

AERODINÁMICA NO-ESTACIONARIA Y DINÁMICA NO-LINEAL DEL VUELO DE MICRO VEHÍCULOS AÉREOS DE ALAS BATIENTES INSPIRADOS EN LA BIOLOGÍA

Bruno Roccia^{a,b}, Sergio Preidikman^{a,c}, Alejandro Brewer^a y Julio Massa^a

^a *Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, broccia@ing.unrc.edu.ar, <http://www.efn.uncor.edu>*

^b *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nacional 36 Km. 601, 5800 Río Cuarto, Argentina. Tel./Fax.:0358-4676246. <http://www.ing.unrc.edu.ar>*

^c *CONICET - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 1917 Buenos Aires, Argentina. <http://www.conicet.gov.ar>*

Palabras clave: Aerodinámica, Dinámica, Flexibilidad, Alas batientes, Biología.

Resumen. En este trabajo se presenta una herramienta de simulación numérica que permite estudiar la aerodinámica no-estacionaria y la dinámica no-lineal asociada al vuelo natural de insectos y aves pequeñas. El modelo aerodinámico utilizado es una versión modificada de la versión 3D del “*unsteady vortex lattice method*” (UVLM), una generalización del conocido “*vortex lattice method*”, ampliamente utilizado en flujos incompresibles y estacionarios. La dinámica asociada al insecto se modela mediante un modelo estructural multicuerpo híbrido del insecto completo (cabeza, tórax, abdomen y alas). El desarrollo del modelo está basado en la formulación de Lagrange con coordenadas generalizadas redundantes, una técnica ampliamente utilizada en el estudio de la dinámica de sistemas multicuerpo con restricciones. Para lograr generalidad y versatilidad en la herramienta desarrollada, se modificó un modelo cinemático desarrollado previamente por los autores de este trabajo para incluir diferentes patrones de deformación sobre el ala (torsión, flexión y ambos efectos combinados). En esta primera etapa se considera que la cabeza, el tórax y el abdomen del insecto no tienen movimiento relativo entre sí, y que las alas tienen un movimiento prescrito respecto del cuerpo del insecto (cinemáticamente conducidas). Las ecuaciones de restricción son incluidas en la formulación de las ecuaciones de movimiento utilizando multiplicadores de Lagrange. Las ecuaciones de movimiento obtenidas mediante este enfoque son del tipo diferenciales-algebraicas (DAEs) de índice 3, las cuales son transformadas en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) derivando dos veces las ecuaciones de restricción respecto del tiempo. La integración de todas las ecuaciones gobernantes resultantes se realiza en forma numérica, simultánea e interactiva en el dominio del tiempo mediante un esquema de integración que acopla un método predictor corrector de cuarto orden, el método modificado de Hamming, con un procedimiento de estabilización para las ecuaciones de movimiento resultantes. Al final del trabajo, se presentan resultados numéricos de casos simples que tienen por finalidad testear la validez y las limitaciones del modelo dinámico desarrollado y cuantificar levemente el desempeño del esquema de integración y estabilización propuesto.

1 INTRODUCCIÓN

Actualmente, investigadores y especialistas en diferentes áreas de la ciencia se han concentrado en el estudio, diseño, y posterior construcción de micro vehículos aéreos (MAVs) inspirados en la biología. Este esfuerzo es impulsado principalmente por las numerosas aplicaciones civiles y militares que dichos vehículos serán capaces de desarrollar. Tales aplicaciones involucran misiones de reconocimiento, inspección de edificios colapsados, exploración de ambientes muertos, sucios y peligrosos para el ser humano (*dull-dirty-dangerous environments*, D3), y en un futuro, misiones de investigación y exploración de atmósferas no terráqueas, entre otras (Mueller y Delaurier, 2001).

Todas estas aplicaciones requieren que estos vehículos exhiban una extraordinaria capacidad de maniobra para evitar obstáculos, navegar a bajas velocidades, cambiar rápidamente la dirección y el modo de vuelo y moverse exitosamente en espacios reducidos. Estas características hacen especialmente atractivo la utilización de “alas batientes” para diseñar un MAV funcional, llenando de esta manera, un vacío dejado por los vehículos convencionales de alas fijas y de alas rotantes.

Un aspecto fundamental en la carrera por entender definitivamente la mecánica del vuelo natural está relacionado con el estudio de la aeroelasticidad de insectos y aves pequeñas. La compleja cinemática que caracteriza el vuelo con alas batientes sumado a las estructuras altamente flexibles que componen las superficies sustentadoras originan diversos mecanismos de vuelo no-estacionarios que son eficaces a bajos números de Reynolds. Un proyecto que tenga como objetivo la búsqueda de una respuesta final que explique las grandes fuerzas aerodinámicas generadas por los insectos y aves pequeñas para mantenerse en el aire y propulsarse a través del mismo debe incluir el desarrollo de:

- i) las ecuaciones híbridas de movimiento para el insecto completo incluyendo estructuras que son modeladas como un medio elástico continuo, o como una colección general de cuerpos elásticos, cuerpos rígidos y sistemas de partículas, y
- ii) un modelo aerodinámico capaz de captar los efectos inestacionarios y altamente no lineales involucrados en el vuelo a pequeñas escalas.

1.1 Aerodinámica de alas batientes

Existen numerosos trabajos experimentales dedicados al estudio de la aerodinámica de insectos que proveen una buena descripción cualitativa de los mecanismos aerodinámicos no-convencionales utilizados por estas criaturas para mantenerse en vuelo. Por el contrario, una descripción cuantitativa precisa de tales fenómenos es difícil de lograr debido a los errores inherentes a las técnicas usadas para realizar las mediciones de las magnitudes de interés.

Ellington (1984a) estudió los mecanismos de sustentación presentes en el vuelo de insectos para una configuración de vuelo suspendida (*hover*). Para ello combinó resultados experimentales con la teoría de perfiles delgados concluyendo que el desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque es una característica fundamental en el vuelo de insectos y aves pequeñas.

Van den Berg y Ellington (1997) estudiaron específicamente el desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque de una polilla, *Manduca sexta*, utilizando un insecto robot a escala (*the flapper*). El experimento confirmó la presencia de un pequeño vórtice que se desprende desde el borde de ataque (LEV, *leading-edge vortex*). Además, determinaron que el mecanismo inestacionario responsable de la producción de este fenómeno es el retraso de la pérdida dinámica (*delayed stall*).

Ellington (1999) y Usherwood y Ellington (2002) estudiaron en detalle el vuelo con alas batientes con el fin de explorar el diseño de micro vehículos aéreos (MAVs) que muestren un comportamiento aerodinámico similar a las criaturas vivientes analizadas. Paralelamente, Dickinson (1994) utilizó un robot mecánico a escala para investigar los efectos de la rotación del ala sobre el desempeño aerodinámico de pequeños insectos, y cinco años más tarde publicó un trabajo en el cual analizó varios aspectos de la cinemática del ala concluyendo que los grandes niveles de sustentación logrados por los insectos durante un ciclo de batimiento se deben a la acción conjunta de tres mecanismos aerodinámicos no-estacionarios: *i*) el retraso de la pérdida dinámica (*delayed stall*); *ii*) la sustentación rotacional (*rotational lift*); y *iii*) la captura de la estela (*wake capture*) (Dickinson y otros, 1999). Lehmann y Pick (2007) investigaron la producción de fuerzas de sustentación debidas a un cuarto mecanismo denominado aplauso y separación (*clap and fling*) conocido también con el nombre de mecanismo de Weis Fogh (Weis Fogh, 1973).

Los cuatro mecanismos aerodinámicos no-convencionales introducidos anteriormente en conjunto con el fenómeno de desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque son los principales responsables del vuelo a pequeñas escalas (Sane, 2003; Lehmann, 2004).

Desde el punto de vista numérico, Vest y Katz (1996) utilizaron el método de los paneles para estudiar la aerodinámica no-estacionaria de un modelo de alas batientes. Ramamurti y Sandberg (2002) emplearon las ecuaciones de Euler para computar numéricamente el flujo tridimensional alrededor del ala de una mosca. Ramamurti comparó, específicamente, los valores de las fuerzas de empuje y de arrastre obtenidas mediante simulaciones numéricas con mediciones experimentales llevadas a cabo por Dickinson y otros (1999) obteniendo una buena correlación entre ellas. Ansari y otros (2006) implementaron numéricamente un modelo aerodinámico basado en la teoría de elementos de palas (*blade-element theory*) ampliamente usado en el estudio de alas con altas relaciones de aspecto (*aspect-ratio*) tales como los rotores de helicópteros. Ansari comparó sus resultados con el trabajo de Dickinson *et al.* (1999).

Sin duda, el mejor camino para entender en forma definitiva el vuelo animal es resolver la versión completa de las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo tridimensional alrededor del cuerpo y de las alas de un insecto o pájaro. Sin embargo, debido a la característica no-estacionaria del fluido moviéndose alrededor de una geometría que cambia en forma permanente a lo largo de un ciclo de batimiento esta solución no es viable, al menos, actualmente.

1.2 Dinámica de alas batientes

En la literatura existen varios trabajos que emplean diferentes enfoques para abordar el estudio de la dinámica de insectos y aves pequeñas. La mayoría de los trabajos utilizan un modelo de seis de grados de libertad basado en las ecuaciones estándar para aviones (*standard aircraft equations*), las cuales se pueden encontrar en la mayoría de los libros de dinámica del vuelo, por ejemplo en (Etkin y Reid, 1996).

Taylor y Thomas (2003) utilizaron las ecuaciones estándar para aviones en su versión linealizada para estudiar el movimiento de cuerpo rígido de una langosta del desierto. Sun y Xiong (2005) utilizaron las mismas ecuaciones para analizar la estabilidad del vuelo de una abeja en una configuración de vuelo suspendido conocida como “*hover*”.

Posteriormente se efectuaron muchos estudios sobre la dinámica de diferentes especies de insectos y sobre diversos prototipos de micro vehículos aéreos utilizando la misma técnica. Sin embargo todos ellos desprecian la masa de las alas y no consideran los efectos inerciales de las mismas sobre el cuerpo/fuselaje del insecto o MAV (Dietl y García, 2008; Doman *et al.*, 2009a; Doman *et al.*, 2009b; Deng *et al.*, 2001; Schenato *et al.*, 2003; Deng *et al.*, 2006a; Deng *et al.*, 2006b).

Con el objetivo de considerar los efectos despreciados en los trabajos previos y concebir modelos dinámicos más precisos, Lasek y Sibilski (2002) y Buler *et al.* (2004) derivaron las ecuaciones de movimiento de un MAV utilizando las ecuaciones de Gibbs-Appel. Grauer y Hubbard (2009) dedujeron las ecuaciones de movimiento de un MAV utilizando las ecuaciones de Boltzman-Hamel. Grauer utilizó un enfoque basado en la dinámica de multicuerpo considerando una colección de cinco cuerpos rígidos (tórax, dos cuerpos para la cola, y dos alas).

Recientemente, Orlowski y Girard (2011) utilizaron las herramientas de la dinámica de multicuerpo en conjunto con el principio de D’Alambert para derivar las ecuaciones de movimiento no-lineal de un MAV de alas batientes. Orlowski condujo un estudio exhaustivo de la influencia de la masa de las alas sobre el cuerpo del MAV, concluyendo que a medida que se disminuye el porcentaje de masa de las alas relativo al cuerpo del micro vehículo aéreo, los resultados de las simulaciones numéricas se aproximan a los resultados dados por las ecuaciones estándar para aviones. Este mismo autor realizó una extensa revisión bibliográfica del tema, la cual se presenta en forma resumida en la Tabla 1.

Autores	Modelo Dinámico	Nº de DOF en cada Ala	Aerodinámica	Aplicación
Taylor y Thomas (2003)	Lineal	-	Experimental	Langosta del desierto
Sun y Xiong (2005)	Lineal	-	CFD	Abeja
Doman <i>et al.</i> (2009a, 2009b)	No-lineal	-	Cuasi-estacionario (elemento de palas)	Robofly, Dickinson (1999)
Deng <i>et al.</i> , (2001)	No-lineal	-	Cuasi-estacionario (elemento de palas)	Alas con masas pequeñas
Bolender (2009)	No-lineal	2	Berman y Wang (2007)	Sin limitaciones
Sun <i>et al.</i> (2007)	No-lineal	-	Navier-Stokes	Sin limitaciones
Buler <i>et al.</i> (2004)	No-lineal	2	No especificado	Ornitóptero
Grauer y Hubbard (2009)	No-lineal	1	Cuasi-estacionario	Ornitóptero
Orlowski <i>et al.</i> (2009, 2010)	No-lineal	3	Berman y Wang (2007)	Sin limitaciones

Tabla 1: Características de los modelos dinámicos utilizados (Orlowski *et al.*, 2011)

1.3 Flexibilidad de las alas batientes

En los primeros intentos por entender el vuelo de insectos y aves, los científicos utilizaron teorías aerodinámicas clásicas, las cuales fueron desarrolladas para analizar el vuelo de aeronaves convencionales de alas fijas. La aplicación de estas teorías al estudio del vuelo de estas criaturas condujo a una famosa paradoja que establecía que “una abeja no puede volar” (McMaster, 1989).

Específicamente, la aerodinámica convencional arroja muy buenos resultados cuando el problema bajo estudio involucra condiciones de flujo estacionario y cuerpos con movimientos estacionarios. Por el contrario, el vuelo de insectos y aves pequeñas involucra condiciones de flujo altamente no estacionarias asociadas al batimiento, flexión, reversión de la combadura del perfil alar y torsión del ala. Estos aspectos asociados a la deformación que experimentan las alas en diferentes etapas del ciclo de aleteo afectan increíblemente el desempeño aerodinámico de estas criaturas. Sin embargo, muchos estudios de la cinemática, aerodinámica y dinámica del vuelo de insectos asumen hipótesis tales como un ala plana y rígida, dos simplificaciones que han permitido obtener buenos resultados pero que evidentemente difieren de la realidad.

Las aves cambian la forma del ala mediante una compleja estructura muscular embebida en el ala, que actúa directamente sobre los huesos, sobre las plumas y, en el caso de murciélagos, sobre las membranas (patagium) que se encuentran entre los huesos. Por otro lado, los insectos son las únicas criaturas voladoras que no poseen músculos dentro de sus alas; ellos controlan activamente el cambio de forma del ala mediante fuerzas actuantes en la raíz del ala que son transmitidas hacia el resto de la misma por medio de su estructura esquelética (exoesqueleto) (Wootton, 1981; 1992). Se han identificado cinco factores como posibles responsables de la deformación producida sobre el ala de un insecto, estos son:

- las cargas aerodinámicas;
- los efectos inerciales causados por las grandes aceleraciones, particularmente hacia el final de cada fase traslacional cuando el ala revierte su dirección de movimiento;
- las fuerzas actuantes sobre la raíz del ala, ejercidas directa e indirectamente por músculos sobre la base del ala;
- la arquitectura del ala; y
- la red venosa embebida en la estructura alar que tiene propiedades estructurales importantes, aparte de la entrega de la hemolinfa (fluido circulatorio) al tejido del ala.

El tamaño y la forma de cada vena, como así también la topología de la red venosa influyen en la rigidez estructural e inercia del ala, permitiendo al insecto controlar localmente la deformación del ala (Combes y Daniel, 2003a; 2003b).

Para entender definitivamente el lenguaje del vuelo natural, resulta crucial disponer de una descripción detallada de las deformaciones que experimentan las alas de insectos y aves en diferentes configuraciones de vuelo. Ellington (1984b) utilizó una técnica de proyección para estudiar el ángulo de ataque, combadura del perfil alar, perfil de flexión y ángulo de torsión del ala de una mosca cernidora (*Episyrphus balteatus*), una mosca de las flores (*Eristalis tenax*) y una abeja (*Bombus lucorum*).

Años más tarde, Willmott y Ellington (1997) utilizaron una técnica basada en videografía de alta velocidad para determinar el ángulo de rotación y el ángulo de torsión del ala de una polilla (*Manduca sexta*) en vuelo libre. Posteriormente, fueron desarrolladas una gran variedad de técnicas con el objeto de cuantificar las deformaciones que se producen sobre el ala de un insecto mientras se encuentra en vuelo (Zeng *et al.*, 1996; Zeng *et al.*, 2000; Song *et al.*, 2001; Wang *et al.*, 2003; Walker *et al.*, 2009a, 2009b, 2010; Aguayo *et al.*, 2010).

El avance de la tecnología, especialmente el desarrollo de ordenadores más potentes, con mayor capacidad de cómputo y almacenamiento, ha impulsado la confección de modelos numéricos cada vez más complejos para el estudio del vuelo natural. Especialistas en diferentes áreas de la ciencia han llevado a cabo estudios aeroelásticos bidimensionales y tridimensionales que consideran el acoplamiento entre el fluido que rodea el insecto y la estructura altamente flexible que compone las superficies sustentadora (ala). Como consecuencia de las grandes aceleraciones y las cargas aerodinámicas actuantes sobre las alas, estas se deforman sustancialmente. Estas deformaciones inducen una modificación significativa en las cargas aerodinámicas, altamente no-estacionarias y no-lineales, las que a su vez, inducen nuevas variaciones en la deformación del ala. Este fenómeno de retroalimentación entre las cargas aerodinámicas, las deformaciones del ala, y el movimiento de la criatura voladora genera un problema fuertemente acoplado entre el aire y el sistema multicuerpo utilizado para modelar el insecto o el ave pequeña.

Smith (1995) utilizó el método de los paneles junto con un modelo estructural basado en el método de elementos finitos considerando material elástico lineal para modelar el ala de una

polilla. Smith analizó específicamente el efecto de la flexibilidad del ala sobre la producción de fuerzas aerodinámicas, y concluyó que la sustentación es incrementada durante la fase traslacional descendente del ala (*downstroke*) y permanece invariable durante la fase traslacional inversa (*upstroke*).

Barut y otros (2006) investigaron las deformaciones que se producen sobre el ala de una libélula para un caso particular de un movimiento arbitrario prescripto sobre la raíz del ala. Sin embargo las cargas aerodinámicas no fueron incluidas en el modelo con el objeto de simplificar su análisis. Ishihara *et al.* (2009) propusieron un modelo bidimensional para estudiar la interacción fluido-estructura en el vuelo de una díptera. Específicamente, analizaron la influencia de la torsión del ala sobre la fuerza de sustentación y concluyeron que la misma puede soportar el peso de una díptera en vuelo suspendido (*hover*).

Vanella *et al.* (2009) desarrollaron un modelo bidimensional con el objeto de entender como la flexibilidad afecta el desempeño aerodinámico de un ala batiente en vuelo suspendido. Los resultados reportados por Vanella y sus colaboradores revelaron que la flexibilidad del ala beneficia la producción de sustentación. Particularmente, mostraron que el mejor rendimiento es alcanzado cuando el ala es conducida a una frecuencia próxima a la frecuencia de resonancia no lineal del sistema (súper armónica de orden tres) para un rango del número de Reynolds comprendido entre 75 y 1000.

Recientemente, Nakata y Liu (2012) desarrollaron un modelo computacional tridimensional que permite estudiar la interacción fluido-estructura de una polilla en vuelo suspendido. Ellos utilizaron un modelo aerodinámico elaborado previamente por Liu (2009) y un modelo estructural basado en el método de elementos finitos utilizando un elemento de cáscara triangular llamado AT/DKT (Ertas *et al.*, 1992) que permite considerar propiedades relacionadas a la anisotropía y heterogeneidad que caracteriza las alas de estas criaturas. Los resultados obtenidos por Nakata y sus colaboradores demostraron la importancia de la flexibilidad del ala en el vuelo con alas batientes.

Una comparación exhaustiva entre los trabajos citados anteriormente es difícil de establecer ya que los estudios son realizados usualmente sobre diferentes especies y además, los enfoques utilizados para computar las fuerzas aerodinámicas pueden ser radicalmente distintos. A pesar de los esfuerzos llevados a cabo por la comunidad científica, una interesante interrogante permanece aún sin una respuesta definitiva: ¿como la flexibilidad del ala afecta el desempeño aerodinámico en el contexto del vuelo con alas batientes?

En este trabajo se presenta un modelo computacional completo para estudiar la dinámica del vuelo de insectos y aves pequeñas. Ese modelo fue construido mediante la introducción de:

- i) un modelo cinemático modificado para incluir diferentes patrones de deformación sobre el ala (torsión, flexión en los dos planos y ambos efectos combinados);
- ii) un modelo dinámico para un insecto (*Drosophila melanogaster*) basado en una formulación energética para sistemas multicuerpo con restricciones; y
- iii) un modelo aerodinámico tridimensional basado en el método de red de vórtices no lineal y no estacionario (UVLM).

El acoplamiento entre el modelo dinámico y aerodinámico es del tipo “fuerte”, ya que las cargas aerodinámicas “deforman” el conjunto de cuerpos rígidos y flexibles que componen el MAV, y recíprocamente, esta “deformación” modifica las cargas aerodinámicas actuantes sobre las superficies sustentadoras. En este trabajo, como una primera aproximación, se utiliza una versión desacoplada con el fin de testear, verificar y validar el modelo dinámico.

2 MODELO CINEMÁTICO

Para describir el movimiento de las alas, se utilizaron tres sistemas de referencia, un sistema inercial o newtoniano $\mathbf{N} = \{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$, y un sistema fijo a cada ala del insecto para facilitar la discretización espacial de las mismas: $\mathbf{A} = \{\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_3\}$ sobre el ala derecha y $\mathbf{B} = \{\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3\}$ sobre la izquierda.

Mientras el ala se desplaza en el espacio tridimensional siguiendo una cinemática prefijada, cambia su geometría de acuerdo a patrones de deformación específicos que producen los efectos deseados sobre el ala, tales como: torsión, flexión y ambos efectos combinados. Por lo tanto, el vector posición, velocidad y aceleración de un punto material perteneciente al ala se puede escribir como la combinación de un movimiento de cuerpo rígido del ala más un cambio en la geometría de la misma (ver Figura 1).

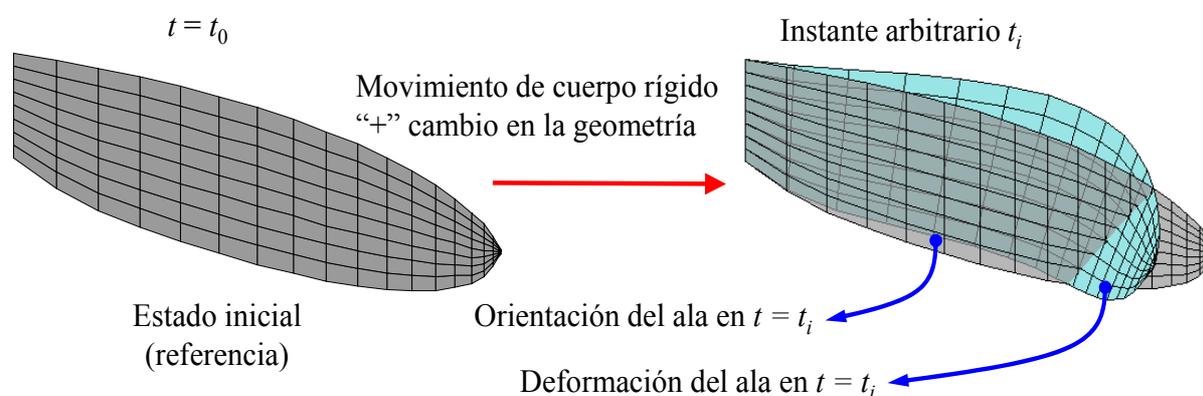


Figura 1: Movimiento y cambio de geometría del ala durante el ciclo de batimiento

En esta sección se analiza en detalle la cinemática del ala izquierda, las ecuaciones que rigen la cinemática del ala derecha se obtienen siguiendo el mismo procedimiento.

La orientación del ala como cuerpo rígido en cada instante de tiempo se define especificando la evolución temporal de tres ángulos:

- i) el ángulo que orienta el ala dentro del plano de batimiento, ‘stroke position’, $\phi(t)$;
- ii) el ángulo de desviación respecto del plano de batimiento, ‘stroke deviation’, $\theta(t)$; y
- iii) el ángulo de rotación respecto del eje longitudinal del ala, $\psi(t)$.

La transformación de coordenadas del sistema inercial \mathbf{N} al sistema fijo al ala \mathbf{B} , $\mathbf{T}_{BN}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{B}$, se realiza mediante una secuencia de ángulos de Euler (1-3-2) utilizando los ángulos $\phi(t)$, $\theta(t)$, y $\psi(t)$ definidos anteriormente (ver Figura 2). Para una revisión general de los parámetros cinemáticos involucrados en el ciclo de aleteo de un insecto, se puede consultar el trabajo de Roccia *et al.* (2011).

Para deformar el ala de la manera deseada, primero se define a lo largo del eje longitudinal del ala (vector unitario, $\hat{\mathbf{b}}_2$) un elemento de viga “virtual” el cual provee el medio necesario para flexionar y torsionar el ala. El elemento de viga se considera empotrado en la raíz del ala. La flexión en dos planos perpendiculares es lograda utilizando autofunciones y el efecto de la torsión es incorporado por medio de una función lineal. Una vez deformada la viga, el resto del ala se deforma acorde a este patrón mediante un esquema de transferencia de desplazamientos que se detalla más adelante.

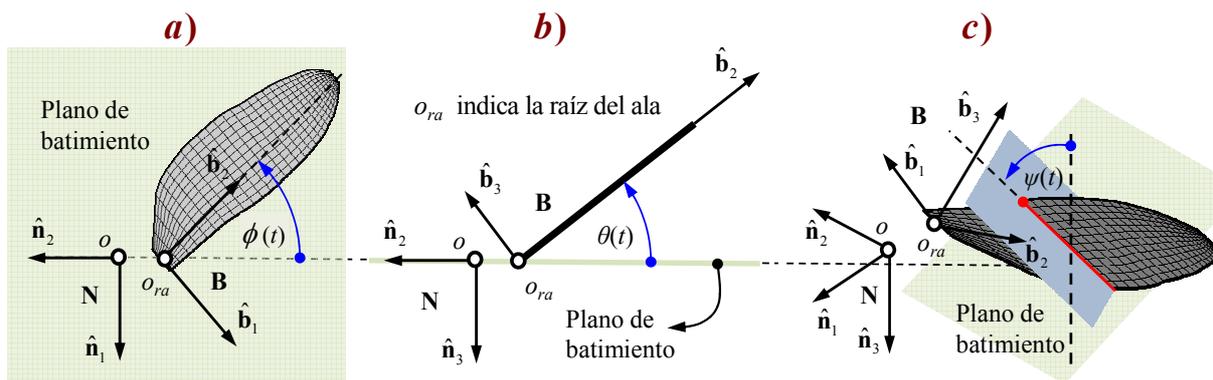


Figura 2: Definición de los parámetros cinemáticos: a) Ángulo de posición dentro del plano de batimiento; b) Ángulo de desviación respecto del plano de batimiento; y c) Ángulo de rotación

2.1 Vector posición de un punto perteneciente al ala

En las Figuras 3a y 3b se presentan esquemas que ilustran la ubicación del elemento de viga dentro de la planta alar y el vector posición de un punto arbitrario perteneciente al ala en la configuración indeformada.

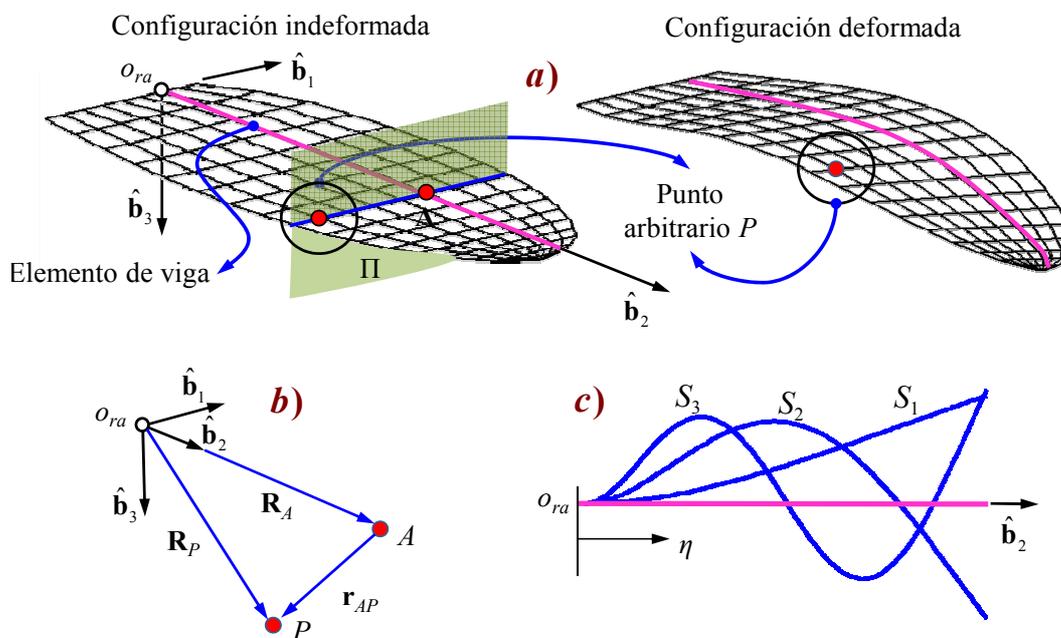


Figura 3: a) Configuración indeformada y deformada del ala; b) Definición del vector posición de un punto arbitrario P sobre el ala en la configuración indeformada; c) Autofunciones para una viga Euler-Bernoulli empotrada-libre

Tanto el punto arbitrario P sobre el ala como el punto A sobre el eje longitudinal se encuentran sobre el mismo plano Π el cual es perpendicular al eje \hat{b}_2 (en la configuración indeformada). La sección transversal del ala que contiene el punto P y A se asume rígida y el vector posición del punto P relativo al punto A es denotado por \mathbf{r}_{AP} , el cual también es rígido.

El vector posición del punto P respecto del marco de referencia inercial \mathbf{N} en la configuración indeformada (\mathbf{R}_P) y deformada ($\tilde{\mathbf{R}}_P$) están dados por las siguientes expresiones:

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_{ra} + \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AP}, \quad \tilde{\mathbf{R}}_P = \mathbf{R}_{ra} + \mathbf{r}_A + \mathbf{u}_A + \hat{\mathbf{T}}\mathbf{r}_{AP}, \quad (1)$$

donde \mathbf{R}_{ra} es el vector posición del origen del marco de referencia \mathbf{B} fijo al ala, \mathbf{r}_A es el vector posición del punto A sobre el eje longitudinal \hat{b}_2 respecto del marco \mathbf{B} en la configuración

indeformada (Figura 3b), \mathbf{u}_A es el vector desplazamiento asociado al punto A y $\hat{\mathbf{T}}$ es una matriz de rotación infinitesimal (Baruh, 1999). Luego de algunas manipulaciones algebraicas el vector posición de un punto P en la configuración deformada es,

$$\tilde{\mathbf{R}}_p = \mathbf{R}_p + \mathbf{u}_A - \bar{\mathbf{r}}_{AP}\boldsymbol{\theta}, \quad (2)$$

donde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ son los giros relacionados al desplazamiento del punto A asociados a los vectores unitarios $(\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3)$ respectivamente, y $\bar{\mathbf{r}}_{AP}$ es una matriz antisimétrica.

Las componentes del vector desplazamiento $\mathbf{u}_A = (u_1, u_2, u_3)^T$ se escriben como el producto de una función que depende de una coordenada espacial, η , asociada al vector unitario $\hat{\mathbf{b}}_2$, $S(\eta)$, y una función temporal $p(t)$,

$$u_i(\eta, t) = S_i(\eta) p_i(t), \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

La autofunción $S_i(\eta)$ corresponde a la solución analítica de la deflexión de una viga del tipo Euler-Bernoulli con condiciones de borde clásicas (empotrado-libre) (Karnovsky y Lebed, 2000) (ver Figura 3c). La coordenada temporal $p_i(t)$ es especificada mediante funciones armónicas.

Los ángulos $\theta_1(\eta, t)$ y $\theta_3(\eta, t)$ se obtienen mediante la evaluación de la derivada parcial de las componentes $u_3(\eta, t)$ y $u_1(\eta, t)$ con respecto a la coordenada espacial η . Por otro lado el ángulo $\theta_2(\eta, t)$ es especificado mediante una función lineal y representa el giro alrededor del vector unitario $\hat{\mathbf{b}}_2$. Las expresiones para dichos ángulos son:

$$\begin{aligned} \theta_1(\eta, t) &= \frac{\partial}{\partial \eta} u_3(\eta, t) = \frac{d}{d\eta} [S_3(\eta)] p_3(t); \\ \theta_2(\eta, t) &= \frac{\eta}{l} p_2(t); \text{ y} \\ \theta_3(\eta, t) &= -\frac{\partial}{\partial \eta} u_1(\eta, t) = -\frac{d}{d\eta} [S_1(\eta)] p_1(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Haciendo uso de las Ecs. (3-4), la Ec. (2) para el desplazamiento arbitrario de un punto P perteneciente al ala se puede reescribir como,

$$\tilde{\mathbf{R}}_p = \mathbf{R}_p + \mathbf{N}(\eta) \mathbf{p}(t), \quad (5)$$

donde:

$$\mathbf{N}(\eta) = \begin{bmatrix} S_1(\eta) & 0 & 0 \\ -r_1 \frac{d}{d\eta} S_1(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 \eta / l & S_3(\eta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))^T. \quad (6)$$

Cabe señalar que el procedimiento desarrollado anteriormente para imponer una deformación sobre el ala es válido sólo para desplazamientos y giros pequeños porque hemos adoptado un elemento de viga basado en un modelo del tipo Euler-Bernoulli como “medio” para generar el cambio de geometría deseado sobre el ala.

3 MODELO DINÁMICO

El insecto se modela como una colección de cinco cuerpos rígidos interconectados ($n_b = 3$), estos son: el cuerpo central compuesto por la cabeza, tórax y abdomen; y las dos alas del insecto. Para llevar a cabo de una manera ordenada la deducción de las ecuaciones de movimiento no-lineales del modelo del insecto se utilizaron cuatro marcos de referencias:

Un sistema de referencia inercial o newtoniano $\mathbf{N} = (\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3)$; y

Un marco de referencia fijo a cada componente del insecto $\mathbf{B}^i = (\hat{\mathbf{b}}_1^i, \hat{\mathbf{b}}_2^i, \hat{\mathbf{b}}_3^i)$ para $i = 1, 2, 3$.

Los vectores $\hat{\mathbf{n}}_j$, $\hat{\mathbf{b}}_j^i$ para $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$ son vectores unitarios que cumplen con las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3] &= \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{n}}_2 \times \hat{\mathbf{n}}_3) = +1 \\ [\hat{\mathbf{b}}_1^i, \hat{\mathbf{b}}_2^i, \hat{\mathbf{b}}_3^i] &= \hat{\mathbf{b}}_1^i \cdot (\hat{\mathbf{b}}_2^i \times \hat{\mathbf{b}}_3^i) = +1 \end{aligned} \quad (7)$$

Las ecuaciones de movimiento del modelo del insecto se escriben siguiendo la misma formulación utilizada por Roccia *et al.* (2011) la cual está basada en las ecuaciones de Lagrange para sistemas con restricciones. La energía cinética de cada parte ' i ' del insecto se deriva utilizando un conjunto de seis coordenadas absolutas $\mathbf{q}_i = (q_1, \dots, q_6)^T$ respecto de un marco de referencia inercial, \mathbf{N} , (3 coordenadas para definir la posición de un punto fijo al cuerpo, y 3 coordenadas para definir su orientación). Esto da un total de dieciocho coordenadas generalizadas ($6n_b = 18$). Sin embargo, este conjunto de coordenadas no son independientes ya que están relacionadas mediante las ecuaciones de restricción.

Las alas tienen un movimiento prescrito (son cinemáticamente conducidas) con respecto al cuerpo central. Esta relación se logra mediante la introducción de doce ecuaciones de restricción, tres de conexión y tres de orientación por cada ala, lo cual introduce doce ecuaciones adicionales ($n_c = 12$). Este hecho produce un total de seis grados de libertad para el sistema completo ($n_{\text{DOF}} = 6n_b - n_c = 6$).

El conjunto de coordenadas generalizadas absolutas adoptadas para cada cuerpo se listan a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T = (x_1, y_1, z_1, \phi_1, \theta_1, \psi_1)^T; & \text{Cuerpo Central} \\ \mathbf{q}_2 &= (q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})^T = (x_2, y_2, z_2, \phi_2, \theta_2, \psi_2)^T; & \text{Ala izquierda} \\ \mathbf{q}_3 &= (q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, q_{17}, q_{18})^T = (x_3, y_3, z_3, \phi_3, \theta_3, \psi_3)^T; & \text{Ala derecha} \end{aligned} \quad (8)$$

donde x_i , y_i , y z_i para $i = 1, 2, 3$ es un sistema de coordenadas rectangulares ortogonales asociado a los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}_1$, $\hat{\mathbf{n}}_2$, $\hat{\mathbf{n}}_3$ respectivamente, y ϕ_i , θ_i , y ψ_i para $i = 1, 2, 3$ son coordenadas angulares que orientan cada uno de los cuerpos respecto del marco de referencia inercial \mathbf{N} .

Se utilizó una parametrización mediante ángulos de Euler para orientar cada uno de los cuerpos que componen el insecto. Para el cuerpo central se utilizó una secuencia de rotación (2-3-1) mediante los ángulos ϕ_1 , θ_1 , y ψ_1 y para cada una de las alas se utilizó una secuencia de rotación (1-3-2) mediante los ángulos ϕ_2 , θ_2 , ψ_2 , y ϕ_3 , θ_3 , ψ_3 respectivamente.

3.1 Ecuaciones de restricción

La cinemática que caracteriza el movimiento de las alas de insectos y aves pequeñas es bastante compleja, involucrando simultáneamente rotaciones, oscilaciones, y cambios significativos en el ángulo de ataque. En la literatura existen muchos trabajos, experimentales y analíticos, donde se estudia la cinemática de las alas batientes (Willmott *et al.*, 1997; Dickinson *et al.*, 2001; Bos *et al.*, 2007; Ellington, 1984b; Roccia *et al.*, 2011).

Como se mencionó anteriormente las alas tienen un movimiento prescrito respecto del cuerpo central. En este trabajo se adoptó la descripción cinemática desarrollada en el trabajo de Roccia *et al.* (2011) para formular las ecuaciones de restricción de orientación de las dos alas respecto del cuerpo central del insecto. Por consiguiente, para cada ala se tiene:

- Restricción de posición: especifica el punto de conexión del ala con el cuerpo central para todo t .
- Restricción de orientación: especifica la orientación del ala respecto del cuerpo central del insecto para todo t .

Tanto las restricciones de posición como así también las de orientación son del tipo holonómicas, a su vez la restricción de posición es esclerónoma debido a que el tiempo no aparece explícitamente en la formulación de dicha ecuación. Por el contrario, las restricciones a nivel de la orientación son del tipo reónomas porque dependen explícitamente del tiempo. Esta dependencia es consecuencia del movimiento prescrito que tienen las alas respecto del cuerpo central (Shabana, 2005). Todas las ecuaciones de restricción son escritas respecto del marco de referencia inercial, \mathbf{N} .

Las doce ecuaciones de restricción para el sistema se dan a continuación:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{lwr}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = 0 & \varphi_7 &= (\hat{\mathbf{b}}_1^2)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^2})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_1(t) \right) \hat{\mathbf{e}}_2^{lw} = 0 \\
 \varphi_2 &= (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{lwr}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0 & \varphi_8 &= (\hat{\mathbf{b}}_2^2)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^2})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_1(t) \right) \hat{\mathbf{e}}_3^{lw} = 0 \\
 \varphi_3 &= (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{lwr}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 = 0 & \varphi_9 &= (\hat{\mathbf{b}}_3^2)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^2})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_1(t) \right) \hat{\mathbf{e}}_1^{lw} = 0 \\
 \varphi_4 &= (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{rwr}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = 0 & \varphi_{10} &= (\hat{\mathbf{b}}_1^3)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^3})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_2(t) \right) \hat{\mathbf{e}}_2^{rw} = 0 \\
 \varphi_5 &= (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{rwr}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0 & \varphi_{11} &= (\hat{\mathbf{b}}_2^3)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^3})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_2(t) \right) \hat{\mathbf{e}}_3^{rw} = 0 \\
 \varphi_6 &= (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{r}_{rwr}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 = 0 & \varphi_{12} &= (\hat{\mathbf{b}}_3^3)^T \left((\mathbf{T}_1^{\text{NB}^3})^T \mathbf{T}_1^{\text{NB}^1} \mathbf{C}_2(t) \right) \hat{\mathbf{e}}_1^{rw} = 0,
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde \mathbf{R}_i para $i = 1, 2, 3$ es el vector posición del origen de cada marco de referencia respecto del marco inercial \mathbf{N} , $\mathbf{T}_i^{\text{NB}^i}$ para $i = 1, 2, 3$ representa la matriz de transformación de coordenadas (matriz de rotación) del marco de referencia \mathbf{B}^i respecto del marco de referencia inercial \mathbf{N} , \mathbf{r}_i es el vector posición de un punto arbitrario sobre el cuerpo i respecto del marco de referencia fijo a dicho cuerpo, \mathbf{r}_{lwr} es el vector posición de la articulación del ala izquierda con el cuerpo central medido respecto del marco de referencia fijo al cuerpo central, \mathbf{r}_{rwr} es el vector posición de la articulación del ala derecha con el cuerpo central medido respecto del marco de

referencia fijo al cuerpo central (ver Figura 4a), $C_1(t)$ y $C_2(t)$ son las matrices de rotación que orientan el ala izquierda y derecha respecto del cuerpo del insecto y dependen de la cinemática utilizada para describir el movimiento de las alas durante un ciclo completo de batimiento (Roccia *et al.*, 2007; Roccia *et al.*, 2011), y los vectores unitarios \hat{e}_i^{hw} y \hat{e}_i^{rw} para $i = 1, 2, 3$ forman dos marcos de referencias adicionales llamados E^{hw} y E^{rw} , los cuales resultan de componer las rotaciones $C_1(t)$ y $C_2(t)$ con la matriz de transformación $T_1^{NB^1}$ (ver Figura 4b).

Los superíndices ‘1’, ‘2’ y ‘3’ en la Ec. (9) se refieren respectivamente al cuerpo central, ala izquierda y ala derecha. Cada matriz de rotación, $T_i^{NB^i}$, se obtiene a partir de la secuencia de rotaciones mediante ángulos de Euler elegida para cada caso (Baruh, 1999).

Finalmente el vector de restricción, $\Phi(\mathbf{q}, t)$, tiene la siguiente forma:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{12})^T \tag{10}$$

donde $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)^T$.

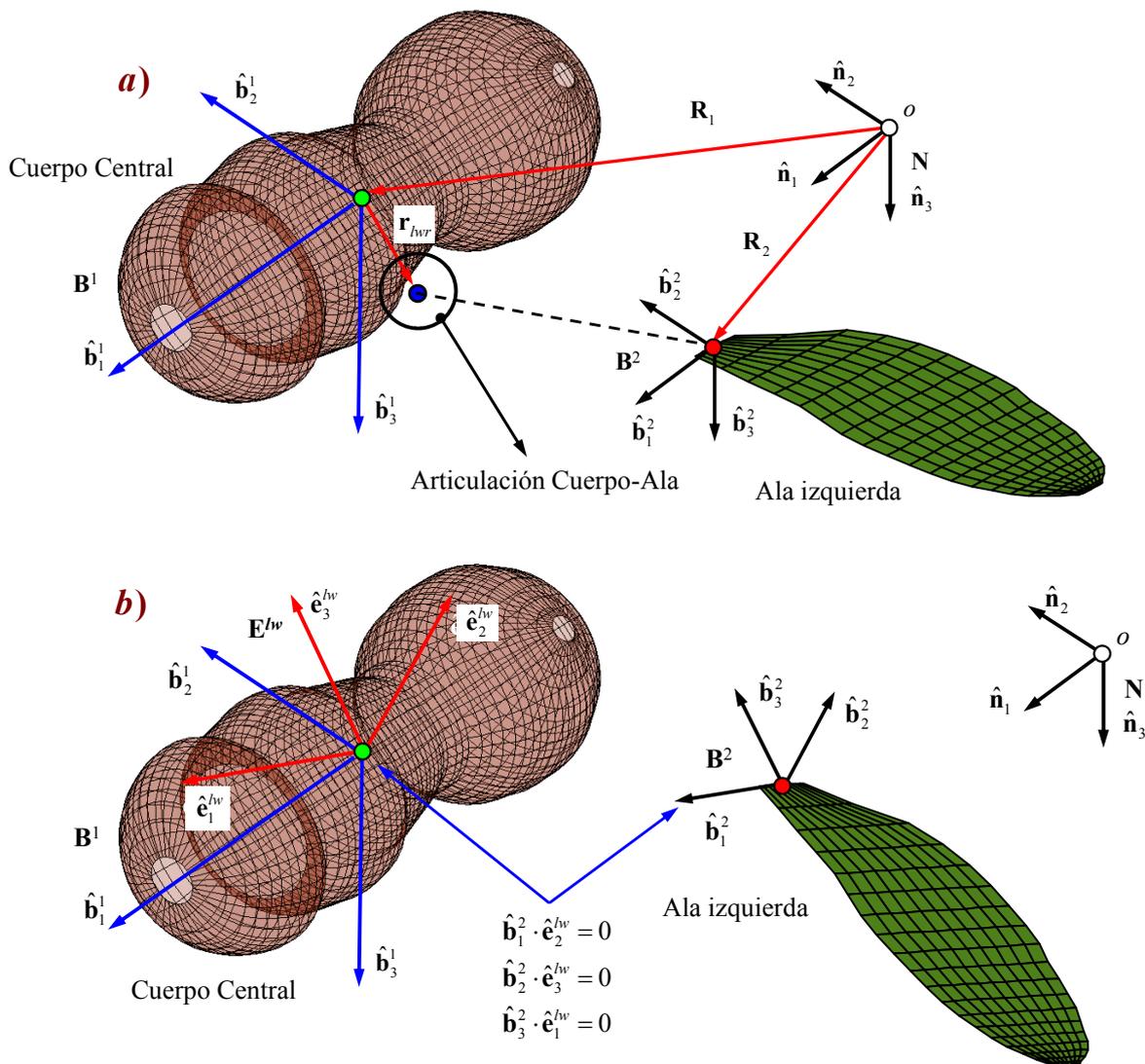


Figura 4: Conexión y orientación del ala respecto del cuerpo central
 a) Restricción de conexión, b) Restricción de orientación

3.2 Fuerzas generalizadas

Como paso previo a la formulación de las ecuaciones de movimiento, en esta sección se determinaran las fuerzas generalizadas no-conservativas provenientes de la aerodinámica y las fuerzas conservativas debidas a la acción del campo gravitatorio terrestre sobre cada parte componente del insecto.

Para determinar las fuerzas generalizadas asociadas con el conjunto de coordenadas generalizadas absolutas introducidas anteriormente, se utiliza el principio de trabajos virtuales (Shabana, 2005; Shabana, 2010; Kane 1968; Bauchau, 2011). El trabajo virtual de una fuerza externa, \mathbf{F} , aplicada al sistema se define de la siguiente manera:

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R} \quad (11)$$

donde $\delta \mathbf{R}$ es un desplazamiento virtual arbitrario que pertenece al espacio tangente, $\mathcal{T}_R \mathcal{M}$, al espacio de configuración, \mathcal{M} . Para sistemas con restricciones, dicho desplazamiento virtual pertenece al espacio tangente, pero además satisface la versión homogénea de las ecuaciones de restricción (Heard, 2006; Terze y Naudet, 2006).

Para expresar el desplazamiento virtual de un punto arbitrario perteneciente al ala izquierda o derecha se utiliza la Ec. (5), esto es:

$$\delta \tilde{\mathbf{R}}_i = \delta \mathbf{R}_i + \delta \left(\mathbf{T}_i^{\text{NB}^i} \mathbf{N}_i(\eta) \mathbf{p}_i(t) \right), \quad i = 2, 3 \quad (12)$$

Luego de algunas manipulaciones algebraicas, las fuerzas generalizadas no conservativas provenientes de la aerodinámica sobre cada ala del insecto se expresan de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q}_i^{nc} = \sum_{j=1}^{np} ({}^i \mathbf{F}_j)^T [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{H}_j]; \quad \text{para } i = 2, 3 \quad (13)$$

donde \mathbf{I}_3 es la matriz identidad de 3×3 , np es el número de paneles aerodinámicos que conforma la malla aerodinámica sobre cada ala del insecto, ${}^i \mathbf{F}_j$ es el vector fuerza que actúa sobre el panel aerodinámico ' j ' perteneciente al cuerpo ' i ', y \mathbf{H}_j es una matriz de 3×3 que proviene de la derivada de $\mathbf{T}_i^{\text{NB}^i} \mathbf{N}_i(\eta) \mathbf{p}_i(t)$ respecto de las coordenadas generalizadas \mathbf{q}_i (Shabana, 2005).

Las fuerzas conservativas debidas al campo gravitatorio terrestre para los tres cuerpos que componen el sistema (cuerpo central, ala izquierda y ala derecha) se obtienen siguiendo el mismo procedimiento, esto es:

$$\mathbf{Q}_1^c = (\mathbf{F}_1^g)^T [\mathbf{I}_3]; \quad (14)$$

$$\mathbf{Q}_i^c = (\mathbf{F}_i^g)^T [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{H}_i]; \quad \text{para } i = 2, 3;$$

donde $\mathbf{F}_i^g = m_i g \hat{\mathbf{n}}_3$ es el peso de cada cuerpo, m_i es la masa de cada cuerpo, y g es la constante de aceleración de la gravedad.

3.3 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento del modelo del insecto se escribieron empleando una formulación energética basada en las ecuaciones de Lagrange con restricciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_{\mathbf{q}} &= (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T; \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (15)$$

donde L es el Lagrangiano del sistema, $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange y $\mathbf{B}_{\mathbf{q}}$ es la matriz Jacobiana de restricción.

En este trabajo, el potencial debido a la gravedad es incluido directamente dentro del término de las fuerzas conservativas, por lo tanto la Ec. (15) se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_{\mathbf{q}} &= (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T; \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (16)$$

donde T es la energía cinética del sistema.

La energía cinética T_i para cada parte componente del sistema se puede expresar como:

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i \left(\dot{\mathbf{R}}_p^i \right)^T \dot{\mathbf{R}}_p^i dV_i, \quad (17)$$

donde el punto denota derivada respecto del tiempo, ρ_i es la densidad de masa por unidad de longitud, de área o de volumen, y $\dot{\mathbf{R}}_p^i$ es la derivada respecto del tiempo realizada por un observador inercial del vector posición de un punto arbitrario sobre el cuerpo i el cual fue definido anteriormente en la Ec. (5).

Operando con la Ec. (17) y utilizando la metodología descrita en Roccia *et al.* (2011) la ecuación de movimiento para el sistema completo es:

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_{\mathbf{q}_i} = \mathbf{Q}_i^v + (\mathbf{Q}_i^{nc})^T + (\mathbf{Q}_i^c)^T, \quad (18)$$

donde \mathbf{M}_i es la matriz de masa del cuerpo ' i ', y \mathbf{Q}_i^v es un vector que es cuadrático en las velocidades y surge de derivar la energía cinética respecto del tiempo y de las coordenadas generalizadas \mathbf{q}_i (Shabana, 2005; Roccia *et al.*, 2011).

El vector cuadrático, \mathbf{Q}_i^v , comprende todos los términos giroscópicos. Otro camino ampliamente utilizado en dinámica de multicuerpos para calcular este término es trabajar a nivel de componentes, este enfoque produce una formulación elegante para el vector \mathbf{Q}_i^v en término de los *símbolos de Christoffel* de primera especie (Heard, 2006).

Finalmente, las ecuaciones de movimiento para el sistema total se obtienen ensamblando las ecuaciones de movimiento para cada cuerpo ' i ':

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_{\mathbf{q}} &= \mathbf{Q}^v + (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T; \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (19)$$

La ecuación de movimiento expresada en la Ec. (19) es del tipo diferencial-algebraica de índice tres (*differential-algebraic equation*, DAE).

4 MODELO AERODINÁMICO

El método de red de vórtices no lineal y no-estacionario (UVLM) permite considerar no-linealidades aerodinámicas asociadas con grandes ángulos de ataque, deformaciones estáticas, y flujos dominados por vorticidad en los que el fenómeno conocido como *vortex bursting* no ocurre.

La aplicación del UVLM permite también tener en cuenta todas las posibles interferencias aerodinámicas y estimar, en el dominio del tiempo, la distribución de vorticidad asociada a la sábana vorticiosa adherida a los sólidos, y la distribución de vorticidad y la forma de las estelas emitidas desde los bordes filosos del cuerpo inmerso en el fluido.

Ramamurti and Sandberg (2002) estudiaron los efectos de la viscosidad en el flujo no-estacionario en 3D alrededor de un ala batiente y demostraron que esos efectos son mínimos y que la resistencia y las fuerzas de sustentación están dominadas por las fuerzas de inercia. Si bien, el número de Reynolds que caracteriza el flujo real en los insectos es relativamente bajo, puede considerarse que tiene un valor lo suficiente alto como para asumir que los efectos viscosos están confinados, únicamente, a las capas límite que envuelven las alas y a las estelas vorticiosas que se desprenden desde los bordes filosos. Este hecho permite utilizar el UVLM para predecir las cargas aerodinámicas que actúan sobre las alas batientes.

Como resultado del movimiento relativo entre el ala y el aire en reposo, se generan gradientes de velocidad que dan origen a vorticidad concentrada en una delgada región adherida a la superficie del ala (capa límite). Esta sábana vorticiosa se separa desde el borde de fuga, la puntera del ala y el borde de ataque y es ‘convectada’ hacia el seno del fluido para formar la estela.

Como se mencionó anteriormente, en el modelo utilizado se restringe toda la vorticidad del flujo a la capa límite adherida al sólido (cuerpo y alas del insecto) y a las estelas; fuera de estas regiones el flujo se considera irrotacional. Las estelas se representan mediante sábanas vorticiosas libres. Sus posiciones no son especificadas ya que pueden deformarse libremente hasta adoptar configuraciones libres de fuerzas, esto es, no se produce ningún salto de presiones a través de las estelas. El flujo asociado con la vorticidad en la estela cercana al ala afecta el flujo alrededor del ala y por lo tanto las cargas actuantes sobre ella.

Debido a que la vorticidad presente en las estelas en un instante dado fue generada y convectada desde el ala en un tiempo anterior, las cargas aerodinámicas dependen de la historia del movimiento; las estelas contienen la ‘historia’. El campo de velocidades asociado con la vorticidad existente en un punto del espacio decae al alejarse de dicho punto; en consecuencia, a medida que la vorticidad en la estela va siendo transportada corriente abajo, su influencia decrece y por lo tanto se dice que ‘el historiador’ va perdiendo memoria.

Los dos tipos de sábanas vorticiosas (libre y adherida) están unidas en los bordes filosos de cada ala, donde se impone la condición de Kutta para flujos no-estacionarios. A medida que el ala se mueve durante un ciclo de batimiento, el ángulo de ataque efectivo puede alcanzar valores altos produciendo una separación adicional del flujo desde el borde de ataque (Roccia *et al.*, 2010).

Para más detalles sobre el método de red de vórtices no-lineal y no-estacionario se pueden consultar los trabajos de Konstadinopoulos *et al.* (1981), Preidikman (1998) y Roccia *et al.* (2010).

En este modelo, las sábanas adheridas continuas sobre las alas y el cuerpo del insecto se reemplazan por una red de paneles rectangulares (elementos cuadriláteros) formados por segmentos vorticiosos rectilíneos, ω_i , conectados entre si en los llamados *nodos aerodinámicos* (ver Figura 5).

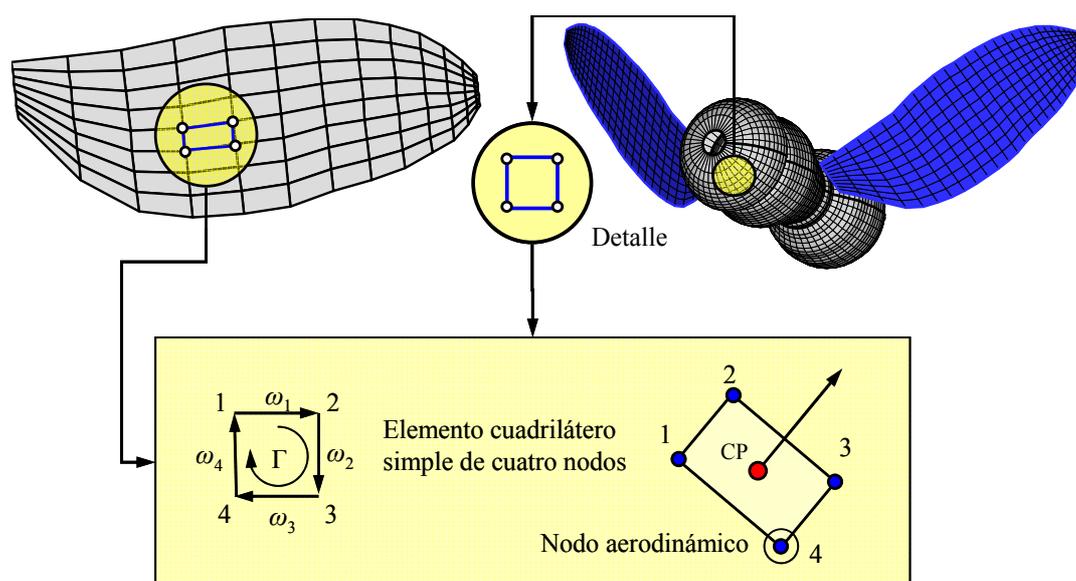


Figura 5: Discretización de la sábana vorticosa adherida al ala y al cuerpo del insecto

5 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Las ecuaciones diferenciales y el vector de restricciones cinemáticas, Φ , expuestas en la Ec. (19) representan un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas (*differential-algebraic equations*, DAEs) de índice 3 para el insecto completo con 6 DOF. Estas ecuaciones son, altamente no-lineales y una técnica analítica para su solución, en general no existe.

La metodología adoptada en este trabajo para resolver el sistema presentado en la Ec. (19) consiste en derivar el vector de restricciones dos veces respecto del tiempo. Esta nueva ecuación suele ser llamada “restricciones a nivel de la aceleración”, y tiene la siguiente forma:

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{B}_q \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{q}, t) \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (20)$$

El paso anterior permite remplazar el sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas que gobiernan la evolución temporal del modelo del insecto por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{B}_q^T \\ \mathbf{B}_q & \mathbf{0}_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^v + (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T \\ \mathbf{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

donde $\mathbf{0}_{12}$ es la matriz nula de 12×12 y,

$$\mathbf{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{q}, t) \right) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{q}, t) \quad (22)$$

Sin embargo, el sistema derivado en la Ec. (21) puede presentar inestabilidades como consecuencia del acumulamiento de errores de redondeo producidos durante el proceso de integración numérica, este hecho se ve reflejado en la violación de las ecuaciones de restricción. Además, la desviación numérica crece linealmente a medida que transcurre el tiempo. Este hecho sumado a los errores de truncamiento propios de los métodos numéricos empleados puede ocasionar, en

el peor de los casos, un acumulamiento cuadrático (ver los trabajos de Ascher *et al.* (1994) y Ascher y Petzold (1993)). Así mismo, este fenómeno es independiente del método numérico elegido para integrar (21) y se origina en la ligera inestabilidad propia del sistema.

En la bibliografía se pueden encontrar varios métodos de estabilización para corregir esta desviación numérica, entre los cuales, el más ampliamente utilizado por su simplicidad es la técnica es Baumgarte (Flores *et al.*, 2011).

Sin embargo, esa técnica puede tener problemas en la práctica y no existe un procedimiento general para determinar los parámetros que intervienen en ella (Bauchau, 2011). Otra técnica utilizada actualmente para estabilizar (21) se basa en la proyección de la solución sobre la variedad de restricción (o parte de ella). Existen dos maneras básicas para realizar esta proyección, una de ellas consiste en la redefinición de la ODE mediante la adición de nuevos multiplicadores de Lagrange (proyección de invariantes), y el otro enfoque consiste en discretizar numéricamente la ODE y al final de cada paso de integración proyectar la solución aproximada sobre la variedad de restricción seleccionada (proyección de coordenadas) (Ascher *et al.*, 1995). En este trabajo se utiliza el método de proyección de coordenadas para eliminar la desviación numérica durante la integración numérica de la DAE de índice 1 de la Ec. (21).

5.1 Esquema de integración y estabilización

El enfoque seguido en este trabajo trata el flujo de aire y la estructura como elementos de un único sistema dinámico y se integran todas las ecuaciones gobernantes numéricamente, simultáneamente e interactivamente en el dominio del tiempo. El esquema de integración numérica adoptado se basa en el método predictor-corrector de cuarto orden desarrollado por Hamming (Preidikman, 1998). Este procedimiento fue elegido por dos razones:

- i) el modelo aerodinámico se comporta mejor cuando las cargas son evaluadas en pasos enteros de tiempo, y
- ii) las cargas aerodinámicas contienen términos que son proporcionales a las aceleraciones, por lo tanto es necesario el uso de métodos que pueden tratar esas contribuciones a ambos lados de las ecuaciones.

El esquema de integración utilizado se puede sintetizar de la siguiente manera:

- En t_0 (es decir, $t = 0$), se conoce el conjunto de condiciones iniciales para iniciar el proceso.
- En t_1 (es decir, $t = \Delta t$) se predice la solución mediante el Método de Euler y se la corrige mediante el Método de Euler Modificado.
- En t_2 (es decir, $t = 2\Delta t$) se predice la solución mediante el Método de Adams-Bashforth de dos pasos y se la corrige mediante el Método de Adams-Moulton de dos pasos.
- En t_3 (es decir, $t = 3\Delta t$) se predice la solución mediante el Método de Adams-Bashforth de tres pasos y se la corrige mediante el Método de Adams-Moulton de tres pasos.
- Para t_4, t_5, t_6, \dots (es decir, $t = 4\Delta t, 5\Delta t, 6\Delta t, \dots$) la solución es computada mediante el predictor-corrector de cuarto orden de Hamming.

Una vez que la solución en cada paso de tiempo es computada, se la proyecta sobre la variedad \mathbf{h} , definida como la combinación de la variedad de restricción de la posición y de la velocidad. Tal proyección se realiza mediante el siguiente esquema:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{n+1} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{n+1} \end{Bmatrix} - \alpha \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{n+1}, t_{n+1}) \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{n+1}, t_{n+1}), \quad (23)$$

donde

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \begin{Bmatrix} \Phi(\mathbf{q}, t) \\ \mathbf{B}_q \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{q}, t) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (24)$$

es un conjunto invariante de la ODE (21) y la solución $(\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T)^T$ es computada por el método de Hamming en $t = t_{n+1}$.

El esquema de estabilización (23) tiene el comportamiento de estabilidad deseado si \mathbf{HF} es definida positiva (donde $\mathbf{H} = \partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{q}$). Para el sistema mecánico bajo estudio, la variedad de restricción resulta asintóticamente estable para $0 < \alpha < 2$, y la elección $\alpha = 1$ (que verdaderamente depende del tamaño del paso de integración h), está cerca de ser óptimo. Además, la matriz de estabilización \mathbf{F} definida como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_q^T (\mathbf{B}_q \mathbf{B}_q^T)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{12} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{12} & \mathbf{I}_{12} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

representa un buen compromiso entre las exigencias de eficiencia y estabilidad. El procedimiento (23) en conjunto con la expresión (25) para la matriz de estabilización \mathbf{F} forman un procedimiento de post-estabilización conocido en la literatura como *S-both*. Más detalles acerca de la estabilidad del esquema (23) y de los criterios de selección de la matriz \mathbf{F} se pueden encontrar en los trabajos de Ascher *et al.* (1994; 1995).

Otro aspecto importante para controlar o eliminar por completo las violaciones de las restricciones es comenzar el proceso de integración con un conjunto de condiciones iniciales en las coordenadas y las velocidades que satisfacen las ecuaciones de restricción correspondientes. Para encontrar dicho conjunto, se utilizó el procedimiento descrito por Nikravesh (2007), el cual se basa en una partición del vector de coordenadas y velocidad generalizadas en conjuntos dependientes e independientes. Es importante mencionar que este método no tiene en cuenta ninguna corrección en los valores estimados de las variables independientes. Por lo tanto, las restricciones cinemáticas a nivel de la posición y velocidad son expresadas como:

$$\Phi(\mathbf{q}_{(ind)}, \mathbf{q}_{(dep)}, t) = \mathbf{0}, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_q^{(dep)} & \mathbf{B}_q^{(ind)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(ind)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{(dep)} \\ \dot{\mathbf{q}}_{(ind)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial}{\partial t} \Phi \\ \dot{\mathbf{q}}_{(ind)} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

donde *(ind)* denota las coordenadas independientes, *(dep)* denota las coordenadas dependientes, $\mathbf{B}_q^{(dep)}$ es una matriz no singular de $n_c \times n_c$, $\mathbf{B}_q^{(ind)}$ es una matriz de $n_c \times (6n_b - n_c)$, y $\mathbf{I}_{(ind)}$ representa una matriz identidad de $n_{\text{DOF}} \times n_{\text{DOF}}$.

Las Ecs. (26) se resuelve iterativamente por el método de Newton-Raphson y las Ecs. (27) se resuelven como un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales. Este tipo de corrección de coordenadas a nivel de la posición y de la velocidad se pueden encontrar en una gran variedad de formas en la literatura (Ascher y Petzold, 1997; Hairer y Wanner, 2002; Hairer *et al.*, 2002).

5.2 Señales de entrada

Para prescribir el movimiento del ala respecto del cuerpo central se adoptó una cinemática real de una mosca de la fruta en vuelo estacionario (Bos *et al.*, 2007; Fritz y Long, 2004). Este modelo fue obtenido sobre la base de mediciones experimentales y constituye, por lo tanto, la representación más realista del movimiento de aleteo de un insecto en vuelo estacionario (ver Figura 6).

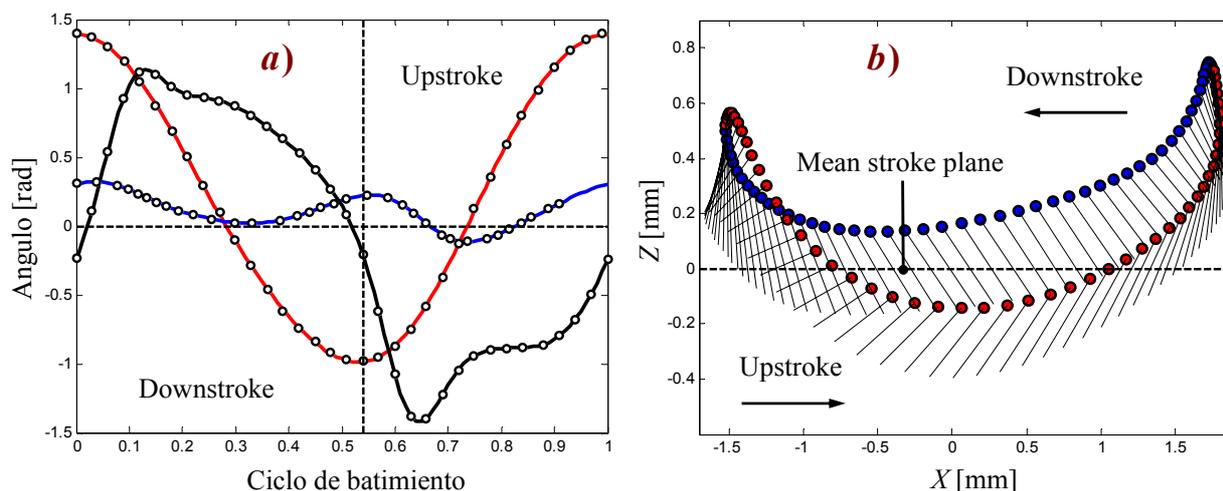


Figura 6: *a)* Cinemática real de una mosca de la fruta en vuelo estacionario *(b)* Trayectoria de la punta del ala

En la Figura 6a se indica en rojo el ángulo de posición dentro del plano de aleteo, en azul el ángulo de desviación respecto del plano de aleteo y en negro el ángulo de rotación), los marcadores circulares indican datos experimentales. En la Figura 6b se muestra la típica figura del ocho en proyección sobre el plano sagital.

El experimento numérico presentado en la siguiente sección se configura por los siguientes elementos:

- i)* frecuencia de batimiento, $n_f = 200$ Hz;
- ii)* ala con una longitud $R = 2.5$ mm y un área $A = 2.21$ mm²; y
- iii)* discretización espacial del MAV de 3448 paneles aerodinámicos.

5.3 Caso de estudio

En este trabajo se presenta solo el caso para un ala rígida, considerando todos los efectos de deformación nulos. Las simulaciones numéricas mostradas a continuación se ejecutaron para tres ciclos de batimiento (300 pasos de tiempo). El código computacional fue desarrollado íntegramente en MATLAB[®]. Además, cabe señalar que el modelo aerodinámico y el modelo dinámico están desacoplados, lo cual implica que el código aerodinámico debe ejecutarse previamente, extraer el conjunto de fuerzas y alimentar con estas el código dinámico. Este mecanismo no representa la realidad, pero es un buen punto de partida para comenzar el estudio de la dinámica del vuelo de este tipo de vehículos.

En primer lugar, con la finalidad de testear la validez y limitaciones del modelo dinámico desarrollado se suprimieron las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre las superficies de las alas y el movimiento prescrito de las alas con respecto al cuerpo central, dejando así el MAV en caída libre. La Figura 7 muestra que la trayectoria vertical predicha por el modelo actual coincide exactamente con los resultados obtenidos por la simple fórmula $\frac{1}{2}gt^2$, disponible en cualquier libro de texto de física básico.

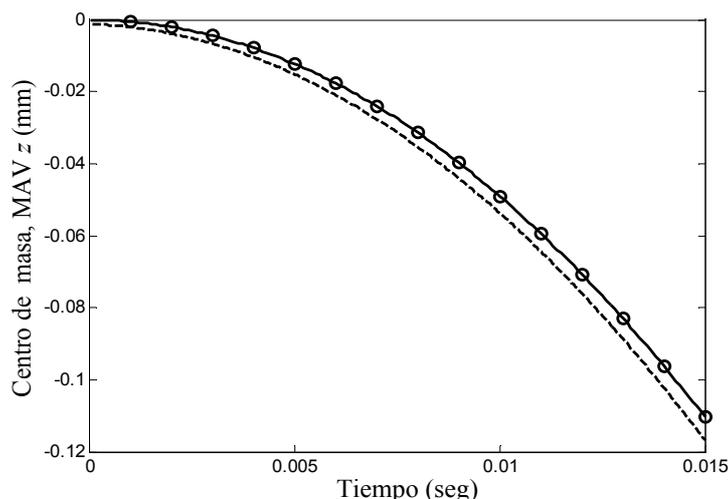


Figura 7: Verificación del modelo dinámico: Marcadores circulares para la fórmula $\frac{1}{2}gt^2$, línea continua para el modelo actual sin movimiento prescrito y línea discontinua para el modelo actual con movimiento prescrito

Por otro lado, si se añade un movimiento prescrito de las alas, se observan pequeñas diferencias con respecto a las curvas anteriores. Este fenómeno se debe a que la velocidad inicial de las alas se traduce en una velocidad inicial de todo el sistema mecánico (en este caso hacia abajo).

En las Figuras 8 y 9 se muestra la evolución temporal de los grados de libertad del sistema y la desviación numérica que ocurre al no satisfacerse exactamente las ecuaciones de restricción.

En la Figura 8a se muestra la evolución temporal de las coordenadas cartesianas rectangulares del centro de masa del cuerpo central (en rojo el desplazamiento vertical, en azul el desplazamiento lateral y en negro el desplazamiento longitudinal). En la Figura 8b se muestra solamente la evolución temporal del ángulo de cabeceo. Como consecuencia de una configuración de vuelo simétrica, tanto el desplazamiento lateral como el ángulo de giñada y rolo son nulos. Por razones de visualización no se muestran dichos ángulos en la Figura 8b.

En la curva en color rojo de la Figura 8a se puede observar una pequeña elevación del insecto y un pequeño desplazamiento del insecto hacia atrás. En la Figura 8b queda en evidencia, también, un decremento del ángulo de cabeceo durante todo el tiempo de simulación. Si este decremento continúa, el vuelo se tornaría inestable y el insecto se estrellaría. Este fenómeno se debe principalmente a la ausencia de elementos de control que actúen como instrumentos de estabilización permitiendo al insecto navegar adecuadamente.

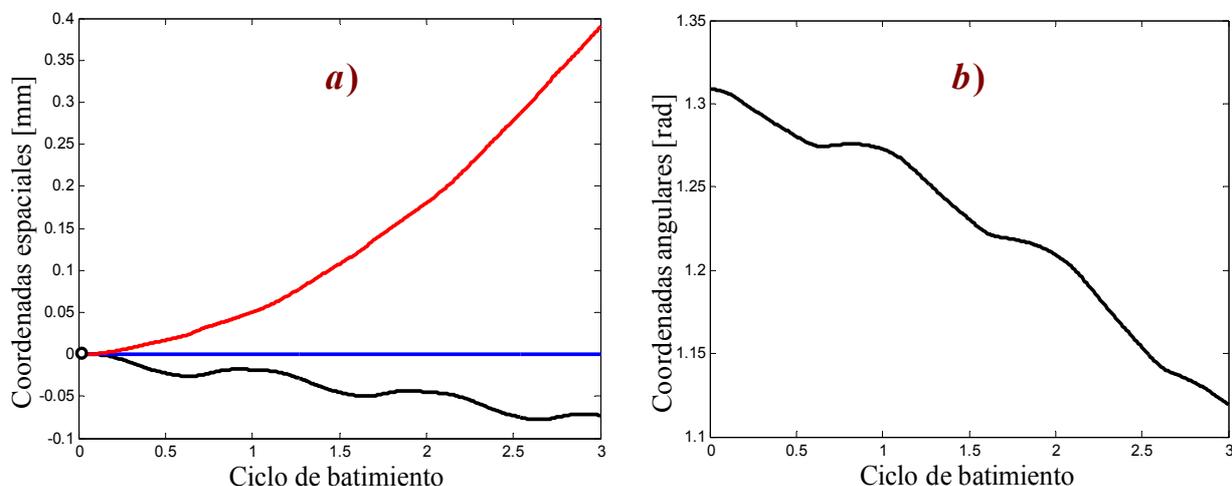


Figura 8: Evolución temporal de los grados de libertad del insecto; a) Coordenadas espaciales; b) Ángulo de cabeceo

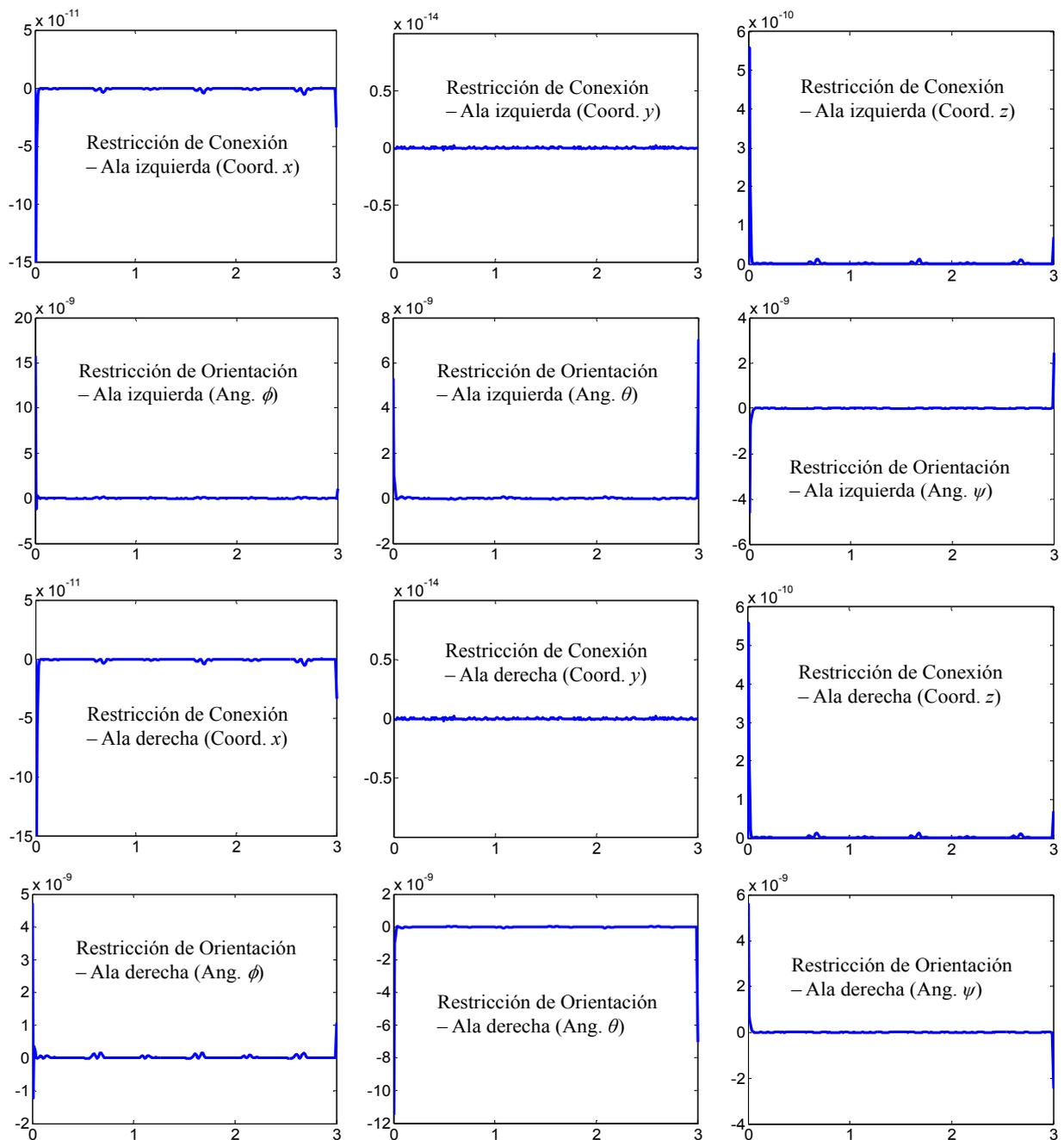


Figura 9: Desviación numérica en las ecuaciones de restricción

La Figura 9 muestra que el método de post-estabilización adoptado en este trabajo (proyección de coordenadas), para controlar las desviaciones numéricas que ocurren en las ecuaciones de restricción a nivel de la posición, trabaja satisfactoriamente. De hecho, la desviación numérica más grande es del orden de 10^{-9} y ocurre en las restricciones de orientación de las alas, donde existe un movimiento prescrito. Además, se realizaron pruebas con otros procedimientos de estabilización tal como la técnica de Baumgarte obteniéndose una desviación numérica significativa en las restricciones de orientación del orden de 10^{-2} . El mal funcionamiento de este método está relacionado con el paso de tiempo adoptado para la integración numérica, $\Delta t = 0.01$, el cual está controlado por la aerodinámica. Otra dificultad adicional, aunque no muy clara, que puede afectar negativamente la utilización de la técnica de Baumgarte está relacionada con la heterogeneidad del sistema mecánico analizado (relación $m_{\text{cuerpo}}/m_{\text{ala}} \approx 100$) y la relativa complejidad de las ecuaciones de restricción a nivel de la orientación.

6 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En el presente trabajo se desarrolló el sistema de ecuaciones que gobiernan el movimiento de un insecto. Para ello se utilizó una formulación energética basada en las ecuaciones de Lagrange para sistemas con restricciones. La robustez y generalidad del modelo desarrollado permite agregar cuerpos al sistema de una manera simple y, además, permite tratar de una manera sencilla las fuerzas no conservativas provenientes de la aerodinámica.

El modelo dinámico desarrollado en este trabajo tiene en cuenta el aporte de los efectos inerciales de las alas sobre el cuerpo del insecto, efecto que ha sido despreciado por la mayoría de las publicaciones encontradas en la literatura.

La integración numérica de las ecuaciones dinámicas se realizó con éxito por medio de una técnica modificada propuesta en este trabajo. Este esquema modificado consiste en el método predictor-corrector de cuarto orden de Hamming acoplado con un procedimiento de post-estabilización basado en la proyección de coordenadas.

El modelo fue validado mediante la comparación de sus resultados con la simple fórmula para la caída libre disponible en los libros básicos de física. Adicionalmente, se presentó un primer análisis de la dinámica del vuelo de un insecto en vuelo estacionario y, aunque los modelos aerodinámicos y dinámicos aún están desacoplados, se obtuvieron resultados alentadores.

Actualmente, se está desarrollando un algoritmo para combinar el modelo aerodinámico y dinámico como un único sistema dinámico para resolver todas las ecuaciones gobernantes a través del procedimiento numérico propuesto en este trabajo.

REFERENCIAS

- Aguayo, D.D., Santoyo, F.M., De la Torre-I, M.H., Salas-Araiza, M.D., Caloca-Mendez, C. and Gutierrez Hernandez, D.A., Insect wing deformation measurements using high speed digital holographic interferometry. *Optics Express*, 18(6):5661-5667, 2010.
- Ansari, S.A., Żbikowski, R. and Knowles, K., Non-linear unsteady aerodynamics model for insect-like flapping wings in the hover. Part 2: implementation and validation. *Aerospace Engineering*, 220:169-186, 2006.
- Ascher, U.M. and Petzold, L.R., *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- Ascher, U.M. and Petzold, L.R., Stability of computational methods for constrained dynamics systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14(1):95-120, 1993.
- Ascher, U.M., Chin, H. and Reich, S., Stabilization of DAEs and invariant Manifolds. *Numer. Math.*, 67:131-149, 1994.
- Ascher, U.M., Chin, H., Petzold, L.R. and Reich, S., Stabilization of constrained mechanical systems with DAEs and invariant manifolds. *Journal of Mech. Struct. Machines*, 23:135-158, 1995.
- Baruh, H., *Analytical Dynamics*. McGraw Hill, 1999.
- Barut, A., Das, M. and Madenci, E., Nonlinear deformations of flapping wings on a micro air vehicle. 47th *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference*, May 1-4, Newport, Rhode Island, AIAA 2006-1662, 2006.
- Bauchau, O.A., *Flexible multibody dynamics*, Springer, New York, 2011.
- Berman, G. and Wang, Z., Energy-minimizing kinematics in hovering insect flight. *Journal of Fluid Mechanics*, 582:53-168, 2007.
- Bolender, M.A., Rigid multi-Body equations-of-motion for Flapping Wing MAVs using Kane's equations. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, AIAA Paper 2009-6158*, Chicago, IL, 2009.
- Bos, F.M., Lentink, D., van Oudheusden, B.W. and Bijl, H., Numerical study of kinematic wing models of hovering insect flight. *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 1-18, 2007.

- Buler, W., Loroch, L., Sibilski, K. and Zyluk, A., Modeling and simulation of the nonlinear dynamic behavior of a flapping wings micro-aerial-vehicle. *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA Paper 2004-541*, Reno, NV, 2004.
- Combes, S.A. and Daniel, T.L., Flexural stiffness in insect wings: I. Scaling and the influence of wing venation. *Journal of Experimental Biology*, 206:2979-2987, 2003a.
- Combes, S.A. and Daniel, T.L., Flexural stiffness in insect wings: II. Spatial distribution and dynamic wing bending. *Journal of Experimental Biology*, 206:2989-2997, 2003b.
- Deng, X., Schenato, L. and Sastry, S., Flapping flight for biomimetic robot insects: Part 2: Flight control design. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 22(4):789-803, 2006b.
- Deng, X., Schenato, L. and Sastry, S., Hovering flight control of a micromechanical flying insect. *40th IEEE Conference on Decision and Control, Institute of Electrical and Electronics Engineers Paper TuA08-5*, Orlando, FL, 2001.
- Deng, X., Schenato, L., Wu, W. and Sastry, S., Flapping flight for biomimetic robot insects: Part 1: System modeling. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 22(4):776-788, 2006a.
- Dickinson, M., Solving the mystery of insect flight. *Scientific American*, 284(6):48-57, 2001.
- Dickinson, M.H., Lehmann, F.O. and Sane, S.P., Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight. *Science*, 284:1954-1960, 1999.
- Dickinson, M.H., The effect of wing rotation on unsteady aerodynamic performance at low Reynolds numbers. *The Journal of Experimental Biology*, 192:179-206, 1994.
- Dietl, J. and Garcia, E., Stability in ornithopter longitudinal flight dynamics. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(4):1157-1162, 2008.
- Doman, D., Oppenheimer, M. and Sighthorsson, D., Dynamics and control of a minimally actuated biomimetic vehicle: Part 1: Aerodynamic Model. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, AIAA Paper 2009-6160*, Chicago, IL, 2009a.
- Doman, D., Oppenheimer, M. and Sighthorsson, D., Dynamics and control of a minimally actuated biomimetic Vehicle: Part 2: Control. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, AIAA Paper 2009-6161*, Chicago, IL, 2009b.
- Ellington, C.P., The aerodynamics of hovering insect flight. III. Kinematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 305(1122): 41-78, 1984b.
- Ellington, C.P., The aerodynamics of hovering insect flight. IV. Aerodynamics Mechanisms. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 305(1122):79-113, 1984a.
- Ellington, C.P., The Novel Aerodynamics of Insect Flight: Applications to Micro-Air vehicles. *Journal of Experimental Biology*, 202(23):3439-3448, 1999.
- Ertas, A., Krafcik, J.T. and Ekwaro-Osire, S., Performance of an anisotropic allman/DKT 3-node thin triangular flat shell element. *Composites Engineering*, 2:269-280, 1992.
- Etkin, B. and Reid, L., *Dynamics of Flight*, Wiley, New York, 1996.
- Flores, P., Machado, M. and da Silva, M.T., A parametric study on the Baumgarte stabilization method for forward dynamics of constrained multibody systems. *Journal Comp. Nonlinear Dynamics*, 6:1-9, 2011.
- Fritz, T.E. and Long, L.N., Object-oriented unsteady vortex lattice method for flapping flight. *Journal of Aircraft*, 41(6):1275-1290, 2004.
- Grauer, J. and Hubbard, J., Multibody model of an ornithopter. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 32(5):1675-1679, 2009.
- Hairer, E. and Wanner, G., *Solving Ordinary Differential Equations II – Stiff and Differential-Algebraic Problems*, 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- Hairer, E., Lubich, C. and Wanner, G., *Geometric Numerical Integration – Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- Heard, W.B., *Rigid Body Mechanics*, Wiley – VCH Verlag GmbH & Co., 2006.

- Ishihara, D., Hoire, T. and Denda M., A two-dimensional computational study on the fluid-structure interaction cause of wing pitch changes in dipteran flapping flight. *Journal of Experimental Biology*, 212:1-10, 2009.
- Kane T.R., *Dynamics*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1968.
- Karnovsky, I.A. and Lebed, O.I., *Formulas for Structural Dynamics: Tables, Graphs and Solutions*, McGraw Hill, 1st edition, New York, 2000.
- Konstadinopoulos, P., Mook, D.T. and Nayfeh, A.H., A numerical method for general unsteady aerodynamics. AIAA-81-1877. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, August 19–21, Albuquerque, New Mexico, 1981.
- Lasek, M. and Sibilski, K., Modeling and simulation of flapping wing control for a micromechanical flying insect (Entomopter). *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit, AIAA Paper 2002-4973*, Monterrey, CA, 2002.
- Lehmann, F.-O. and Pick, S., The aerodynamic benefit of wing–wing interaction depends on stroke trajectory in flapping insect wings. *Journal of Experimental Biology*, 210:1362-1377, 2007.
- Lehmann, F.-O., The mechanisms of lift enhancement in insect flight. *Naturwissenschaften*, 91:101–122, 2004.
- Liu, H., Integrated modeling of insect flight: from morphology, kinematics to aerodynamics. *Journal of Computational Physics*, 228:439-459, 2009.
- McMasters, J.H., The flight of the bumblebee and related myths of entomological engineering. *American Scientist*, 77:164-169, 1989.
- Mueller, T.J. and Delaurier, J.D., An overview of micro air vehicle aerodynamics. *Progress in Astronautics and Aeronautics*, 195:1-10, 2001.
- Nakata, T. and Liu, H., A fluid-structure interaction model of insect flight with flexible wings. *Journal of Computational Physics*, 231:1822-1847, 2012.
- Nikravesh, P.E., Initial condition correction in multibody dynamics. *Multibody Syst. Dynamics*, 18:107-115, 2007.
- Orlowski, C., Girard, A.R. and Shyy, W., Derivation and simulation of the nonlinear dynamics of a flapping wing micro-air vehicle. 2009 European Micro-Air Vehicle Conference and Competition, Delft, The Netherlands, 2009.
- Orlowski, C., Girard, A.R. and Shyy, W., Open loop pitch control of a flapping wing micro air vehicle using a tail and control mass. 2010 American Control Conference, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Baltimore, MD, 536-541, 2010.
- Orlowski, C.T. and Girard, A.R., Modeling and simulation of nonlinear dynamics of flapping wing micro air vehicles. *AIAA Journal*, 49(5):969-981, 2011.
- Preidikman, S., Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems. *Ph.D. Tesis*, Dep. of Eng. Science and Mechanics, Virginia Tech, 1998.
- Ramamurti, R. and Sandberg, W.C., A Three-dimensional computational study of the aerodynamic mechanisms of insect flight. *Journal of Experimental Biology*, 205:1507-1518, 2002.
- Roccia, B.A., Preidikman, S. y Massa, J.C., Desarrollo de un código computacional para simular y analizar la cinemática de alas batientes. *Mecánica Computacional*, 26:3224-3245, 2007.
- Roccia, B.A., Preidikman, S. y Massa, J.C., Aerodinámica de alas batientes: influencia del desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque. *Mecánica Computacional*, 29:3799-3823, 2010.
- Roccia, B.A., Preidikman, S. y Massa, J.C., Un modelo multicuerpo para estudiar la dinámica de micro vehículos aéreos de alas batientes. *Mecánica Computacional*, 30:2943-2960, 2011.
- Roccia, B.A., Preidikman, S., Massa J.C. and Mook, D.T., Development of a kinematical model to study the aerodynamics of flapping-wings. *International Journal of Micro Air Vehicles*, 3(2):61-88, 2011.
- Sane, S.P., The aerodynamics of insect flight. *The Journal of Experimental Biology*, 206:4191-4208, 2003.

- Schenato, L., Campolo, D. and Sastry, S., Controllability issues in flapping flight for biomimetic micro air vehicles (MAVS),” 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Institute of Electrical and Electronics Engineers Paper FrE10-5, Maui, HI, 2003.
- Shabana, A.A., *Computational Dynamics*, John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom, 2010.
- Shabana, A.A., *Dynamics of multibody systems*, Cambridge, New York, 2005.
- Smith, M.J.C., The effect of the flexibility on the aerodynamics of moth wing: towards the development of flapping-wing technology. 33rd *Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, January 9-12, Reno, USA, AIAA 95-0743, 1995.
- Song, D., Wang, H., Zeng, L. and Yin, C., Measuring the camber deformation of a dragonfly wing using projected comb fringe. *Review of Scientific Instruments*, 72(5):2450-2454, 2001.
- Sun, M. and Xiong, Y., Dynamic flight stability of a hovering bumblebee. *Journal of Experimental Biology*, 208(3):447-549, 2005.
- Sun, M., Wang, J. and Xiong, Y., Dynamic flight stability of Hovering Insects. *Acta Mechanica Sinica*, 23(3):231-246, 2007.
- Taylor, G. and Thomas, A., Dynamic flight stability in the Desert Locust *Schistocera Gregaria*. *Journal of Experimental Biology*, 206(16):2803–2829, 2003.
- Terze, Z. and Naudet, J., Projective constraint violation stabilization method for multibody systems on manifolds. 5th *International Congress of Croatian Society of Mechanics*, September 21-23, Troger/Split, Croatia, 2006.
- Usherwood, J.R. and Ellington, C.P., The Aerodynamics of Revolving Wings I. Model Hawkmoth Wings. *Journal of Experimental biology*, 205:1547-1564, 2002.
- Van den Berg, C. and Ellington, C.P., The three-dimensional leading-edge vortex of a ‘hovering’ model hawkmoth. *Phil. Transaction Royal Society London B*, 352:329-340, 1997.
- Vanella, M., Fitzgerald, T., Preidikman, S., Balaras, E. and Balachandran, B., Influence of flexibility on the aerodynamic performance of a hovering wing. *Journal of Experimental Biology*, 212:95-105, 2009.
- Vest, M. and Katz, J., Unsteady Aerodynamic Model of Flapping Wings. *AIAA Journal*, 34(7):1435-1440, 1996.
- Walker, S.M., Thomas, A.L.R. and Taylor, G.K., Deformable wing kinematics in the desert locust: how and why do camber, twist and topography vary through the stroke? *Journal of the Royal Society of London, Interface*, 6(38):735-747, 2009a.
- Walker, S.M., Thomas, A.L.R. and Taylor, G.K., Deformable wing kinematics in free-flying hoverflies. *Journal of the Royal Society of London, Interface*, 7(42):131-142, 2010.
- Walker, S.M., Thomas, A.L.R. and Taylor, G.K., Photogrammetric reconstruction of high-resolution surface topographies and deformable wing kinematics of tethered locusts and free-flying hoverflies. *Journal of the Royal Society of London, Interface*, 6(33):351-366, 2009b.
- Wang, H., Zeng, L., Liu, H. and Yin, C., Measuring wing kinematics, flight trajectory and body attitude during forward flight and turning maneuvers in dragonflies. *Journal of Experimental Biology*, 206:745-757, 2003.
- Weis-Fogh, T., Quick estimates of flight fitness in hovering animals, including novel mechanisms for lift production. *Journal of Experimental Biology*, 59:169-230, 1973.
- Willmott, A.P. and Ellington, C.P., The mechanics of flight in the hawkmoth *Manduca sexta*. I. Kinematics of hovering and forward flight. *Journal of Exper. Biology*, 200:2727-2738, 1997.
- Wootton, R.J., Functional morphology of insect wings. *Annu. Rev. Entomology*, 37:113-140, 1992.
- Wootton, R.J., Support and deformability in insect wings. *Journal of Zoology*, 193:447-468, 1981.
- Zeng, L., Hao, Q. and Kawachi, K., A scanning projected line method for measuring a beating bumblebee wing. *Optics Commun.*, 183:19-44, 2000.
- Zeng, L., Matsumoto, H. and Kawachi, K., A fringe shadow method for measuring flapping angle and torsional angle of a dragonfly wing. *Measure. Sci. Technol.*, 7:786-791, 1996.