}}=0.001 \text{ Kg/(ms)}$ .

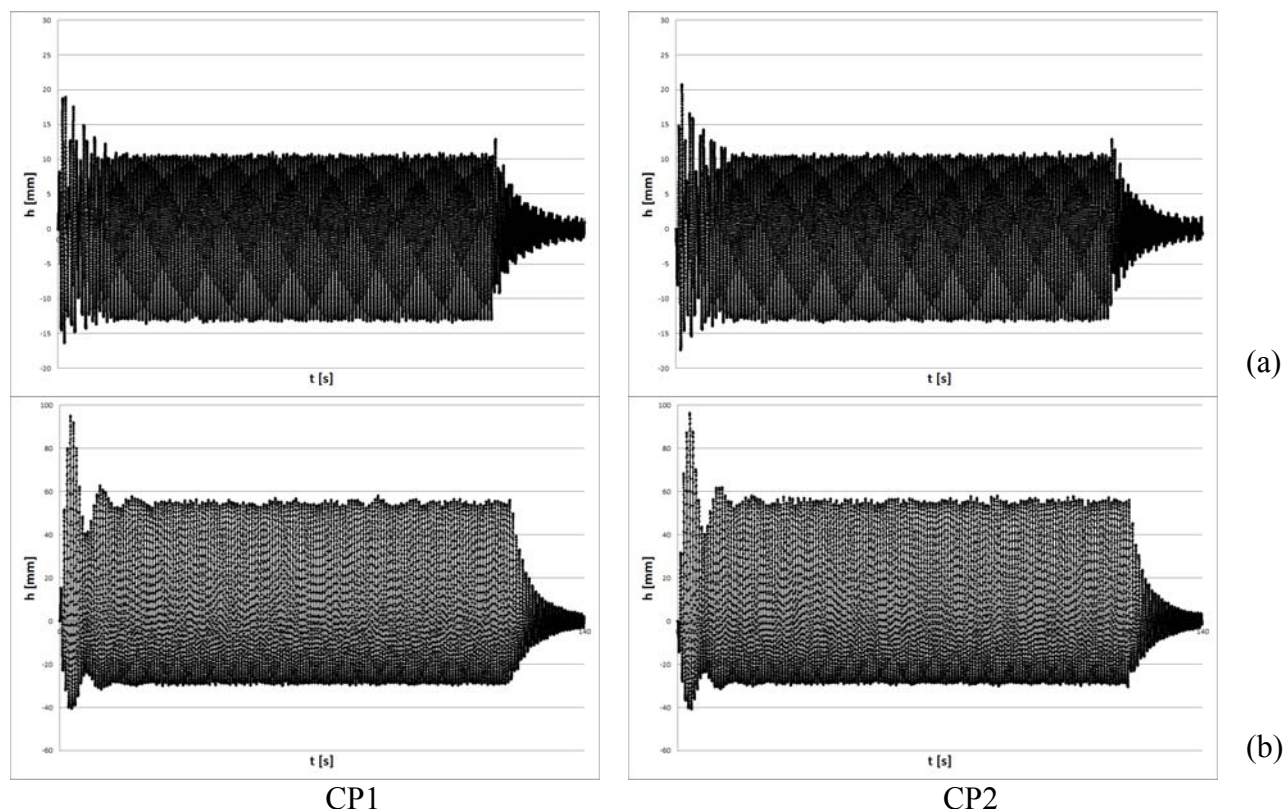


Figura 5: Modelación de los experimentos, superficie libre (altura de ola  $h$  en mm, tiempo en s) en los puntos de control CP1 y CP2 para un desplazamiento impuesto con amplitud de 10 mm y frecuencias (a) 0.75fn. y (b) 1.1fn.

La evolución de la superficie libre predicha por la simulación en los puntos CP1 y CP2 se presenta en la Figura 5. Las amplitudes máximas y mínimas registradas en esos puntos se comparan en la Tabla 2 junto a sus determinaciones experimentales, así como las frecuencias obtenidas en el análisis mediante Transformada Rápida de Fourier (*FFT*), mostrando una concordancia satisfactoria entre resultados numéricos y experimentales.

La Figura 6 resume los resultados experimentales y numéricos del comportamiento del oleaje en condiciones forzadas estacionarias. En dicha figura se grafica la amplitud instantánea de ola en el punto de control CP1 vs. la amplitud registrada en el CP2 para el mismo instante. Estas curvas ilustran satisfactoriamente el comportamiento no lineal del modelo numérico.

Frecuencia natural teórica $f_n$		1.16 Hz			
Frecuencia impuesta		0.75 $f_n$ =0.87 Hz		1.1 $f_n$ =1.28 Hz	
Modelo		Numérico	Experimental	Numérico	Experimental
CP1	FFT	0.87	0.88	1.28	1.28
	Elevación máxima [mm]	10.21	10.88 ± 0.5	56.17	58.10 ± 0.5
	Depresión máxima [mm]	-12.88	-12.10 ± 0.5	-29.03	-31.92 ± 0.5
CP2	FFT	0.87	0.88	1.28	1.28
	Elevación máxima [mm]	10.14	10.64 ± 0.5	57.17	59,73 ± 0.5
	Depresión máxima [mm]	-12.88	-12.40 ± 0.5	-28.98	-31,71 ± 0.5

Tabla 2. Validación experimental, comparación de amplitudes máximas y mínimas y de frecuencias obtenidas numérica y experimentalmente.

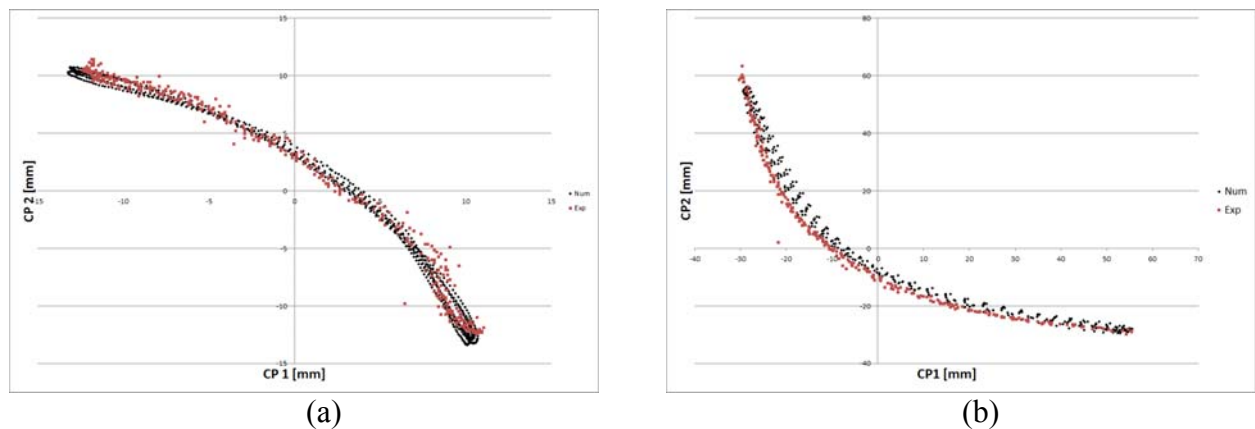


Figura 6: Validación experimental, mediciones experimentales (puntos rojos) y valores numéricos (puntos negros) obtenidos durante el comportamiento estacionario en vibración forzada para un desplazamiento impuesto con amplitud de 10 mm y frecuencias (a) 0.75 $f_n$ . y (b) 1.1 $f_n$ , (altura de ola en posiciones CP1 y CP2 en mm).

## 5 CONCLUSIONES

Se han presentado los resultados obtenidos con de un código en arquitectura paralela para el cálculo de mecánica de fluidos con superficies libres. Los desarrollos se han verificado con un ejemplo clásico de mecánica de fluidos en tres dimensiones y se han validado con medidas experimentales obtenidas en un modelo físico propuesto en el marco del trabajo. Los resultados alcanzados son satisfactorios tanto en la reducción de tiempos de cálculo como en la calidad de las predicciones obtenidas. El esfuerzo en futuros trabajos se focalizará en el análisis tridimensional de las experiencias físicas.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a CONICYT a través del Proyecto FONDECYT No. 1095028, a la Asociación de Universidades del Grupo Montevideo (AUGM, Programa de movilidad docente), a la Dirección de Investigaciones Científicas y Tecnológicas DICYT-USACH y la Agencia Nacional de Promoción Científica y Técnica (ANPCyT, PICT-1141/2007 and PICT-2492/2010), cuyo financiamiento permite el desarrollo de este trabajo.

## REFERENCIAS

Akyildiz, H. and Ünal, N.E., Sloshing in a three-dimensional rectangular tank: Numerical

- simulation and experimental validation. *Ocean Engineering*, 33:2135-2149, 2006.
- Aliabadi, S. and Tezduyar, T., Stabilized-finite-element/interface-capturing technique for parallel computation of unsteady flows with interfaces. *Computer Methods for Applied Mechanics and Engineering*, 190:243-261, 2000.
- Cruchaga, M.A. and Oñate, E., A finite element formulation for incompressible flow problems using a generalized streamline operator. *Computer Methods for Applied Mechanics and Engineering*, 143:49-67, 1997.
- Cruchaga, M., Celentano D. and Tezduyar T., A moving lagrangian interface technique for fixed-mesh flow problems. *Computer Methods for Applied Mechanics and Engineering*, 191:525-543, 2001.
- Cruchaga, M., Celentano, D., Breikopf, P., Villon, P. and Rassineux, A., A front remeshing technique for a lagrangian description of moving interfaces in two-fluid flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66 :2035-2063, 2006.
- Cruchaga, M., Celentano, D., Breikopf, P., Villon, P. and Rassineux, A., A surface remeshing technique for a Lagrangian description of 3D two-fluid flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 63: 415-430, 2010.
- Dalcín, L., Paz, R., Storti, M. and D'Elía, J., MPI for Python: Performance improvements and MPI-2 extensions. *Journal of Parallel Distributed Computing*, 68:655-662, 2008.
- Faltinsen, O., Rognebakke, O., Lukovsky, I. and Timokha, A., Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth. *Journal of Fluid Mechanics*, 407:201-234, 2000.
- Faltinsen, O., Rognebakke, O. And Timokha, A., Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 2. Effect of higher modes. *Journal of Fluid Mechanics*, 523:199-218, 2005.
- Faltinsen, O. and Timokha, A., A multimodal method for liquid sloshing in a two-dimensional circular tank. *Journal of Fluid Mechanics*, 665:457-479, 2010.
- Idelsohn, S., Storti, M. and Oñate, E., Lagrangian formulations to solve free surface incompressible inviscid fluid flows. *Computer Methods for Applied Mechanics and Engineering*, 191:583-593, 2001.
- Idelsohn, S., Oñate, E., Del pin F. And Calvo N., Fluid–structure interaction using the particle finite element method. *Computer Methods for Applied Mechanics and Engineering*, 193:2100-2123, 2006.
- Liu, D. and Lin, P., A numerical study of three-dimensional liquid sloshing in tanks. *Journal of Computational Physics*, 227:3921-3939, 2008.
- Löhner, R., Yang, Ch. and Oñate, E., Simulation of flows with violent free surface motion and moving objects using unstructured grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53:1315-1338, 2006.
- OpenMP specification, 2012, <http://openmp.org/wp/openmp-specifications>.
- Paz, R., and Storti, M., An interface strip preconditioner for domain decomposition methods: application to hydrology. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62:1873–1894, 2005.
- Paz, R., Nigro, N., and Storti, M., On the efficiency and quality of numerical solutions in CFD problems using the interface strip preconditioner for domain decomposition methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 52:89–118, 2006.
- Sonzogni, V., Yommi, A., Nigro, N. and Storti, M., A parallel finite element program on a Beowulf cluster. *Advances in Engineering Software*, 33:427-443, 2002.
- Virella, J., Prato, C. and Godoy, L., Linear and nonlinear 2D finite element analysis of sloshing modes and pressures in rectangular tanks subject to horizontal harmonic motions. *Journal of Sound and Vibrations*, 312:442-460, 2008.

Jaw-Yen Yang, Shih-Chang Yang, Yih-Nan Chen and Chiang-An Hsuz, Implicit Weighted ENO Schemes for the Three-Dimensional Incompressible Navier–Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 146:464-487, 1998.