

## ANÁLISIS DE PLACAS MULTICAPAS MEDIANTE UN MODELO DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDO

**Roberto S. Carnicer, Braian A. Desía, Rodolfo A. Schwarz and Qian Pan**

*Facultad de Ingeniería, Universidad de Belgrano, Villanueva 1324, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina, [rcarnicer@freyreyasoc.com.ar](mailto:rcarnicer@freyreyasoc.com.ar), [b.desia@hotmail.com.ar](mailto:b.desia@hotmail.com.ar), [rodolfo.schwarz@comunidad.ub.edu.ar](mailto:rodolfo.schwarz@comunidad.ub.edu.ar).*

**Palabras Clave:** Elementos finitos híbrido, Placas multicapas, Multiplicadores de Lagrange, Tensiones interlaminares.

**Resumen.** Se presenta una solución mixta para resolver el comportamiento de placas multicapas por aplicación del método de los elementos finitos. El objeto principal es el de considerar cada capa como si fuera una placa aislada, donde la continuidad de los desplazamientos se logra mediante multiplicadores de Lagrange (que representan variables estáticas). Este procedimiento nos permite trabajar con cualquier modelo para placa simple (de manera de asegurar el adecuado comportamiento de cada capa), y la complejidad del sistema multicapa se evita asegurando la condición de desplazamientos mediante los multiplicadores de Lagrange (variables estáticas).

La placa se discretiza por modelización de elementos finitos basada en un modelo híbrido primario, donde el dominio es dividido por cuadriláteros, tanto para el campo de los desplazamientos como para el de las variables estáticas.

Asimismo, se aprovecha el uso de programas computacionales orientados al cálculo numérico, que disponen de funciones internas para resolver sistemas de ecuaciones lineales, obtención de autovalores, etc.

Se ha implementado este elemento híbrido o mixto para placas y se han realizado diversos ejemplos que han sido contrastados exitosamente por resultados obtenidos mediante otros métodos de la bibliografía.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los materiales compuestos avanzados han sido ampliamente usados en las industrias aeroespacial, aeronáutica, marina y automovilística desde 1960 en adelante debido a sus excelentes propiedades tales como alta relación rigidez/peso, resistencia a la corrosión, buen comportamiento a la fatiga y bajo coeficiente térmico en la dirección de la fibra, entre otras. Últimamente, su uso se ha trasladado a la industria de la construcción e ingeniería civil como refuerzo para estructuras deterioradas, como es el caso de los Polímeros Compuestos Reforzados con Fibras (FRPCs) (Pendhari, Kant and Desai, 2008). La expansión en el uso de estos materiales requiere del desarrollo de modelos que puedan describir su comportamiento adecuadamente. En el presente artículo, se presenta un método de análisis para un tipo especial de materiales compuestos: las placas compuestas o laminados.

En base a un modelo híbrido de elementos finitos para resolver placas compuestas (Alliney and Carnicer, 1992), se ha desarrollado una mejora del mismo mediante la utilización de teoremas variacionales mixtos, los cuales permiten el empleo de variables cinemáticas, como desplazamientos y giros, así como de variables estáticas, como tensiones.

A su vez, la mejora del método busca en su aplicación mediante modelos numéricos, el aprovechamiento de programas para el cálculo numérico, tal como lo son MATLAB y su equivalente de código libre, OCTAVE.

## 2 REVISIÓN DE LA TEORÍA DE PLACAS DE MINDLIN

La teoría de Mindlin parte de la hipótesis de que las fibras rectas y normales a la superficie media de la placa se mantienen rectas a la superficie media deformada, pero no normales al plano medio de la misma.

El funcional de la energía para una placa, puede expresarse como:

$$J(u) = \iiint_{\omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) d\omega - \iiint_{\omega} f_j u_j d\omega - \iint_{S^1} p'_j u_j dS^1 - \iint_{S^2} p''_j u_j dS^2 \quad (1)$$

donde las  $f_j$  son las fuerzas por unidad de volumen y las  $p'_j$  y  $p''_j$ , las fuerzas por unidad de superficie, donde  $S^1$  y  $S^2$  son las superficies superior e inferior de la placa, que se asume empotrada en todo el perímetro B (Ver Figura 1). La condición estacionaria (mínima) del funcional se obtiene a partir de la variación del mismo, que resulta:

$$\delta J(u) = \iiint_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \iiint_{\Omega} f_j v_j d\Omega - \iint_{S^1} p'_j v_j dS^1 - \iint_{S^2} p''_j v_j dS^2 \quad (2)$$

Las condiciones de borde que implícitamente se tienen en cuenta son:

$$\iint_{S^1} \sigma_{3j}(u) n'_3 v_j dS^1 = \iint_{S^1} p'_j v_j dS^1 \quad (3)$$

$$\iint_{S^2} \sigma_{3j}(u) n''_3 v_j dS^2 = \iint_{S^2} p''_j v_j dS^2 \quad (4)$$

con:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= [C_{13} \varepsilon_{11}(u) + C_{23} \varepsilon_{22}(u) + C_{33} \varepsilon_{33}(u)] \\ \sigma_{31} &= C_{44} \varepsilon_{31}(u) \\ \sigma_{32} &= C_{55} \varepsilon_{32}(u) \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $C_{ij}$  son las componentes del tensor constitutivo de cuarto orden para cuerpos sólidos en tres dimensiones.

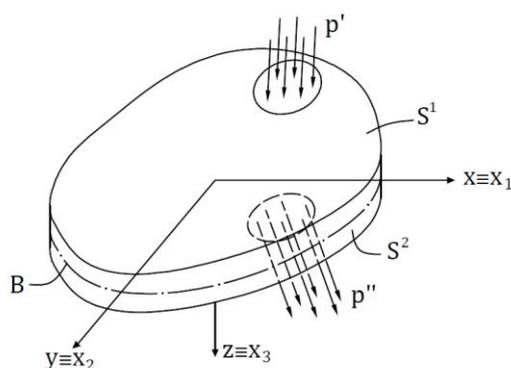


Figura 1: Placa simple bajo cargas superficiales externas

El campo de desplazamientos  $u = [u_1, u_2, u_3]^T$  para un punto  $(x, y, z)$  se define como:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u_{o1}(x, y) - z \beta_1(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= u_{o2}(x, y) - z \beta_2(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= u_{o3}(x, y) \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $u_o = [u_{o1}, u_{o2}, u_{o3}]^T$  son desplazamientos en el plano medio de referencia, en tanto que  $\beta = [\beta_1, \beta_2]^T$  son rotaciones de la normal transversal alrededor de los ejes  $y, x$  respectivamente. La variable  $z$  se evalúa desde el plano medio de la placa.

### 3 MODELO DE PLACAS MULTICAPAS

Partiendo de una teoría de placas simples, tal como la de Kirchhoff o la de Mindlin, es posible confeccionar un modelo de placas compuestas. Cada capa es considerada como una placa simple bajo cargas superficiales (ver Figura 2), donde las condiciones de borde son:

Para la primera placa:

$S_{1,1}$ : Superficie superior 1 de la capa 1 (Interface I –  $S_I$ ):

$$\iint_{S_{1,1}} \sigma_{3j}(u) n'_{1,3} v_j dS_{1,1} = \iint_{S_{1,1}} p_j v_j dS_{1,1} \quad (7)$$

$S_{1,2}$ : Superficie inferior 2 de la capa 1 (Interface II –  $S_{II}$ ):

$$\iint_{S_{1,2}} \sigma_{3j}(u) n''_{1,3} v_j dS_{1,2} = \iint_{S_{1,2}} q_{j,II} v_j dS_{1,2} \quad (8)$$

donde  $q_{j,II}$  es la componente del vector tracción que se transmite de la superficie superior 1 de la placa 2 hacia la superficie inferior 2 de la placa 1 (Interface II).

Para la segunda placa:

$S_{2,1}$ : Superficie superior 1 de la capa 2 (Interface II –  $S_{II}$ ):

$$\iint_{S_{2,1}} \sigma_{3j}(u) n'_{2,3} v_j dS_{2,1} = \iint_{S_{2,1}} q_{j,II} v_j dS_{2,1} \quad (9)$$

$S_{2,2}$ : Superficie inferior 2 de la capa 2 (Interface III –  $S_{III}$ ):

$$\iint_{S_{2,2}} \sigma_{3j}(u) n''_{2,3} v_j dS_{2,2} = \iint_{S_{2,2}} q_{j,III} v_j dS_{2,2} \quad (10)$$

Finalmente, en el caso particular de tres capas, para la última placa:

$S_{2,1}$ : Superficie superior 1 de la capa 3 (Interface III –  $S_{III}$ ):

$$\iint_{S_{3,1}} \sigma_{3j}(u) n'_{3,3} v_j dS_{3,1} = \iint_{S_{3,1}} q_{j,III} v_j dS_{3,1} \quad (11)$$

$S_{2,2}$ : Superficie inferior 2 de la capa 3 (Interface IV –  $S_{IV}$ ):

$$\iint_{S_{3,2}} \sigma_{3j}(u) n''_{3,3} v_j dS_{3,2} = 0 \quad (12)$$

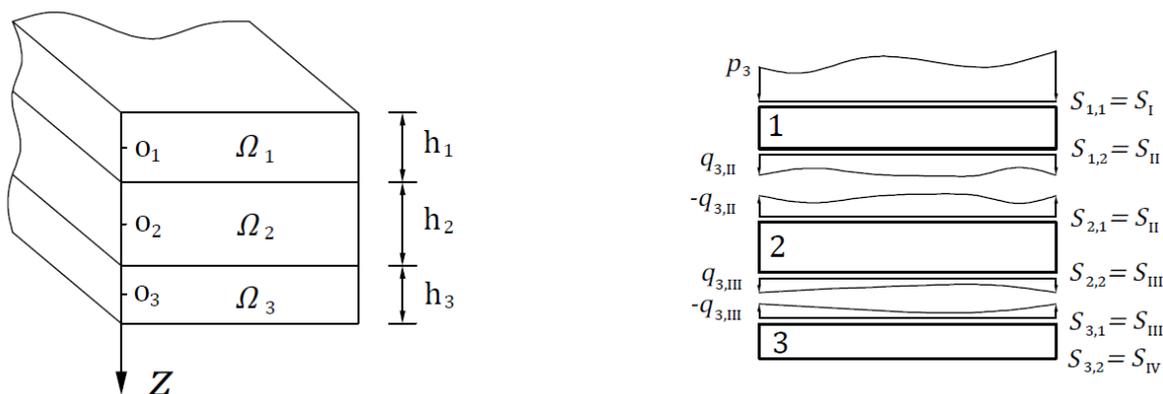


Figura 2: Placa multicapas y fuerzas de tracción interlaminares.

Luego, el funcional de la energía para el conjunto de placas se define como:

$$\begin{aligned} J(u_i) = & \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_1} \bar{C}_1 \varepsilon_{ij}(u_1) \varepsilon_{ij}(u_1) d\Omega_1 + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_2} \bar{C}_2 \varepsilon_{ij}(u_2) \varepsilon_{ij}(u_2) d\Omega_2 + \\ & + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_3} \bar{C}_3 \varepsilon_{ij}(u_3) \varepsilon_{ij}(u_3) d\Omega_3 + \\ & - \iiint_{\Omega_1} f_{1j} u_{1j} d\Omega_1 - \iiint_{\Omega_2} f_{2j} u_{2j} d\Omega_2 - \iiint_{\Omega_3} f_{3j} u_{3j} d\Omega_3 + \\ & - \iint_{S_{1,1}} p_j u_{1j} dS_{1,1} - \iint_{S_{1,2}} q_{j,II} u_{1j} dS_{1,2} + \\ & - \iint_{S_{2,1}} (-q_{j,II}) u_{2j} dS_{2,1} - \iint_{S_{2,2}} q_{j,III} u_{2j} dS_{2,2} + \\ & - \iint_{S_{3,1}} (-q_{j,III}) u_{3j} dS_{3,1} \quad (13) \end{aligned}$$

que puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J(u) = & \frac{1}{2} \sum_n \iiint_{\Omega_n} \bar{C}_i \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) d\Omega_n - \iiint_{\Omega_n} f_{nj} u_{nj} d\Omega_n - \iint_{S_I} p_j u_{ij} dS_I + \\ & - \iint_{S_{II}} q_{j,II} (u_{1j} - u_{2j}) dS_{II} - \iint_{S_{III}} q_{j,III} (u_{2j} - u_{3j}) dS_{III} \quad (14) \end{aligned}$$

Procediendo de igual forma, se puede obtener el funcional de la energía para un sistema de  $n$  placas.

#### 4 FORMULACIÓN MATEMÁTICA PARA PLACAS MULTICAPAS MINDLIN

Asumamos una placa compuesta de  $n$  de capas de altura  $h_i$ . Se define un sistema de coordenadas locales para cada capa, en su superficie media. Los desplazamientos para una capa genérica  $i$  están dados por los desplazamientos  $u_{oi} = [u_{oxi}, u_{oyi}]^T$  en el plano de referencia, el desplazamiento vertical  $w_{oi}$  (que se considera constante a lo largo del espesor de la placa) y dos rotaciones  $\beta = [\beta_{xi}, \beta_{yi}]^T$  (Ver Figura 3). De esta forma, el vector

desplazamiento para un punto cualquiera de una capa genérica  $i$  es el siguiente:

$$u_i = [u_{xi}(x, y, z), u_{yi}(x, y, z), w_i(x, y)]^T \tag{15}$$

siendo:

$$\begin{aligned} u_{xi}(x, y, z) &= u_{oxi}(x, y) - z \beta_{xi}(x, y) \\ u_{yi}(x, y, z) &= u_{oyi}(x, y) - z \beta_{yi}(x, y) \end{aligned} \tag{16}$$

A fin de asegurar la continuidad de desplazamientos en cada interface, es decir, evitar el resbalamiento entre capas, se imponen las siguientes restricciones cinemáticas:

1. Los desplazamientos  $u_{xi}(x, y, h_i/2)$  y  $u_{yi}(x, y, h_i/2)$  en la interface I+1,

$$\begin{aligned} u_{xi}(x, y, h_i/2) &= u_{oxi}(x, y) - \frac{h_i}{2} \beta_{xi}(x, y) \\ u_{yi}(x, y, h_i/2) &= u_{oyi}(x, y) - \frac{h_i}{2} \beta_{yi}(x, y) \end{aligned} \tag{17}$$

deben ser iguales a los desplazamientos  $u_{xi+1}(x, y, -h_{i+1}/2)$  y  $u_{yi+1}(x, y, -h_{i+1}/2)$  en la interface I+1,

$$\begin{aligned} u_{xi+1}(x, y, -h_{i+1}/2) &= u_{oxi+1}(x, y) + \frac{h_{i+1}}{2} \beta_{xi+1}(x, y) \\ u_{yi+1}(x, y, -h_{i+1}/2) &= u_{oyi+1}(x, y) + \frac{h_{i+1}}{2} \beta_{yi+1}(x, y) \end{aligned} \tag{18}$$

teniéndose:

$$\begin{aligned} u_{xi}(x, y, h_i/2) &= u_{xi+1}(x, y, -h_{i+1}/2) \\ u_{yi}(x, y, h_i/2) &= u_{yi+1}(x, y, -h_{i+1}/2) \end{aligned} \tag{19}$$

2. Los desplazamientos verticales  $w_i$  de la capa  $i$  deben ser los mismos que los desplazamientos verticales  $w_{i+1}$  de la capa  $i+1$ :

$$w_i(x, y) = w_{i+1}(x, y) \tag{20}$$

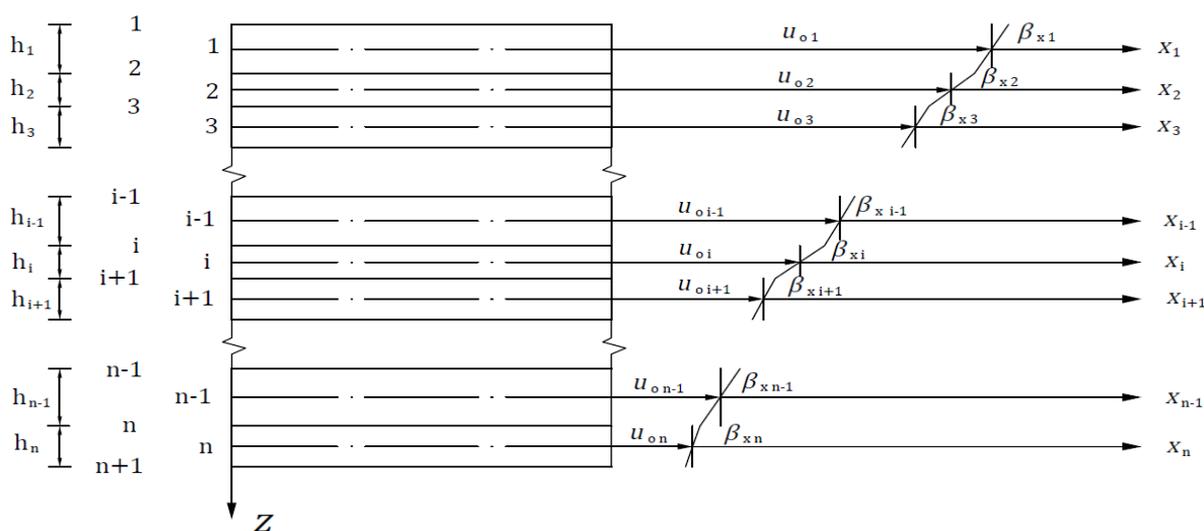


Figura 3: Campo de desplazamientos a lo largo del espesor para el modelo multicapas.

El funcional de Mindlin-Reissner para una capa genérica  $i$  puede expresarse como sigue:

$$J(u, \beta, w) = \frac{1}{2} h_i a(u_i, u_i) + \frac{1}{2} \frac{h_i^3}{12} a(\beta_i, \beta_i) + \frac{1}{2} h_i b(\nabla w_i - \beta_i, \nabla w_i - \beta_i) - \iint_{\Omega} p_i w_i d\Omega \quad (21)$$

donde los operadores bilineales  $a(u_i, u_i)$  y  $a(\beta_i, \beta_i)$  representan la energía potencial por esfuerzos membranales y flexión respectivamente, mientras que  $b(\nabla w_i - \beta_i, \nabla w_i - \beta_i)$ , el término de energía de corte.

El funcional de la energía potencial total se puede determinar considerando a la placa compuesta como un apilamiento de placas simples, donde la continuidad de desplazamientos es asegurada matemáticamente a través de la inclusión de multiplicadores de Lagrange  $\lambda = [\lambda_x, \lambda_y]^T$  y  $\mu$ . De este modo, se tiene:

$$J(u, \beta, w, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} h_i a(u_i, u_i) + \frac{1}{2} \frac{h_i^3}{12} a(\beta_i, \beta_i) + \frac{1}{2} h_i b(\nabla w_i - \beta_i, \nabla w_i - \beta_i) - \iint_{\Omega} p_i w_i d\Omega \right\} + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \left( u_{oj} - \beta_j \frac{h_j}{2} \right) - \left( u_{oj+1} - \beta_{j+1} \frac{h_{j+1}}{2} \right) \right] \lambda_{j+1} d\Omega + \iint_{\Omega} (w_j - w_{oj+1}) \mu_{j+1} d\Omega \right\} \quad (22)$$

Comparando la expresión (22) con la (14) se pueden establecer las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} [\lambda_{x,j}, \lambda_{y,j}]^T &= -[q_{1,j}, q_{2,j}]^T \\ \mu &= -q_{3,j} \end{aligned} \quad (23)$$

De esta forma,  $\lambda = [\lambda_x, \lambda_y]^T$  son los multiplicadores de Lagrange que representan las fuerzas tangenciales distribuidas en la interface  $j$  (debido a los desplazamientos en el plano), mientras que  $\mu$  es aquel que representa la fuerza vertical actuante en la interface  $j$  (debido a los desplazamientos verticales). El significado físico de los multiplicadores de Lagrange se justifica.

## 5 DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Minimizando el funcional de la energía para una placa genérica  $i$  se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\delta u_{oi}: \quad h_i a_i(u_{oi}, \delta u_{oi}) - \int_{\Omega_i} \lambda_i \delta u_{oi} d\Omega_i + \int_{\Omega_{i+1}} \lambda_{i+1} \delta u_{oi} d\Omega_{i+1} = 0 \quad (24)$$

$$\delta \beta_i: \quad \frac{h_i^3}{12} a_i(\beta_i, \delta \beta_i) + h_i b(\nabla w_i - \beta_i, -\delta \beta_i) - \int_{\Omega_i} \frac{h_i}{2} \lambda_i \delta \beta_i d\Omega_i + \int_{\Omega_{i+1}} \frac{h_i}{2} \lambda_{i+1} \delta \beta_i d\Omega_{i+1} = 0 \quad (25)$$

$$\delta w_i: \quad h_i b(\nabla w_i - \beta_i, \delta \nabla w_i) - \int_{\Omega_i} p_i \delta w_i d\Omega_i - \int_{\Omega_i} \mu_i \delta w_i d\Omega_i + \int_{\Omega_{i+1}} \mu_{i+1} \delta w_i d\Omega_{i+1} = 0 \quad (26)$$

$$\delta \lambda_i: \quad \int_{\Omega_i} \left[ \left( u_{oi-1} - \beta_{i-1} \frac{h_{i-1}}{2} \right) - \left( u_{oi} + \beta_i \frac{h_i}{2} \right) \right] \delta \lambda_i d\Omega_i = 0 \quad (27)$$

$$\delta \mu_i: \quad \int_{\Omega_i} (w_{i-1} - w_i) \delta w_i d\Omega_i = 0 \quad (28)$$

que se pueden expresar de manera más compacta como sigue:



donde  $x_i = [u_i, w_i, \beta_i]^T$  son desplazamientos y  $\lambda_i = [\lambda_i, \mu_i]^T$  son fuerzas distribuidas en una interface.

Como es típico de las formulaciones mixtas, la matriz de rigidez generada no es definida positiva. Además, el número de incógnitas aumenta rápidamente conforme se agregan más capas al modelo, por lo que la resolución del sistema de ecuaciones resulta difícil y costosa desde el punto de vista computacional. Este inconveniente, es solucionado a partir de la reducción de la matriz de rigidez. De acuerdo a la Figura 5, puede plantearse:

$$\begin{aligned} C_{11} x_1 + Q_{12}^T \lambda_2 &= F_1 & C_{11} x_1 &= F_1 - Q_{12}^T \lambda_2 \\ Q_{22} \lambda_2 + C_{22} x_2 + Q_{23}^T \lambda_3 &= 0 & \Rightarrow C_{22} x_2 &= -Q_{22} \lambda_2 - Q_{23}^T \lambda_3 \\ Q_{33} \lambda_3 + C_{33} x_3 &= 0 & C_{33} x_3 &= -Q_{33} \lambda_3 \end{aligned} \quad (34)$$

Reemplazando los desplazamientos en las ecuaciones restantes, se obtiene la matriz reducida que se muestra en la Figura 6.

$$\begin{vmatrix} Q_{12} C_{11}^{-1} Q_{12}^T + Q_{22}^T C_{22}^{-1} Q_{22} & Q_{22}^T C_{22}^{-1} Q_{23}^T \\ Q_{23} C_{22}^{-1} Q_{22} & Q_{23} C_{22}^{-1} Q_{23}^T + Q_{33}^T C_{33}^{-1} Q_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{12} C_{11}^{-1} F_1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Figura 6: Matriz de rigidez reducida.

Así, los desplazamientos se determinan a partir de las variables estáticas, resolviéndose el “problema mixto”.

Este esquema se repite según número de láminas se tenga, operando en base a la metodología expuesta.

## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se llevan a cabo una serie de ejemplos con el objeto de demostrar la performance del presente modelo, comparando los resultados con la solución de la Elasticidad así como con los valores hallados por otros modelos de elementos finitos. Esta evaluación numérica es llevada a cabo mediante la elaboración de un programa en código OCTAVE.

Cada placa tiene dimensiones  $a, b$  coincidente con las direcciones  $x, y$  respectivamente. En todos los casos se modela, por cuestiones de simetría, sólo un cuarto. Además, con excepción del análisis de convergencia, se utiliza una malla uniforme de  $6 \times 6$  (Ver Figura 7). Se emplea un elemento cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos con interpolación lineal. La evaluación numérica de las integrales se lleva a cabo mediante el método de cuadratura de Gauss, computándose  $2 \times 2$  puntos para los términos referidos a esfuerzos membranales y de flexión, mientras que  $1 \times 1$  puntos para los términos relacionados al corte.

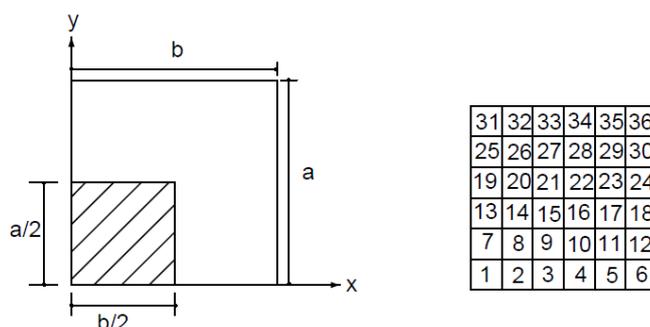


Figura 7: Representación de la placa y malla típica empleada.

Las ubicaciones para la evaluación de los desplazamientos y tensiones, a menos que se especifiquen otras, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{Desplazamiento transversal al plano } \bar{w}: & \quad (0.5a, 0.5b) \\
 \text{Desplazamiento en el plano } \bar{u}_x: & \quad (0, 0.5b, \bar{z}) \\
 \text{Tensión normal en el plano } \bar{\sigma}_{xx}: & \quad (0.5a, 0.5b, 0.5h) \\
 \text{Tensión normal en el plano } \bar{\sigma}_{yy}: & \quad (0.5a, 0.5b, \text{interface inferior}) \\
 \text{Tensión de corte en el plano } \bar{\tau}_{xy}: & \quad (0, 0, 0.5h) \\
 \text{Tensión de corte transversal al plano } \bar{\tau}_{xz}: & \quad (0, 0.5b, 0) \\
 \text{Tensión de corte transversal al plano } \bar{\tau}_{yz}: & \quad (0.5a, 0, 0) \\
 \text{Tensión de normal transversal al plano } \bar{\sigma}_{zz}: & \quad (0.5a, 0.5b, \bar{z})
 \end{aligned} \quad (35)$$

Las tensiones son calculadas en el centro del elemento más cercano a la posición indicada, con excepción de las obtenidas a través de los multiplicadores de Lagrange que pertenecen a los nodos. Los valores que son acompañados de un superíndice  $c$  son aquellos computados mediante la Ecuación Constitutiva, en tanto  $L$  para los obtenidos a partir de los multiplicadores de Lagrange.

Los resultados se presentan adimensionalizados de acuerdo a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= \frac{100 E_2 h^3}{q_0 a^4} w \\
 \bar{u}_x &= \frac{100 E_2 h^2}{q_0 a^3} u_x \\
 [\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\tau}_{xy}] &= \frac{h^2}{q_0 a^2} [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}] \\
 [\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}] &= \frac{h}{q_0 a} [\tau_{xz}, \tau_{yz}] \\
 \bar{\sigma}_{zz} &= \frac{1}{q_0} \sigma_{zz}
 \end{aligned} \quad (36)$$

### 6.1 Ejemplo 1.

En este problema se analiza la convergencia del modelo de elementos finitos al refinar la malla, para diferentes relaciones espesor/lado ( $h/a$ ).

Se considera una placa laminada rectangular ( $b=3a$ ) simplemente apoyada con una secuencia de laminado ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) (*three layer symmetric cross-ply*). Se aplica una carga con distribución bi-armónica tal que:

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (37)$$

Las propiedades del material son:

$$\begin{aligned}
 \frac{E_1}{E_2} &= 25 & E_2 &= 10^6 \\
 \frac{G_{23}}{E_2} &= 0.2 & \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} &= 0.5 & \nu_{12} &= 0.25
 \end{aligned} \quad (38)$$

Las condiciones de borde empleadas son:

$$\begin{aligned}
 (x, 0): & \quad w = u_{ox} = \beta_x = 0 \\
 (0, y): & \quad w = u_{oy} = \beta_y = 0 \\
 (x, b/2): & \quad u_{oy} = \beta_y = 0 \\
 (a/2, y): & \quad u_{ox} = \beta_x = 0
 \end{aligned} \quad (39)$$

Los resultados obtenidos son presentados en la [Tabla 1](#) conjuntamente con la solución de la Elasticidad ([Pagano, 1970](#)).

Referencia	Malla	Capas	Relación h/a					
			0.50	0.25	0.10	0.05	0.02	0.01
Actual	2x2	3	8.6859	2.9271	0.9168	0.5892	0.4947	0.4811
		6	8.8030	2.9907	0.9327	0.5935	0.4954	0.4813
		9	8.9705	3.0173	0.9362	0.5943	0.4956	0.4813
		12	9.0418	3.0278	0.9374	0.5946	0.4956	0.4813
	4x4	3	8.1901	2.7846	0.9040	0.6007	0.5136	0.5011
		6	8.3068	2.8464	0.9189	0.6047	0.5143	0.5012
		9	8.4564	2.8700	0.9220	0.6055	0.5144	0.5013
		12	8.5197	2.8793	0.9232	0.6058	0.5144	0.5013
	6x6	3	8.1052	2.7602	0.9020	0.6029	0.5170	0.5046
		6	8.2218	2.8216	0.9166	0.6068	0.5176	0.5048
		9	8.3684	2.8447	0.9198	0.6076	0.5178	0.5048
		12	8.4303	2.8537	0.9209	0.6079	0.5178	0.5049
<a href="#">Pagano (1970)</a>	-	-	8.17	2.82	0.919	0.610	0.520	0.508

Tabla 1: Deflexión adimensionalizada de una placa rectangular ( $b=3a$ ) simplemente apoyada con un esquema ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) bajo una carga bi-armónica.

Al refinar la malla los resultados convergen a la solución de la Elasticidad. Al mismo tiempo, se observa que la discretización del espesor tiene más peso en las placas de moderada y, principalmente, gran altura. Esto último, se debe a que para tales relaciones de espesor/lado, el efecto de la deformación por corte es importante, por lo que resulta necesario tenerlo en cuenta y computarlo de manera precisa, lo cual se logra, en el presente modelo, aumentando el número de láminas. En contraste, para bajas relaciones espesor/lado, este efecto pierde relevancia, no resultando indispensable una discretización del espesor severa.

## 6.2 Ejemplo.2.

Una evaluación precisa de las tensiones interlaminares en las placas compuestas resulta de gran interés para la predicción del inicio de la delaminación ([Fagiano, Abdalla, Kassapoglou and Gürdal, 2010](#)). Por tal motivo, el objetivo de este problema es analizar el comportamiento de los multiplicadores de Lagrange que representan las fuerzas distribuidas en las interfaces.

Las propiedades de los materiales, la secuencia de laminado, las condiciones de borde y el estado de carga son iguales a los del ejemplo precedente, con la diferencia que la relación de lados es  $b=a$ . El espesor discretizó en 24 capas iguales  $h_i=h/24$  (8 layers por cada lámina) de manera de asegurar una correcta distribución de las tensiones en la altura de la placa.

Se comparan en la [Tabla 2](#) y [Tabla 3](#) los esfuerzos de corte transversales computados por medio de los multiplicadores de Lagrange con los valores de la Elasticidad ([Pagano, 1970](#)). Los mismos son expuestos en forma gráfica, para  $h/a=0.25$ , en la [Figura 8](#) y [Figura 9](#).

h/a	$\bar{\tau}_{xz}$		Relación Actual/Pagano
	Actual	<a href="#">Pagano (1970)</a>	
0.50	0.1690 <sup>L</sup>	0.164	1.030
0.25	0.2581 <sup>L</sup>	0.256	1.008
0.10	0.3595 <sup>L</sup>	0.357	1.007
0.05	0.3871 <sup>L</sup>	0.385	1.005
0.02	0.3942 <sup>L</sup>	0.393	1.003
0.01	0.3824 <sup>L</sup>	0.395	0.968

Tabla 2: Comparación de las tensiones de corte transversales al plano  $\bar{\tau}_{xz}$  (Ejemplo 2).

h/a	$\bar{\tau}_{yz}$		Relación Actual/Pagano
	Actual	Pagano (1970)	
0.50	0.2710 <sup>L</sup>	0.2591	1.046
0.25	0.2189 <sup>L</sup>	0.2172	1.008
0.10	0.1234 <sup>L</sup>	0.1228	1.005
0.05	0.0935 <sup>L</sup>	0.0938	0.997
0.02	0.0841 <sup>L</sup>	0.0842	0.999
0.01	0.0798 <sup>L</sup>	0.0828	0.964

Tabla 3: Comparación de las tensiones de corte transversales al plano  $\bar{\tau}_{yz}$  (Ejemplo 2).

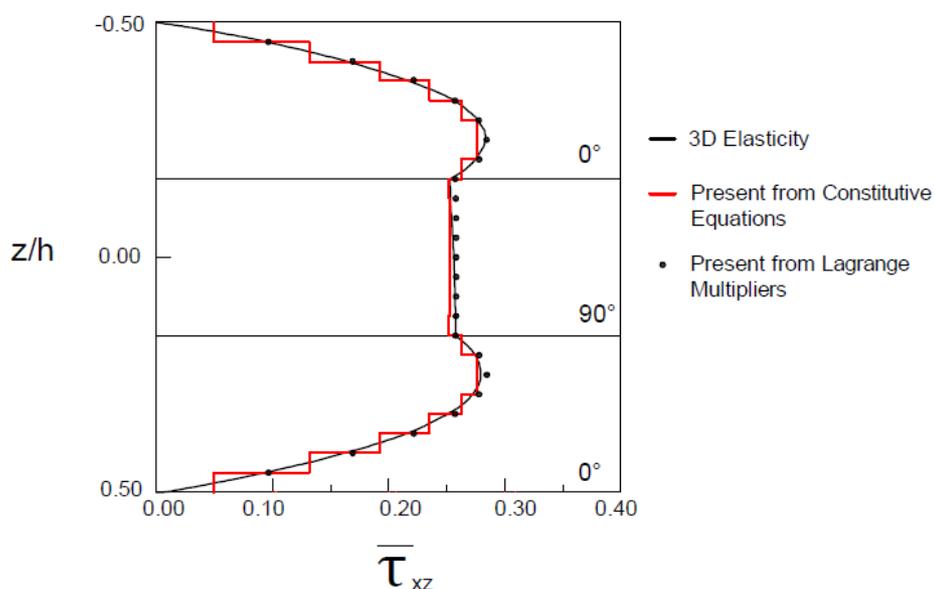


Figura 8: Variación a lo largo del espesor de las tensión de corte transversal  $\bar{\tau}_{xz}$  para h/a=0.25 (Ejemplo 2).

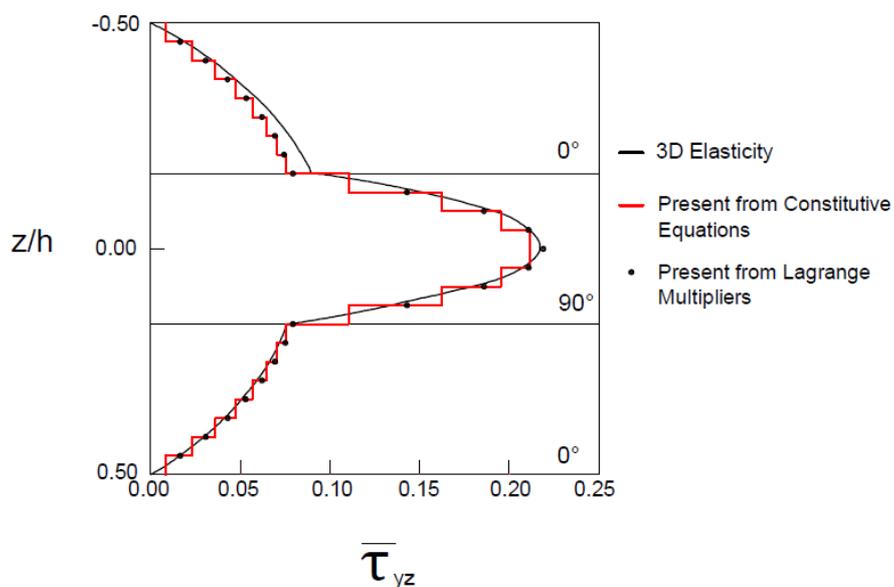


Figura 9: Variación a lo largo del espesor de las tensión de corte transversal  $\bar{\tau}_{yz}$  para h/a=0.25 (Ejemplo 2).

Se demuestra el sentido físico de los multiplicadores de Lagrange. Se observa como las tensiones de corte transversales tienden a cero conforme se acercan a los bordes libres y como, a diferencia de las placas de materiales isotrópos, el valor máximo puede no estar ubicado en la mitad del espesor. La variación obtenida de la ecuación constitutiva es escalonada debido a que la deformación por corte se asume constante dentro de cada capa, violando la continuidad de las mismas en las interfaces. A pesar de esto, la distribución es congruente con la solución de la Elasticidad. A fin de evitar dichas discontinuidades, en los modelos que no son “mixtos”, estas tensiones interlaminares son generalmente calculadas a partir de una técnica de post-procesamiento, integrando las Ecuaciones de Equilibrio de la Elasticidad tri-dimensional.

En la Figura 10 se compara gráficamente la distribución de la tensión normal transversal al plano para una relación  $h/a=0.25$  computada de los multiplicadores de Lagrange con la solución de la Elasticidad (Pagano, 1969), verificándose un buen desempeño de los primeros.

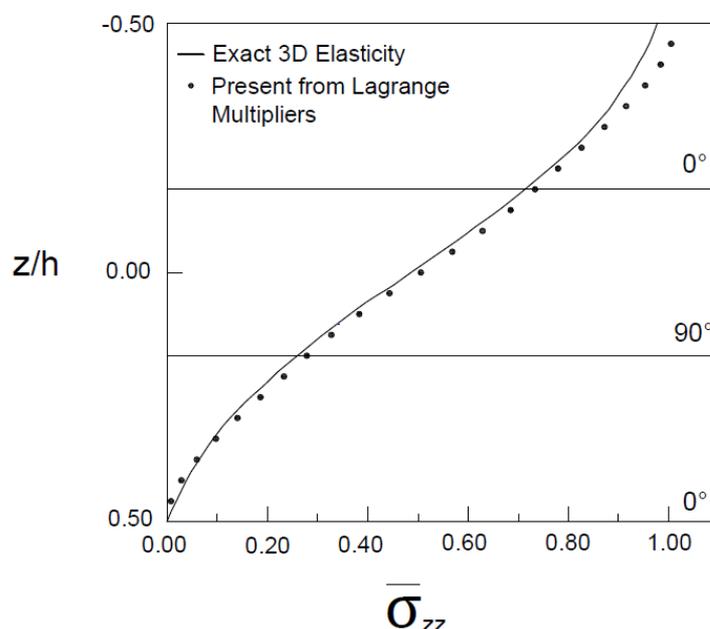


Figura 10: Distribución a lo largo del espesor de las tensión normal transversal  $\bar{\sigma}_{zz}$  para  $h/a=0.25$  (Ejemplo 2).

### 6.3 Ejemplo 3.

Se considera una placa cuadrada ( $b=a$ ) con una secuencia de laminado ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) (*seven layer symmetric cross-ply*) para tres diferentes relaciones espesor/lado. Las propiedades mecánicas del material, el estado de cargas y las condiciones de borde concuerdan con lo fijado en los problemas anteriores.

La altura total de las láminas orientadas a cero grados es la misma que la de las láminas orientadas a noventa grados ( $h_{0^\circ}=h/8$ ,  $h_{90^\circ}=h/6$ ). Se discretizó en 21 capas, correspondiendo 3 *layers* para cada una de las láminas ( $h_{i-0^\circ}=h/8/3$ ,  $h_{i-90^\circ}=h/6/3$ ).

Los resultados son comparados en la Tabla 4 con la solución de la Elasticidad (Pagano and Hatfield, 1972) y de la Teoría de Deformación por Corte de Orden Superior (*High-order Shear Deformation Theory - HSDT*) (Pandya and Kant, 1988).

En la Figura 11 se muestran los desplazamientos verticales adimensionalizados en el cuadrante de placa modelado para una relación  $h/a=0.25$ .

La variación de tensiones a lo largo del espesor para la relación  $h/a=0.25$  se representa en la Figura 12, Figura 13, Figura 14, Figura 15 y Figura 16.

h/a	Referencia	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
0.25	Actual	1.8277	0.6451	0.6052	-0.03484	0.2152 <sup>c</sup> 0.2202 <sup>L</sup>	0.2323 <sup>c</sup> 0.2358 <sup>L</sup>
	Pandya and Kant (1988)	1.5334	0.6275	0.5530	-0.03212	0.1944	0.1995
	Pagano and Hatfield (1972)	1.7906	0.679	0.623	-0.0356	0.219	0.236
0.10	Actual	0.6617	0.5337	0.4459	-0.02324	0.2504 <sup>c</sup> 0.2562 <sup>L</sup>	0.2150 <sup>c</sup> 0.2190 <sup>L</sup>
	Pandya and Kant (1988)	0.6159	0.5494	0.4482	-0.02324	0.227	0.1915
	Pagano and Hatfield (1972)	0.6594	0.548	0.457	-0.0237	0.255	0.219
0.01	Actual	0.4313	0.5235	0.3933	-0.02069	0.2633 <sup>c</sup> 0.2602 <sup>L</sup>	0.1984 <sup>c</sup> 0.1941 <sup>L</sup>
	Pandya and Kant (1988)	0.4332	0.5439	0.4084	-0.02149	0.2412	0.1831
	Pagano and Hatfield (1972)	0.4331	0.539	0.404	-0.0213	0.272	0.205

Tabla 4: Deflexión central y tensiones para una placa cuadrada simplemente apoyada con una secuencia (0°/90°/0°/90°/0°/90°/0°) bajo una carga bi-armónica.

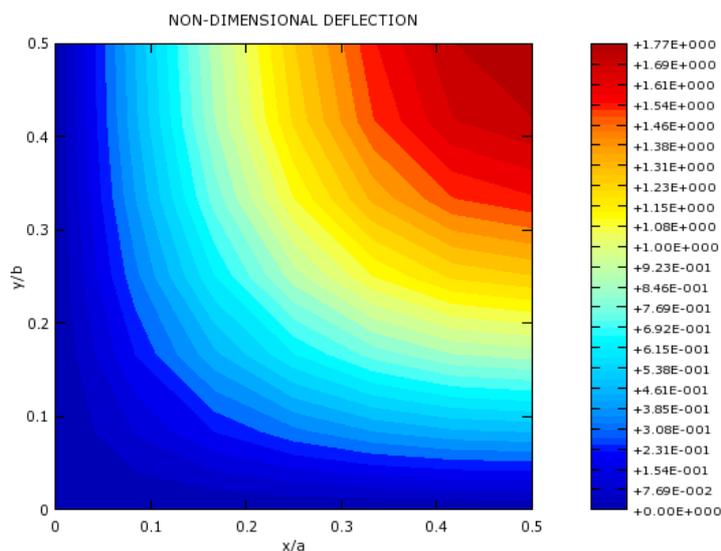


Figura 11: Desplazamientos transversales  $\bar{w}(\bar{x}, \bar{y})$  para  $h/a=0.25$  (Ejemplo 3).

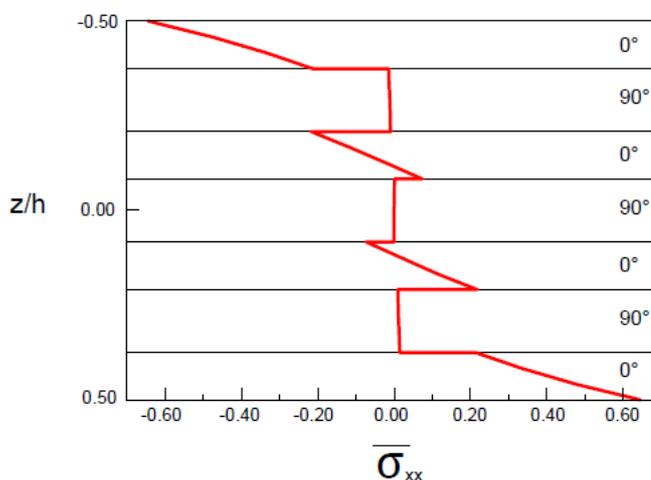


Figura 12: Tensión normal en el plano  $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, \bar{z})$  para  $h/a=0.25$  (Ejemplo 3).

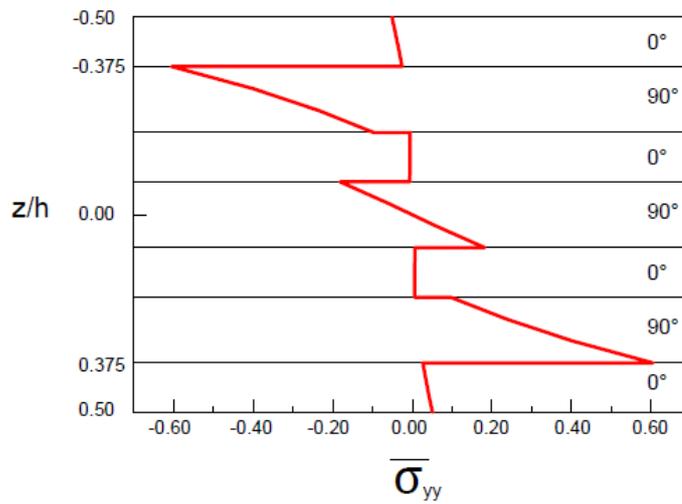


Figura 13: Tensión normal en el plano  $\bar{\sigma}_{yy}(a/2, b/2, \bar{z})$  para  $h/a=0.25$  (Ejemplo 3).

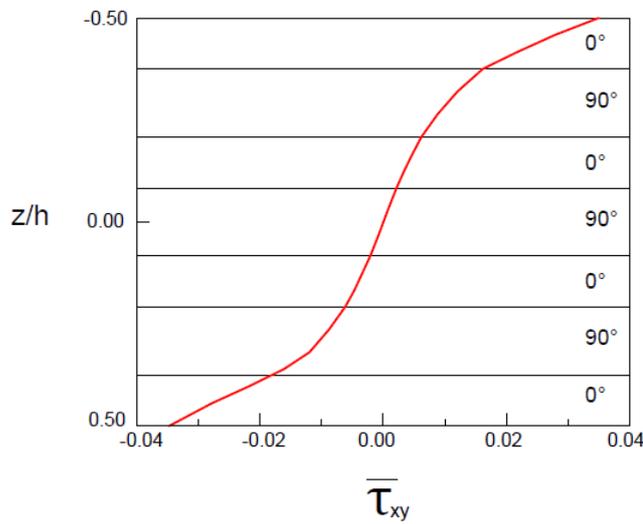


Figura 14: Tensión de corte en el plano  $\bar{\tau}_{xy}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \bar{z})$  para  $h/a=0.25$  (Ejemplo 3).

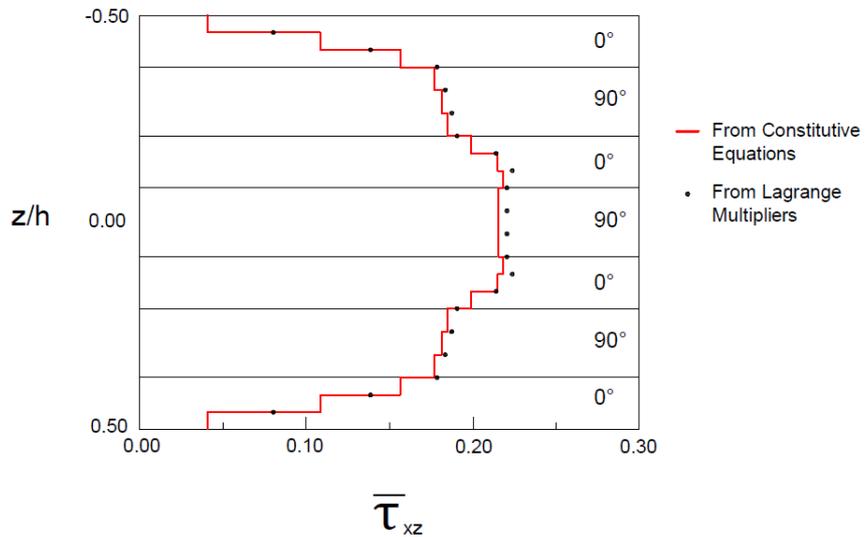


Figura 15: Tensión de corte transversal al plano  $\bar{\tau}_{xz}(\mathbf{0}, b/2)$  para  $h/a=0.25$  (Ejemplo 3).

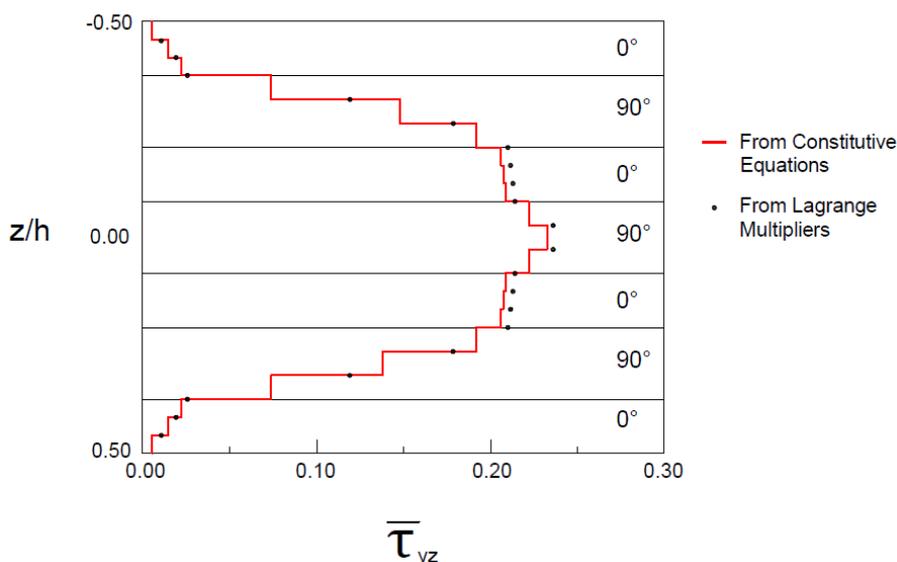


Figura 16: Tensión de corte transversal al plano  $\bar{\tau}_{yz}(\mathbf{a}/2, \mathbf{0})$  para  $h/a=0.25$  (Ejemplo 3).

Los desplazamientos en el plano  $u_x$  para la relación  $h/a=0.25$  se presentan en la Figura 17, donde se exhibe el alabeo de la sección. Este efecto de Zig-Zag es debido al cambio de las propiedades mecánicas de las láminas a lo largo del espesor. Aquellas teorías que mantienen las secciones planas ignoran por completo esta alteración brusca de pendiente en las interfaces, tal como la Teoría Clásica de Placas Laminadas (*Classical Laminated Plate Theory – CLPT*) o la Teoría de Deformación por Corte de Primer Orden (*First-order Shear Deformation Theory – FSDT*).

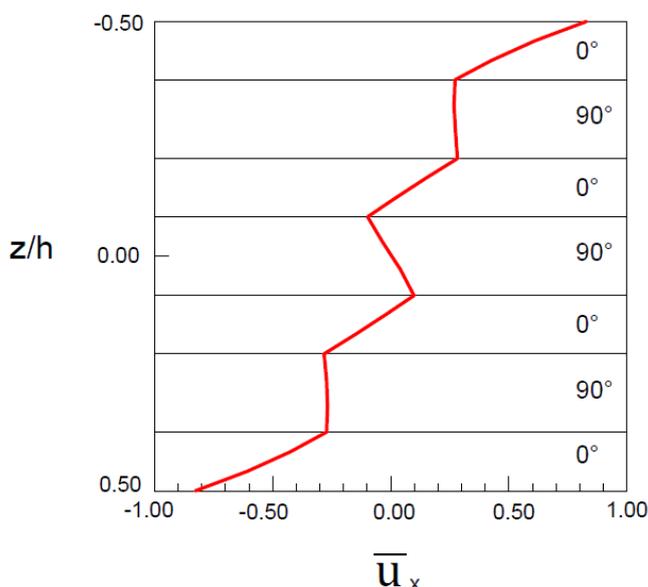


Figura 17: Desplazamientos en el plano  $\bar{u}_x(\mathbf{0}, \mathbf{b}/2, \bar{z})$  para  $h/a=0.25$  (Ejemplo 3).

### 6.4 Ejemplo 5.

Se considera, para diferentes relaciones espesor/lado, una placa sándwich cuadrada ( $b=a$ ) simplemente apoyada con un esquema ( $0^\circ/C/0^\circ$ ) bajo una distribución de cargas idéntica a la de los problemas anteriores. El espesor de cada piel es  $h/10$  y sus propiedades mecánicas son

las dadas por la ecuación (37). Las propiedades mecánicas del núcleo son las siguientes:

$$\begin{aligned} E_x = E_y = 0.4 \cdot 10^5 \quad G_{xy} = 0.16 \cdot 10^5 \\ G_{xz} = G_{yz} = 0.6 \cdot 10^5 \quad \nu_{xy} = 0.25 \end{aligned} \quad (40)$$

Las condiciones de borde están dadas por la ecuación (39). La altura se discretizó en 20 capas iguales  $h_i=h/20$ , asignándose 2 para cada piel y 16 para el núcleo.

Los esfuerzos obtenidos son contrastados en la [Tabla 5](#) con la solución de la Elasticidad ([Pagano, 1970](#)) y de la Teoría de Deformación por Corte de Orden Superior ([Pandya and Kant, 1988](#)). Aquellos valores que poseen un superíndice  $e$  fueron obtenidos integrando las Ecuaciones de Equilibrio de la Elasticidad tri-dimensional.

h/a	Referencia	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}^*$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
0.25	Actual	1.4969	0.2461	-0.14427	0.2347 <sup>c</sup> 0.2402 <sup>L</sup>	0.10478 <sup>c</sup> 0.10724 <sup>L</sup>
	<a href="#">Pandya and Kant (1988)</a>	1.523	0.2414	-0.1419	0.2750 <sup>c</sup> 0.2200 <sup>e</sup>	0.11370 <sup>c</sup> 0.08898 <sup>e</sup>
	<a href="#">Pagano (1970)</a>	1.556	0.2595	-0.1437	0.239	0.1072
0.10	Actual	1.1218	0.1069	-0.06972	0.2946 <sup>c</sup> 0.3015 <sup>L</sup>	0.05176 <sup>c</sup> 0.05297 <sup>L</sup>
	<a href="#">Pandya and Kant (1988)</a>	1.166	0.1052	-0.0692	0.3400 <sup>c</sup> 0.2685 <sup>e</sup>	0.05642 <sup>c</sup> 0.04462 <sup>e</sup>
	<a href="#">Pagano (1970)</a>	1.153	0.1104	-0.0707	0.300	0.0527
0.01	Actual	1.0667	0.5345	-0.04244	0.3176 <sup>c</sup> 0.3230 <sup>L</sup>	0.02923 <sup>c</sup> 0.03001 <sup>L</sup>
	<a href="#">Pandya and Kant (1988)</a>	1.026	0.0497	-0.0440	0.3627 <sup>c</sup> 0.2880 <sup>e</sup>	0.03322 <sup>c</sup> 0.02704 <sup>e</sup>
	<a href="#">Pagano (1970)</a>	1.098	0.550	-0.0437	0.324	0.0297

\*Corresponde a la coordenada  $z = 0.5 h$ .

Tabla 5: Tensiones para una placa sándwich cuadrada simplemente apoyada con un esquema (0°/C/0°) bajo una carga bi-armónica.

En la [Figura 18](#) y [Figura 19](#), se representan la distribución de las tensión normal en el plano  $\bar{\sigma}_{xx}$  y las tensión de corte transversal  $\bar{\tau}_{xz}$ , respectivamente, para una relación  $h/a=0.25$ .

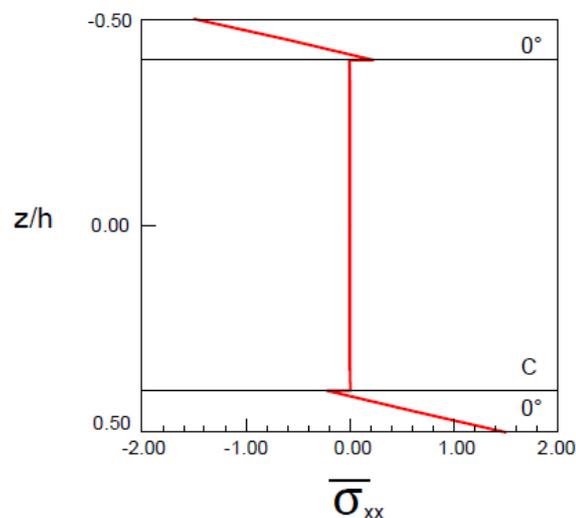


Figura 18: Tensión normal en el plano  $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, \bar{z})$  para  $h/a=0.25$  (Ejemplo 4).

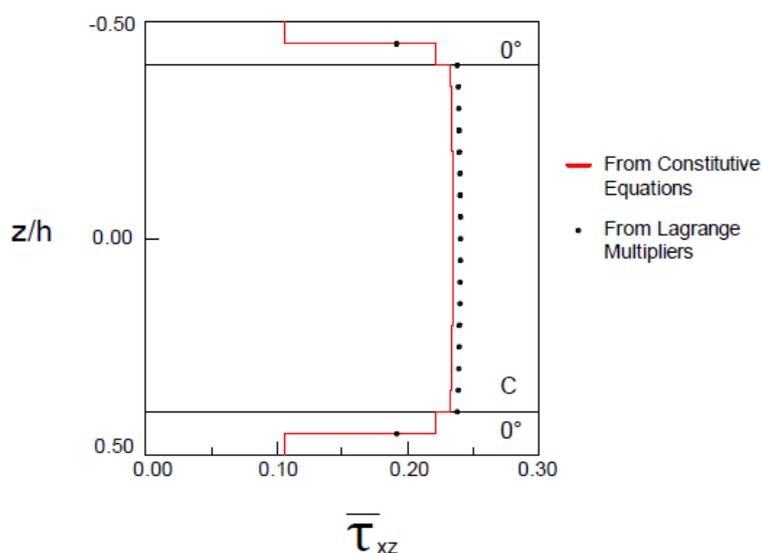


Figura 19: Tensión de corte transversal al plano  $\bar{\tau}_{xz}(\mathbf{0}, \mathbf{b}/2)$  para  $h/a=0.25$  (Ejemplo 4).

Se puede observar comportamiento característico de este tipo de placas, donde las pieles toman las tensiones normales por flexión, mientras que el núcleo soporta las tensiones de corte.

En la Figura 20 se exponen los desplazamientos en el plano  $u_x$  para la misma relación  $h/a$  graficada anteriormente.

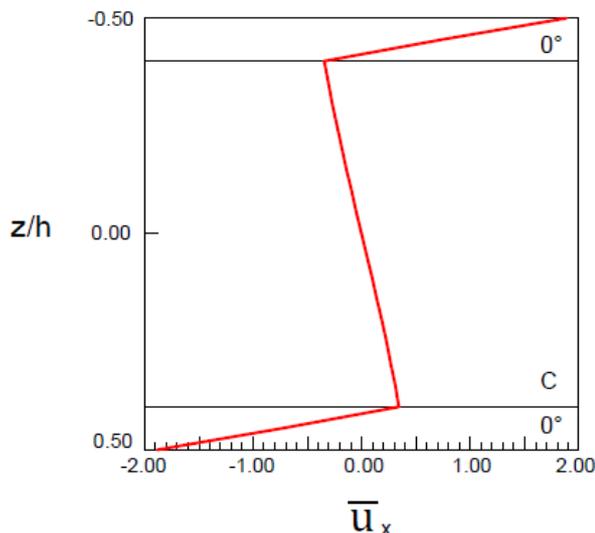


Figura 20: Desplazamientos en el plano  $\bar{u}_x(\mathbf{0}, \mathbf{b}/2, \bar{z})$  para  $h/a=0.25$  (Ejemplo 4).

## 7 CONCLUSIONES

Se presenta un modelo de elementos finitos híbrido para el análisis de placas multicapa. Su precisión es demostrada a lo largo de una serie de problemas donde los resultados hallados se asemejan a los de la solución de la Elasticidad tri-dimensional.

El uso de los multiplicadores de Lagrange es justificado teóricamente y avalado por resultados numéricos. Estos permiten modelar cada placa en forma independiente asegurando el comportamiento conjunto de las mismas y resultando un modelo fácil de construir computacionalmente. Representan una eficaz herramienta para evaluar las tensiones

transversales interlaminares, de gran interés en el estudio y predicción de falla de los laminados compuestos. A su vez, el inconveniente de la matriz de rigidez no definida positiva y de gran tamaño se resuelve sin mayores problemas a partir de la reducción de la misma, donde se resuelve primeramente las variables estáticas y, en un segundo lugar, las variables cinemáticas.

Por último, es importante destacar la posibilidad de simular en forma sencilla la delaminación (separación entre capas individuales del laminado) al suprimir los multiplicadores de Lagrange en una interface, sin variar nada más en la formulación.

## REFERENCIAS

- Alliney S., and Carnicer R. S., "A hybrid finite element model for multilayered plates". *Computational Mechanics*, 10:5:319-333, 1992.
- Fagiano C., Abdalla M. M., Kassapoglou C., and Gürdal Z., "Interlaminar Stress Recovery for Three-Dimensional Finite Elements". *Composite Science and Technology*, 70:3:530-538, 2010.
- Pagano N. J., "Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending". *Journal of Composite Materials*, 3:398-411, 1969.
- Pagano N. J., "Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates". *Journal of Composite Materials*, 4:20-34, 1970.
- Pagano N. J., and Hatfield S. J., "Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites". *AIAA Journal*, 10:931-933, 1972.
- Pandya B.N., and Kant T., "Flexural Analysis of Laminated Composites using Refined Higher-Order  $C^0$  Plate Bending Elements". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66:173-198, 1988.
- Pandya B.N., and Kant T., "Finite Element Analysis of Laminated Composite Plates using a Higher-Order Displacement Model". *Composite Science and Technology*, 32:136-155, 1988.
- Pendhari S. S., Kant T. and Desai Y. M., "Application of polymer composites in civil construction: A general review". *Composite Structures*, 84:114-124, 2008.