

ELEMENTO FINITO HEXAÉDRICO TRILINEAL CON CURA DEL BLOQUEO POR CORTE

Víctor Fachinotti^a, Alejandro E. Albanesi^a y José M. Martínez Valle^b

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC), Universidad Nacional del Litoral (UNL)/ Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Predio CCT-CONICET Santa Fe, Ruta Nac. 168, Paraje El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina, vfachino@intec.unl.edu.ar, aalbanes@santafe-conicet.gov.ar

^b*Departamento de Mecánica, Universidad de Córdoba, Edificio Leonardo Da Vinci, Campus Universitario de Rabanales, Cta. Madrid-Cádiz, Km. 396, Córdoba, España, jmvalle@uco.es*

Palabras Clave: Método de los Elementos Finitos, Cáscaras, Q1, MITC.

Resumen. El objetivo de este trabajo es desarrollar elementos finitos sólidos tridimensionales sencillos que permitan modelar cáscaras delgadas sometidas a flexión con precisión satisfactoria, disponiendo unos pocos elementos (e incluso uno solo) a través del espesor de la cáscara.

Por su simplicidad, el elemento elegido para tal fin es el hexaedro trilineal clásico, con ocho nodos ubicados en los vértices y desplazamientos como únicos grados de libertad nodales. Los elementos finitos de bajo orden como este sufren del bloqueo por corte en problemas de flexión de cáscaras delgadas. Alentados una vez más por su simplicidad, dicho defecto se remedia recurriendo a la técnica de interpolación mixta de las componentes tensoriales de la deformación, conocida como MITC, desarrollada originalmente para elementos finitos de cáscara.

Los elementos finitos así desarrollados son las variantes tridimensionales del elemento finito cuadrangular para cáscaras llamado MICT4. Se proponen dos alternativas: en la primera, sólo reciben interpolación mixta las componentes cortantes en el plano de la cáscara, mientras que en la segunda se extiende la interpolación mixta a todas las componentes cortantes en la base covariante.

Finalmente, se evalúa el rendimiento de los elementos propuestos aplicados a un problema de flexión de una cáscara delgada.

1. INTRODUCCIÓN

Además de su sencillez y bajo costo computacional, los elementos finitos de bajo orden son más robustos que los de alto orden cuando la malla presenta grandes distorsiones, lo que es de esperar en el análisis de cuerpos sometidos a grandes deformaciones.

Cuando se modela una cáscara delgada sujeta a flexión pura usando elementos finitos de bajo orden donde la deformación es calculada directamente a partir de los desplazamientos, aparece espuriamente deformación por corte, aumentando la rigidez de la estructura. Este es el bien conocido fenómeno de bloqueo por corte, que se acentúa cuanto más delgada es la cáscara.

Entre las curas más sencillas, encontramos la técnica MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) donde se supone cada componente de la deformación por corte interpolada individualmente. El elemento más simple siguiendo esta formulación es el cuadrángulo MITC4 (Bathe y Dvorkin, 1986), donde las funciones de interpolación de desplazamientos son bilineales y las componentes de corte de la deformación en el plano tangente a la cáscara son calculadas con funciones de interpolación “impuestas”.

Los elementos de cáscara tipo MITC necesitan más grados de libertad por nodo que los correspondientes a los desplazamientos. Usualmente, se trata del vector “director” que define aproximadamente la normal a la superficie media de la cáscara. Ahora bien, el tratamiento de estos grados de libertad es, cuando menos, tedioso, como puede verse en el detallado trabajo de Simo et al. (1990). En primer lugar, los tres grados de libertad que aporta el director nodal no son independientes por la restricción (no lineal) de inextensibilidad del director o, en otras palabras, porque el espesor de la cáscara prácticamente no cambia en flexión. Para satisfacerla, se suele proceder a un cambio de base nodo a nodo, base en la que el director posee sólo dos grados de libertad. Esta solución dificulta la descripción de cáscaras con aristas y el acoplamiento de elementos finitos de cáscara a elementos finitos de otro tipo (vigas, sólidos, etc.).

Salvando los inconvenientes asociados al tratamiento del director, aparecen los elementos sólidos para modelar cáscaras delgadas disponiendo sólo unos pocos elementos (incluso uno) a través del espesor. Pero si se usan elementos de bajo orden para modelar cáscaras delgadas a flexión, es necesario recurrir a alguna estrategia especial para evitar el bloqueo por corte.

En este trabajo, nos proponemos desarrollar el elemento más sencillo posible para el modelado de flexión de cáscaras delgadas sujetas a grandes deformaciones, proponiendo para ello un elemento finito hexaédrico trilineal con MITC para la cura del bloqueo por corte.

2. CINEMÁTICA

El objetivo principal de este trabajo es modelar cáscaras delgadas usando unas pocas capas (incluso una sola) de elementos finitos hexaédricos trilineales (Q1), como se muestra en la Figura 1. Llamamos B_0 a la configuración descargada o material de un elemento tipo, y B a su configuración deformada. Un punto material $\mathbf{X} \in B_0$ ocupará la posición espacial $\mathbf{x} \in B$. En el elemento finito Q1, las posiciones material y espacial son interpoladas isoparamétricamente de la forma:

$$\mathbf{X} = \mathbf{N}\mathbf{Q} \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{q} \quad (2)$$

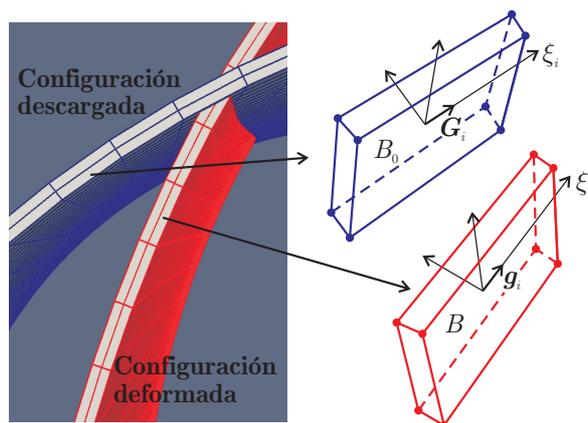


Figura 1: Cáscara delgada modelada usando elementos finitos sólidos trilineales.

con

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \dots & \varphi_8 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & 0 & \varphi_8 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & 0 & \varphi_8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_8 \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde φ_k es la función de forma asociada al nodo $k = 1, \dots, 8$, \mathbf{x}_k y \mathbf{X}_k sus posiciones espacial y material, respectivamente. Recordemos que las funciones de forma del elemento Q1 pueden expresarse en función de las coordenadas naturales $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ como

$$\varphi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{8}(1 + \xi_1 \xi_1^k)(1 + \xi_2 \xi_2^k)(1 + \xi_3 \xi_3^k), \quad k = 1, \dots, 8 \quad (4)$$

donde $(\xi_1^k, \xi_2^k, \xi_3^k)$ son las coordenadas naturales del nodo k .

Definimos las bases convectivas material y espacial (ver Figura 1, a la derecha):

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,i} = \mathbf{N}_{,i} \mathbf{Q} \quad (5)$$

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i} = \mathbf{N}_{,i} \mathbf{q} \quad (6)$$

donde $(*)_{,i}$ denota derivada con respecto a la coordenada natural ξ_i .

Nota. Como se muestra en la Figura 1, la cáscara se modela usando capas de Q1, de modo que siempre alguna de las coordenadas naturales varía a través del espesor de la cáscara, mientras que las dos restantes yacen en el plano tangente a la cáscara.

3. DEFORMACIÓN

Definimos la base $\{\mathbf{G}^j\}$ dual de $\{\mathbf{G}_i\}$ por la relación:

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_{ij} \quad (7)$$

Ahora, elegimos como medida de grandes deformaciones a la deformación de Green-Lagrange expresada en dicha base:

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (8)$$

con las componentes (covariantes) definidas como

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \tag{9}$$

Con \mathbf{G}_i y \mathbf{g}_i dados por las ecuaciones (5) y (6), la expresión anterior toma la forma:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{q}^T \mathbf{M}_{ij} \mathbf{q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{ij} \mathbf{Q}) \tag{10}$$

donde

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{N}_{,j} + \mathbf{N}_{,j}^T \mathbf{N}_{,i}) \tag{11}$$

4. CURA DEL BLOQUEO POR CORTE

Estudiaremos dos soluciones parecidas, detalladas a continuación.

4.1. Elemento MITC4-3D

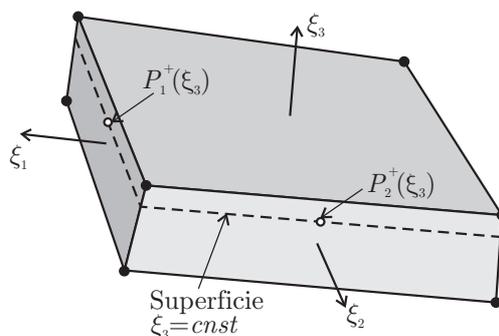


Figura 2: Elemento MITC-3D mostrando la ubicación de los puntos de ajuste en la superficie $\xi_3 = cte$. La coordenada ξ_3 debe estar orientada a través del espesor.

Este elemento pretende ser el pariente tridimensional más cercano del MITC4 de cáscara [Bathe y Dvorkin \(1986\)](#), de ahí su nombre. Primero, debe identificarse cuál es la coordenada natural variable a través del espesor de la cáscara, supongamos ξ_3 . En cada plano $\xi_3 = cte.$, definimos los puntos de “ajuste” $P_i^\pm(\xi_3)$, $i = 1, 2$, situados en la mitad de los lados $\xi_i = \pm 1$, como se ve en la Figura 2. Luego, se reemplaza la deformación E_{i3} calculada directamente con la ecuación (10) por la deformación “impuesta”

$$\bar{E}_{i3}(\xi_j, \xi_3) = \frac{1 + \xi_j}{2} E_{i3}(P_j^+(\xi_3)) + \frac{1 - \xi_j}{2} E_{i3}(P_j^-(\xi_3)), \quad i, j = 1, 2, i \neq j \tag{12}$$

o

$$\bar{E}_{i3} = \frac{1}{2} (\mathbf{q}^T \bar{\mathbf{M}}_{i3} \mathbf{q} - \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{M}}_{i3} \mathbf{Q}) \tag{13}$$

con

$$\bar{\mathbf{M}}_{i3} = \frac{1 + \xi_j}{2} \mathbf{M}_{i3}(P_j^+(\xi_3)) + \frac{1 - \xi_j}{2} \mathbf{M}_{i3}(P_j^-(\xi_3)), \quad i, j = 1, 2, i \neq j \tag{14}$$

Nótese que \bar{E}_{i3} es constante en dirección i , es decir que está “empobrecida” con respecto a E_{i3} en esa dirección.

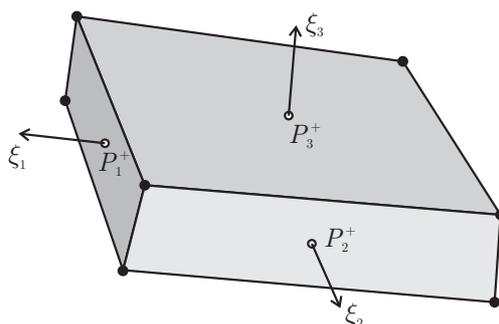


Figura 3: Elemento Q1-MITC mostrando la ubicación de todos los puntos de ajuste.

4.2. Elemento Q1-MITC

Buscamos ahora simplificar el modelado de problemas donde el material es isótropo a fin de no tener que forzar ξ_3 a variar en el espesor de la cáscara, lo que obliga generalmente a reordenar las conectividades de los elementos de la malla. Para ello, proponemos un nuevo elemento, al que llamaremos Q1-MITC, donde se aplica el concepto MITC a todas las componentes covariantes de corte: E_{ij} ($i \neq j$) se supone constante en el plano $\xi_k = cte.$ ($k \neq i, k \neq j$) y lineal en la dirección ξ_k . En este elemento, proponemos como puntos de “ajuste” los puntos medios P_k^\pm de las caras $\xi_k = \pm 1$, como se muestra en la Figura 3. Ahora, reemplazamos la deformación E_{ij} calculada directamente con la ecuación (10) por la deformación “impuesta”

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1 + \xi_k}{2} E_{ij}(P_k^+) + \frac{1 - \xi_k}{2} E_{ij}(P_k^-), \quad i \neq j, k \neq i, k \neq j \quad (15)$$

o

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{q}^T \bar{\mathbf{M}}_{ij} \mathbf{q} - \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{M}}_{ij} \mathbf{Q}) \quad (16)$$

con

$$\bar{\mathbf{M}}_{ij} = \frac{1 + \xi_k}{2} \mathbf{M}_{ij}(P_k^+) + \frac{1 - \xi_k}{2} \mathbf{M}_{ij}(P_k^-), \quad i \neq j, k \neq i, k \neq j \quad (17)$$

5. APLICACIÓN

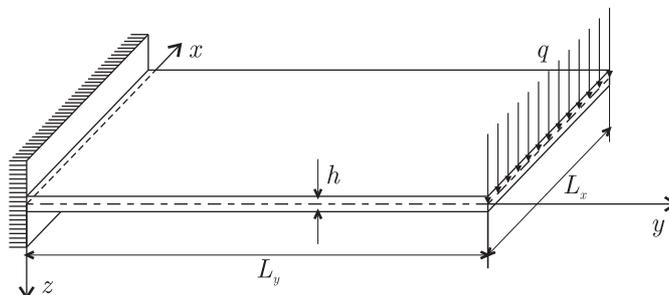


Figura 4: Losa delgada en voladizo sujeta a flexión.

Sea la losa en voladizo de la Figura 4, donde $L_x = 0,9$ m, $L_y = 2$ m, $h = 0,005$ m, $q = 1,5$ kN/ L_x , compuesta de un material elástico lineal con módulo de elasticidad $E = 210$ GPa y coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$.

Usaremos como referencia los elementos finitos de cáscara tipo MITC4 desarrollados por Fachinotti et al. (2011), que siguen el trabajo de Bathe y Dvorkin (1986) para prevenir el bloqueo por corte y tratan el campo director de la forma propuesta por Simo et al. (1990) para satisfacer la restricción de inextensibilidad. Para una malla fina (144 × 320 elementos en el plano), el desplazamiento máximo del borde cargado resulta $u_{\max}^{\text{fin}} = 1,281569$ m, valor que suponemos el más preciso y adoptaremos como referencia. Ahora, si \tilde{u}_{\max} es el valor correspondiente calculado con un elemento y una malla dados, definimos el error relativo para ese caso como

$$\epsilon = \frac{\tilde{u}_{\max} - u_{\max}^{\text{fin}}}{u_{\max}^{\text{fin}}} \tag{18}$$

La Figura 5 muestra el error relativo para distintos elementos finitos y mallas de densidad variable en el plano de la cáscara. Allí se aprecia el severo bloqueo que sufren los elementos Q1 estándar, con errores de entre 58,3 % y 99,0 % en la predicción de u_{\max} . Los dos elementos Q1 con cura de bloqueo por corte aquí propuestos se comportan de manera prácticamente idéntica: el mayor error, correspondiente a la malla más gruesa en el plano y sólo una capa de elementos, es de 7,2-7,3 %, el que se reduce a 0,5 % para la malla más fina en el plano y cuatro capas de elementos.

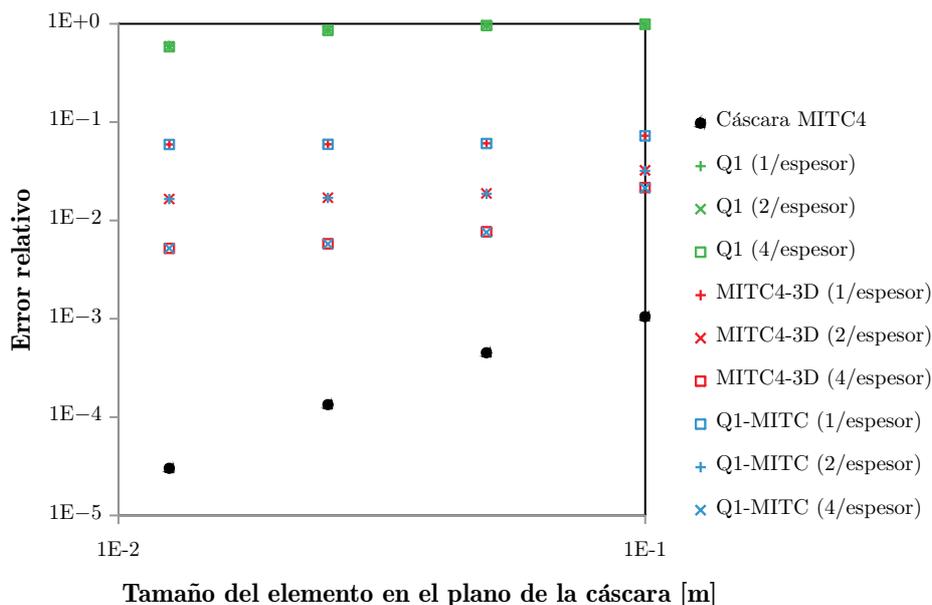


Figura 5: Error relativo en la estimación del máximo desplazamiento del borde cargado para diferentes elementos finitos, en función de la densidad de malla en el plano de la cáscara.

Nótese que la tasa de convergencia de los elementos MITC4-3D y Q1-MITC es mucho mayor con respecto al tamaño de los elementos en el espesor (Figura 6) que en el plano (Figura 7).

Finalmente, la Figura 8 permite apreciar gráficamente el desempeño de los distintos elementos para una misma malla en el plano (18 × 40 elementos).

6. CONCLUSIONES

Se han propuesto dos alternativas, MITC4-3D y Q1-MITC, para generalizar la estrategia MITC a elementos hexaédricos trilineales, y así habilitar su uso para el modelado de cáscaras

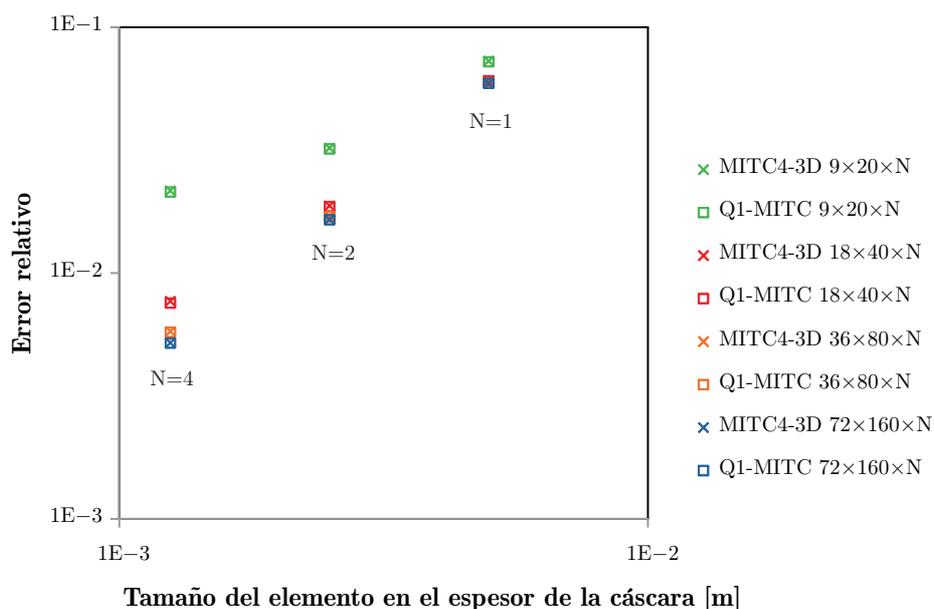


Figura 6: Error relativo en la estimación del máximo desplazamiento del borde cargado para los elementos finitos MITC-3D y Q1-MITC, en función de la densidad de malla en el espesor de la cáscara.

delgadas sometidas a flexión. El Q1-MITC presenta ventajas por cuanto no es necesario identificar cuál de sus ejes naturales define el espesor de la cáscara, lo que requiere un esfuerzo extra a la hora del mallado.

Los elementos propuestos mostraron una precisión aceptable aún para el caso en que la cáscara sea modelada con una sola capa de elementos.

Sin las desventajas asociadas a los elementos específicos de cáscara, estos elementos constituyen posiblemente la opción más sencilla para modelar cáscaras delgadas.

REFERENCIAS

- Bathe K.J. y Dvorkin E.N. A formulation of general shell elements – The use of mixed interpolation of tensorial components. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 22:697–722, 1986.
- Fachinotti V.D., Albanesi A.E., y Huespe A.E. Elementos finitos MITC para cáscaras sometidas a grandes deformaciones elásticas. *Mecánica Computacional*, XXX:845–855, 2011.
- Simo J.C., Fox D.D., y Rifai M.S. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 79:21–70, 1990.

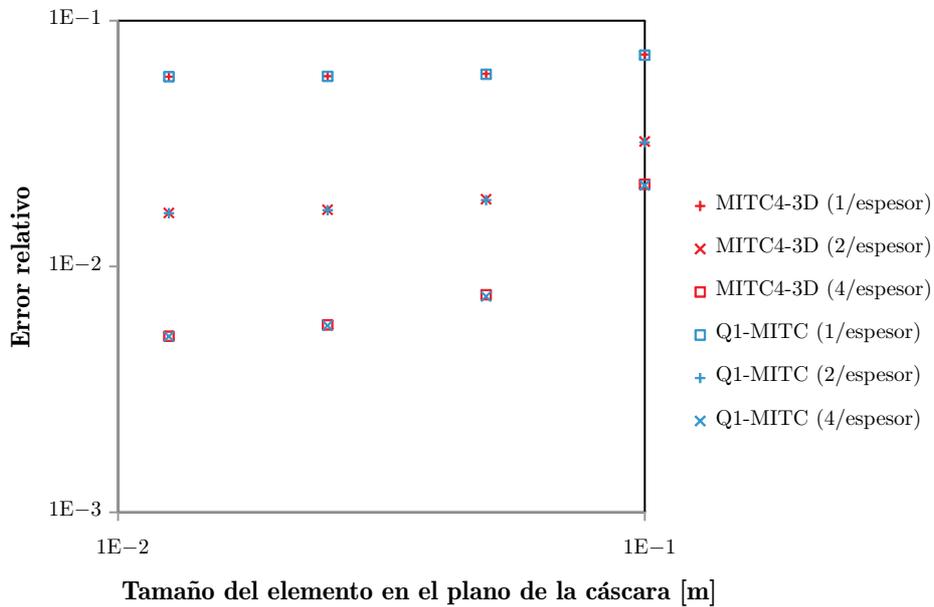


Figura 7: Error relativo en la estimación del máximo desplazamiento del borde cargado para los elementos finitos MITC-3D y Q1-MITC, en función de la densidad de malla en el plano de la cáscara.

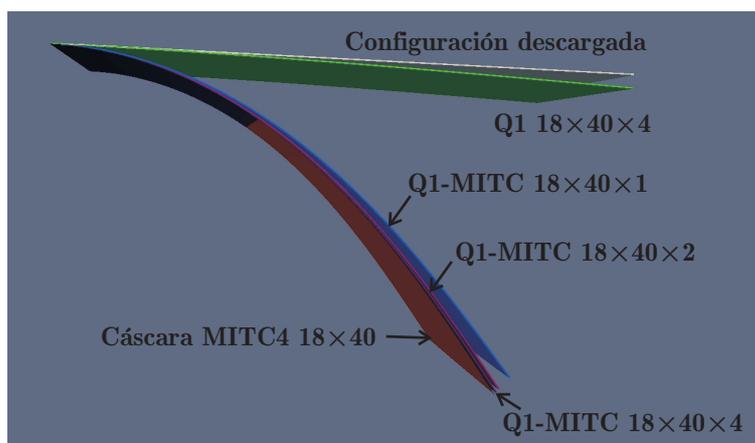


Figura 8: Deformación calculada usando la malla de 18 x 40 elementos en el plano de la cáscara, usando distintos tipos de elementos y, en el caso de hexaedros trilineales, distinta cantidad de elementos en el espesor de la cáscara.