

UN ELEMENTO DE SÓLIDO "WEDGE" PARA EL ANÁLISIS DE LÁMINAS CON GRANDES DEFORMACIONES

Fernando G. Flores

*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916,
5000 Córdoba-Argentina, y CONICET, fflores@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>*

Palabras Clave: Elementos Finitos, Sólidos, Láminas, Wedge, Grandes Deformaciones

Resumen. Este trabajo desarrolla un elemento de sólido prismático de base triangular (*wedge*) orientado al análisis de láminas delgadas/gruesas con grandes deformaciones elasto-plásticas. El elemento se basa en una formulación lagrangeana total y utiliza como medidas de deformación el logaritmo del tensor de estiramiento derecho (\mathbf{U}) obtenido a partir del tensor derecho de Cauchy-Green ($\bar{\mathbf{C}}$) modificado. Las modificaciones son tres: a) una aproximación clásica de deformaciones transversales mixtas impuestas b) una aproximación de deformaciones impuestas para las componentes en el plano tangente de la lámina y c) un promediado de la deformación volumétrica en todo el elemento. El objetivo es poder utilizar el elemento para la simulación de láminas sin que bloquee por cortante, mejorar el comportamiento membranar del triángulo en el plano tangente y poder tratar materiales cuasi-incompresibles o con flujo plástico incompresible. Se presentan varios ejemplos que muestran el comportamiento libre de bloqueo por corte del elemento, la mejora en el comportamiento en el plano de la lámina y las posibilidades del elemento para el análisis de láminas en régimen no lineal geométrico y material.

1. INTRODUCCIÓN

En el área de la mecánica de los sólidos, para la simulación de problemas de láminas (i.e. cuando una de las dimensiones del sólido es mucho menor que las otras dos), se prefiere la utilización de elementos finitos que utilicen hipótesis plausibles respecto al comportamiento de la normal a la superficie media de la lámina (hipótesis de Kirchhoff-Love o Reissner-Mindlin) lo que conduce a elementos donde el comportamiento cinemático queda descrito por el movimiento de la superficie media con una importante economía de recursos, tanto en memoria como en tiempo de proceso.

Sin embargo la utilización de elementos de sólidos para simular láminas ha crecido notablemente en el último tiempo auspiciado en parte por la continua mejora en las facilidades de procesamiento y también por la necesidad de mejorar distintos aspectos de los modelos a los fines de lograr simulaciones más fieles. Algunas de las ventajas que se obtienen de utilizar elementos de sólido en vez de elementos de lámina son: a) la posibilidad de utilizar relaciones constitutivas efectivamente tridimensionales y no restringirse a modelos de tensión plana; b) incluir el efecto del contacto correctamente, en particular cuando hay fricción; c) tratar grandes deformaciones de corte transversal o discontinuidades en las deformaciones a través del espesor; d) evitar elementos especiales de transición entre mallas que combinan elementos de sólidos y de láminas; e) tratar correctamente contornos no paralelos a la normal a la lámina o al campo director; f) deshacerse de los grados de libertad rotacionales que son en general costosos y dificultosos de parametrizar y actualizar.

Los elementos de sólido más utilizados para el análisis de láminas son los hexaedros y en particular el de 8 nudos. La formulación estándar en desplazamientos conduce, al simular láminas, a distintos tipos de bloqueo: cortante, membranal y volumétrico. El primero se agudiza cuando la esbeltez de la lámina aumenta y si el comportamiento es predominantemente de flexión. Por otro lado al tratar materiales elásticos quasi-incompresibles o materiales elasto-plásticos con flujo plástico isócoro (típico de los metales) se generan problemas de bloqueo volumétrico. El uso de un sólo elemento de sólido en el espesor de la lámina hace evidente la imposibilidad del elemento de adecuarse al efecto de Poisson en todo el espesor, además en superficies inicialmente curvas suele aparecer un bloqueo adicional debido a la pobre interpolación en el espesor. Finalmente en modelos de láminas curvas donde el comportamiento es principalmente de flexión sin estiramiento de la superficie media es común la aparición de bloqueo membranal. En los elementos con bajo orden de interpolación el bloqueo membranal no aparece pero la densidad de malla necesaria para lograr convergencia aumenta. Estos bloqueos numéricos indican la incapacidad de las funciones de interpolación utilizadas (y sus gradientes) de amoldarse al comportamiento del sólido que muchas veces invalidan las soluciones obtenidas.

Los avances en el desarrollo de elementos de sólidos a los fines de evitar los diferentes bloqueos indicados son numerosos. En muchos casos el objetivo es lograr modelos que requieran un sólo elemento en el espesor, estos elementos se denominan de “sólido-lámina” y en general utilizan formulaciones en deformaciones naturales impuestas “ANS” y deformaciones impuestas mejoradas “EAS” (del acrónimo en inglés) con la inclusión de distintos grados de libertad internos que se condensan localmente. Para solucionar el problema de bloqueo por corte transversal la ya clásica aproximación de [Dvorkin y Bathe \(1984\)](#) es la más utilizada cuando se realiza integración completa (ver por ejemplo [Hauptmann y Schweizerhof \(1998\)](#); [Vu-Quoc y Tan \(2003\)](#)) y una variación de la misma cuando se realiza integración reducida (ver por ejemplo [Cardoso et al. \(2008\)](#)). Para solucionar el bloqueo membranal se han desarrollado elementos con ambos tipos de formulación. El bloqueo volumétrico se soluciona habitualmente usando in-

tegración reducida selectiva (SRI del acrónimo en inglés) o promediando la dilatación sobre todo el elemento. Si se utiliza un elemento en el espesor de la lámina, ambas opciones conducen a un elemento excesivamente flexible por lo cual se ha utilizado la técnica EAS para la deformación volumétrica. En el plano de la lámina se utiliza 1 o 4 puntos de integración (en el primer caso se requiere estabilización para evitar los modos de “hourglass”), en tanto que en el espesor de la lámina se utilizan por lo menos dos puntos (a veces hasta 7 en problemas elasto-plásticos) para captar los efectos de flexión. La implementación es más compleja que los elementos de sólido estándar y pueden presentar algunas inestabilidades cuando se utiliza integración reducida debido a los modos de “hourglass” o en grandes deformaciones cuando se utiliza la técnica EAS (Schwarze y Reese (2009)). En dicha Referencia (Schwarze y Reese (2009)) se indica un detallado estado del arte de este tipo de elementos. A pesar de las mejoras, si se utiliza un solo elemento en el espesor estos elementos de “sólido-lámina” no pueden modelar discontinuidades en el espesor como las que aparecen en materiales composites y deben aumentar la discretización en el espesor para captar estos detalles, lo cual hace que pierdan algunas de sus ventajas.

Una de las motivaciones de este trabajo es la simulación de materiales laminados en régimen no lineal material que requiere incluir más de un elemento en el espesor de la lámina. Por ello en lo que aquí se presenta se intenta curar el bloqueo por cortante transversal en problemas dominados por la flexión y mejorar el comportamiento membranal a los fines de poder utilizar mallas mas gruesas e incluso aliviar el problema de bloqueo volumétrico (cuando se tratan problemas de flujo plástico), pero no se considera mejorar el comportamiento en flexión frente al efecto “Poisson” debido a una pobre interpolación en la dirección transversal.

Curiosamente no hay desarrollos de elementos de sólido-lamina de base triangular. La razón probablemente son las pocas posibilidades que brinda una interpolación cinemática tan restringida. Una ventaja importante que tendría un elemento de base triangular es que los generadores de mallas triangulares son mucho mas eficaces en cuanto a obtener elementos con buena relación de aspecto.

El comportamiento de los elementos estándar “wedge” de 6 nudos y “brick” de 8 nudos es diferente por lo que las estrategias para curar los bloqueos también serán diferentes. Así el primero muestra un bloqueo por cortante mucho más moderado en tanto que el segundo tiene un mejor comportamiento membranal. Notar además que para una misma densidad de malla una estrategia de integración reducida implica en el primero el doble de puntos de integración que para el segundo.

En este trabajo se propone modificar el elemento “wedge” de 6 nudos estándar (Zienkiewicz y Taylor (2000)). Para evitar el bloqueo volumétrico se realiza el promediado de la deformación volumétrica en todo el elemento (restringido a usar al menos dos elementos en el espesor). Respecto al corte transversal se parte de la propuesta para elementos de lámina triangulares cuadráticos (Oñate et al. (1992)), con lo cual en la dirección local normal a la lámina se tendrá una aproximación ANS para algunas componentes del tensor métrico. Finalmente en el plano tangente a la lámina se hará uso de los elementos adyacentes para lograr una mejora en las correspondientes componentes del tensor métrico (Flores y Oñate (2005)). El objetivo final es tener un elemento sencillo, que no requiera estabilización alguna, no presente inestabilidades en grandes deformaciones y sea adecuado para problemas con contacto.

Un la siguiente sección se resumen las ecuaciones de la mecánica de sólidos más relevantes para este trabajo. En la Sección 3 se presenta la formulación del elemento de sólido. A continuación se presentan las mejoras en el elemento estándar, empezando por la mejora en el plano tangente de la lámina, luego la formulación del corte transversal y finalmente se indica como

evitar el bloqueo volumétrico. En la Sección 5 se presentan varios ejemplos mostrando el muy buen comportamiento del elemento y finalmente se resumen algunas conclusiones.

2. EXPRESIONES RELEVANTES DE LA MECÁNICA DE LOS SÓLIDOS

Referidos a un sistema cartesiano global arbitrario denotamos con \mathbf{X} la posición original de los puntos materiales del sólido, con $\mathbf{R}(\mathbf{X}) = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3]$: la terna ortogonal respecto a la cual se caracteriza el material en cada punto del sólido indeformado (sistema local). La posición de los puntos materiales del sólidos en un instante cualquiera t se escriben como $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Denominando con \mathbf{F} al gradiente de la deformación

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

que puede referirse al sistema local (indicaremos con un sombrero superpuesto ($\hat{\quad}$), las variables referidas al sistema local cuando sea necesario)

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \mathbf{R} \quad (2)$$

el cual permite obtener el tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} y las deformaciones de Green-Lagrange \mathbf{E}

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{R}^T \mathbf{C} \mathbf{R} \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{1}) \quad (4)$$

La medida de tensión asociada (a través del principio de trabajos virtuales) es el segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff $\hat{\mathbf{S}}$ que se relaciona con el tensor de tensiones (reales) de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ por

$$\hat{\mathbf{S}} = \det(\hat{\mathbf{F}}) \hat{\mathbf{F}}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{F}}^{-T} \quad (5)$$

lo que permite escribir el trabajo virtual interno como

$$\int_{V_0} \hat{\mathbf{S}} : \delta \hat{\mathbf{E}} dV_0 \quad (6)$$

donde V_0 es el volumen original indeformado del sólido.

Este par conjugado tensión-deformación presenta algunas dificultades para el tratamiento de relaciones constitutivas elasto-plásticas en grandes deformaciones, por lo cual introduciremos la deformación de Hencky, lo cual requiere la descomposición espectral de \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{L} \quad (7)$$

donde $\boldsymbol{\Lambda}^2$ es la matriz diagonal que agrupa a los autovalores λ_i^2 de \mathbf{C} y \mathbf{L} incluye los autovectores (unitarios) asociados. Entonces es posible escribir las deformaciones como

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{L}}^T \ln(\boldsymbol{\Lambda}) \hat{\mathbf{L}} \quad (8)$$

Esta medida de deformación es una extensión adecuada de la deformación logarítmica (natural) unidimensional y mide deformaciones respecto a la terna original. Denominaremos con $\hat{\mathbf{T}}$ a la medida de tensión asociada, que puede relacionarse con $\hat{\mathbf{S}}$ a través de las expresiones siguientes:

a) definiendo los tensores rotados

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_L &= \hat{\mathbf{L}}^T \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{L}} \\ \mathbf{S}_L &= \hat{\mathbf{L}}^T \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{L}}\end{aligned}\quad (9)$$

b) la relación entre el 2do tensor de Piola Kirchhoff y la tensión de Hencky es (ver por ejemplo la referencia [Crisfield \(1997\)](#)):

$$\begin{aligned}[S_L]_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{\lambda_\alpha^2} [T_L]_{\alpha\alpha} \\ [S_L]_{\alpha\beta} &= \frac{\ln(\lambda_\alpha/\lambda_\beta)}{\frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2)} [T_L]_{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (10)$$

c) finalmente

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{R}}_L \mathbf{S}_L \hat{\mathbf{R}}_L^T \quad (11)$$

El objetivo de calcular $\hat{\mathbf{S}}$ es que las condiciones de equilibrio se expresan a partir de la ec. (6) debido a la complejidad computacional que representa obtener la variación de la deformación de Hencky (ec. (8)).

A los fines de considerar comportamiento inelástico se supondrá que en tal caso las deformaciones elásticas son pequeñas y que es admisible descomponer en forma aditiva al tensor de deformación de Hencky en una componente elástica y una componente plástica

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}^e + \hat{\mathbf{e}}^p \quad (12)$$

Para el caso de materiales isótropos se supondrá además que existe una relación lineal entre la medida de tensión de Hencky $\hat{\mathbf{T}}$ y la componente elástica del tensor de deformaciones $\hat{\mathbf{e}}^e$ (definida por un tensor constitutivo constante \mathbf{D}):

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{D} : \hat{\mathbf{e}}^e \quad (13)$$

En el caso de materiales composites existen diferentes formas de tratarlo. Una posibilidad es considerarlo como un único material equivalente, en tal caso se aplica directamente la expresión anterior, esta aproximación en general es válida sólo en el rango elástico lineal o el tratamiento plástico resulta muy complejo. Una segunda posibilidad, de mayor generalidad pero más costosa computacionalmente, es analizar separadamente el comportamiento de cada componente cuando corresponda (comportamiento en paralelo en la dirección de las fibras) y su interacción (comportamiento en serie en la dirección transversal a las fibras) ([Rastellini et al. \(2008\)](#); [Martinez et al. \(2011\)](#)). En este caso resulta conveniente expresar el tensor de deformaciones $\hat{\mathbf{e}}$ en las direcciones principales de ortotropía de cada componente

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R}_i^T \hat{\mathbf{e}} \mathbf{R}_i \quad (14)$$

donde $\mathbf{R}_i = [\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i]$ son las direcciones principales de ortotropía de la componente i referidas al sistema local \mathbf{R} . La teoría de mezclas permite tratar separadamente la evolución de cada componente, evaluando su estado tensional y luego calcular el estado tensional equivalente en función de la fracción de volumen de cada componente dentro del compuesto.

3. ELEMENTO FINITO DE SÓLIDO

La cinemática descrita se ha implementado en un elemento sólido prismático de base triangular (wedge) de 6 nudos. Las geometrías inicial y deformada del elemento están descritas por las aproximaciones isoparamétricas estándar (Zienkiewicz y Taylor (2000)).

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^6 N^I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}^I \quad (15)$$

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^6 N^I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}^I = \sum_{I=1}^6 N^I(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{X}^I + \mathbf{u}^I) \quad (16)$$

donde \mathbf{X}^I , \mathbf{x}^I , y \mathbf{u}^I son respectivamente las coordenadas originales, coordenadas actuales y desplazamientos del nudo I . Las funciones de forma $N^I(\boldsymbol{\xi})$ son las habituales funciones de forma Lagrangeanas en función de las coordenadas locales $\boldsymbol{\xi}$ del elemento maestro correspondiente que combinan coordenadas de área (ξ, η) en el plano del triángulo con una interpolación lineal (ζ) en la dirección axial del prisma:

$$\begin{aligned} N^1 &= zL^1 & N^4 &= zL^2 \\ N^2 &= \xi L^1 & N^5 &= \xi L^2 \\ N^3 &= \eta L^1 & N^6 &= \eta L^2 \end{aligned} \quad (17)$$

donde se ha usado:

$$\begin{aligned} z &= 1 - \xi - \eta \\ L^1 &= \frac{1}{2}(1 - \zeta) \\ L^2 &= \frac{1}{2}(1 + \zeta) \end{aligned} \quad (18)$$

La evaluación de las derivadas cartesianas se realiza en forma estándar, definiendo la matriz jacobiana en cada punto de integración

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (19)$$

$$N_{\mathbf{X}}^I = \mathbf{J}^{-1} N_{\boldsymbol{\xi}}^I \quad (20)$$

En cada elemento se define un sistema cartesiano local coincidente con las direcciones principales de ortotropía del material constitutivo

$$\mathbf{R} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3] \quad (21)$$

de tal forma que las derivadas cartesianas referidas a este sistema (\mathbf{Y}) resultan

$$\hat{N}_{\mathbf{Y}}^I = \mathbf{R}^T N_{\mathbf{X}}^I \quad (22)$$

lo que permite evaluar el gradiente de deformación $\hat{\mathbf{F}}$ en función de las coordenadas actuales de los nudos

$$\hat{F}_{ij} = \sum_{I=1}^{NN} \hat{N}_j^I x_i^I \quad (23)$$

y las componentes del tensor $\hat{\mathbf{C}}$

$$\hat{C}_{ij} = \hat{F}_{ki} \hat{F}_{kj} \quad (24)$$

Para aplicar la ecuación constitutiva el tensor de deformaciones se descompone en sus componentes volumétrica y desviadora. Esta descomposición se realiza en forma multiplicativa en cada punto de integración

$$\hat{\mathbf{C}} = \left[\det(\hat{\mathbf{C}}) \right]^{\frac{1}{3}} \hat{\mathbf{C}}_D = J^{\frac{2}{3}} \hat{\mathbf{C}}_D \quad (25)$$

donde las deformaciones volumétrica y desviadora se definen como

$$\Delta = \ln J \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_D = \ln \left(\hat{\mathbf{C}}_D^{\frac{1}{2}} \right) \quad (27)$$

con lo cual

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{\Delta}{3} \mathbf{1} + \hat{\mathbf{e}}_D \quad (28)$$

La componente volumétrica se promedia sobre todo el elemento ($\bar{\Delta}$) cuando se necesita evitar problemas de bloqueo debido al flujo plástico incompresible, con lo cual se obtiene un valor corregido del tensor de deformaciones en cada punto de integración en caso necesario

$$\bar{\mathbf{e}} = \frac{\bar{\Delta}}{3} \mathbf{1} + \hat{\mathbf{e}}_D \quad (29)$$

Aceptando la hipótesis de aditividad de componentes elástica y plástica del tensor de deformaciones éste se escribe:

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{e}}^p + \bar{\mathbf{e}}^e \quad (30)$$

Para el caso de materiales donde la ley de fluencia es independiente de la componente volumétrica, la componente plástica tiene traza nula y $\bar{\Delta}$ es puramente elástica. El tensor de tensiones asociado se obtiene de suponer una ley constitutiva hiperelástica, lineal entre tensiones y componentes elásticas del tensor de deformaciones:

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{D} \bar{\mathbf{e}}^e \quad (31)$$

Para el caso de un material isótropo con deformación plástica incompresible, lo anterior puede escribirse

$$\hat{\mathbf{T}} = 2G \bar{\mathbf{e}}_D^e + K \bar{\Delta} \quad (32)$$

con G y K los habituales módulos de elasticidad transversal y volumétrico respectivamente.

Si se utiliza la función de fluencia de von Mises o alguna de las funciones de fluencia propuestas por Hill es posible trabajar con las componentes desviadoras de tensiones y deformaciones, lo que facilita y hace más económica la integración de las ecuaciones constitutivas.

Como alternativa a la utilización de la deformación logarítmica la descomposición espectral (7) permite considerar en forma sencilla materiales hiper-elásticos en grandes deformaciones (elastómeros), utilizando modelos tales como los de Ogden, Mooney-Rivlin, neohookeanos, etc. que habitualmente se definen en función de la energía interna de deformación a partir de los estiramientos principales.

4. MEJORAS EN EL ELEMENTO ESTÁNDAR

A los efectos de utilizar el elemento prismático en problemas de láminas con grandes deformaciones elastoplásticas incluyendo contacto es necesario mejorar sustancialmente el comportamiento del mismo. Para ello se realizan modificaciones en \mathbf{C} (tensor métrico). Al respecto todas las componentes del gradiente de la deformación, del tensor derecho de Cauchy-Green y el tensor de deformaciones, se escribirán en el sistema local y a los fines de aliviar la notación no se utilizará el sombrero sobre dichas variables.

La discretización de una lámina con elementos de sólido de 6 nudos implica dos pasos a) una discretización de la superficie media de la lámina con triángulos de 3 nudos y b) una discretización del espesor de la lámina con uno o más elementos de sólido en base al triángulo definido sobre la superficie media. Supondremos entonces que las conectividades del elemento de 6 nudos se introducen con los nudos locales 1 a 3 y 4 a 6 asociados con superficies paralelas a la superficie media y que los últimos tres nudos están por encima de los tres primeros en la dirección del espesor a una distancia igual al espesor de la capa (lo habitual en elementos de sólido-lámina). De esta forma la dirección normal a la superficie media (y_3 local) coincide con la variable natural local ζ .

La formulación del elemento de sólido se basa en el tensor derecho de Cauchy-Green, por lo cual una posibilidad interesante es plantear una formulación basada en modificar las componentes de \mathbf{C} directamente asociadas a la parte que se desea mejorar

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11}^{\#} & C_{12}^{\#} & C_{13}^* \\ C_{21}^{\#} & C_{22}^{\#} & C_{23}^* \\ C_{31}^* & C_{32}^* & C_{33} \end{bmatrix} \quad (33)$$

donde las componentes indicadas con un # son las que tienen influencia principal en el comportamiento en el plano tangente a la lámina y, las denotadas con * son las que tienen directa influencia en el corte transversal. Esto permite separar el tensor en tres partes

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 \quad (34)$$

donde

$$\mathbf{C}_1 = C_{11} \mathbf{t}^1 \otimes \mathbf{t}^1 + C_{22} \mathbf{t}^2 \otimes \mathbf{t}^2 + C_{12} (\mathbf{t}^1 \otimes \mathbf{t}^2 + \mathbf{t}^2 \otimes \mathbf{t}^1) \quad (35)$$

se corresponde con las componentes sobre el plano tangente

$$\mathbf{C}_2 = C_{13} (\mathbf{t}^1 \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^1) + C_{23} (\mathbf{t}^2 \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^2) \quad (36)$$

está asociada principalmente con las deformaciones de corte transversal y

$$\mathbf{C}_3 = C_{33} \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^3 \quad (37)$$

con la deformación en el espesor.

4.1. Mejora en el plano de la lámina usando elementos adyacentes

Para ello se recurre a los elementos adyacentes (en el plano de la lámina), de esta forma se involucran 12 nudos en vez de 6 (ver Fig. 1.a). Con lo cual resulta un elemento cuadrático en el plano del triángulo. Aquí se propone la misma opción convectiva usada en láminas (Flores y Oñate (2005)) que consiste en evaluar el tensor métrico a la mitad de cada lado y promediarlo

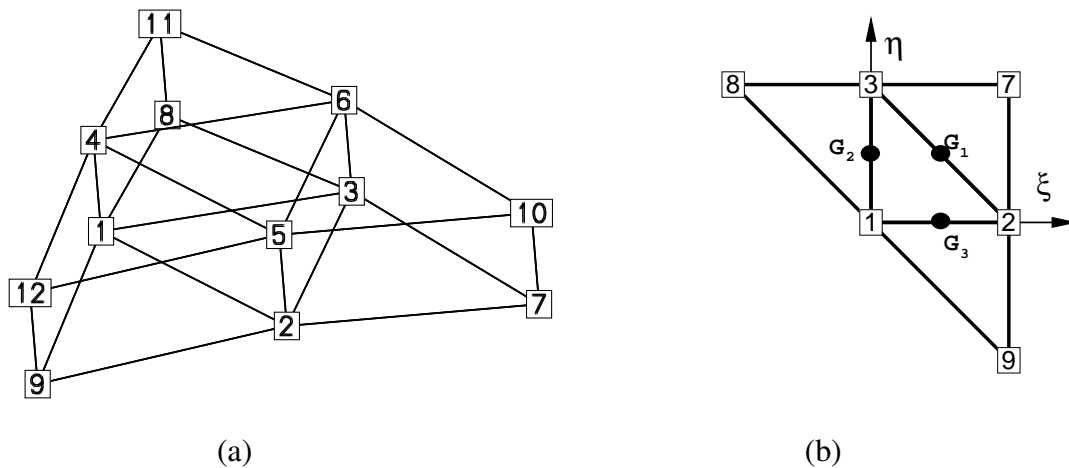


Figura 1: Parcela de elementos

en el centro. En este caso puede hacerse exactamente lo mismo en cada cara, inferior y superior (ver Figura 1.b con la notación de la cara inferior), e interpolar a los puntos de integración. Las funciones locales correspondientes son para la cara inferior

I	N	N_{ξ}	N_{η}	
1	$(z + \xi\eta)$	$(-1 + \eta)$	$(-1 + \xi)$	(38)
2	$(\xi + \eta z)$	$(1 - \eta)$	$(z - \eta)$	
3	$(\eta + z\xi)$	$(z - \xi)$	$(1 - \xi)$	
7	$\frac{z}{2}(z - 1)$	$(\frac{1}{2} - z)$	$(\frac{1}{2} - z)$	
8	$\frac{\xi}{2}(\xi - 1)$	$(\xi - \frac{1}{2})$	0	
9	$\frac{\eta}{2}(\eta - 1)$	0	$(\eta - \frac{1}{2})$	

Luego sobre cada cara inferior y superior definida por los 3 nudos del elemento y los 3 adyacentes:

1. En el centro del elemento evaluamos un sistema local $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ tangente al plano de la lámina y \mathbf{t}_3 normal a la cara.
2. A la mitad de cada lado (G_K) evaluamos el jacobiano en el plano $(\mathbf{X}_\xi, \mathbf{X}_\eta)$ y lo proyectamos en las direcciones $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$

$$\mathbf{J}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_\xi \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{X}_\eta \cdot \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{X}_\xi \cdot \mathbf{t}_2 & \mathbf{X}_\eta \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

3. Evaluamos las derivadas de las funciones de forma que involucran a sólo 4 nudos en cada punto medio G_K

$$\begin{bmatrix} N_1^I \\ N_2^I \end{bmatrix}^K = \mathbf{J}_K^{-1} \begin{bmatrix} N_\xi^I \\ N_\eta^I \end{bmatrix}^K. \tag{40}$$

4. Esto permite evaluar las componentes del gradiente de las deformaciones sobre el plano tangente $(\mathbf{f}_1^K, \mathbf{f}_2^K)$ y con ellos C_{ij}^K ($i, j = 1, 2$) que luego se promedian en la cara \bar{C}_{ij}^f ($f = 1, 2$ según sea cara inferior o superior).
5. De la misma forma que en láminas, cuando no existe el elemento adyacente se incluye en el promedio las componentes C_{ij} evaluadas sobre el triángulo central.

Se mantienen 2 puntos de integración en la directriz del prisma ($\zeta = \pm 3^{-\frac{1}{2}}$) en dichos puntos las componentes en el plano del tensor derecho de Cauchy Green se interpolan (las componentes modificadas de \mathbf{C} se indican por una barra superpuesta)

$$\bar{C}_{ij}(\zeta) = L^1 \bar{C}_{ij}^1 + L^2 \bar{C}_{ij}^2 \quad (41)$$

La correspondiente matriz tangente $\bar{\mathbf{B}}^f$ que relaciona el incremento en desplazamientos $\delta \mathbf{u}$ con los cambios en las componentes del tensor resulta de:

$$\delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11} \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22} \\ \bar{C}_{12} \end{bmatrix} = L^1 \delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^1 \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22}^1 \\ \bar{C}_{12}^1 \end{bmatrix} + L^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^2 \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22}^2 \\ \bar{C}_{12}^2 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} \quad (42)$$

y

$$\begin{aligned} \delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^f \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22}^f \\ \bar{C}_{12}^f \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \sum_{K=1}^3 \delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C_{11}^K \\ \frac{1}{2} C_{22}^K \\ C_{12}^K \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{K=1}^3 \sum_{J=1}^4 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{K(J)} N_1^{(J)} \\ \mathbf{f}_2^{K(J)} N_2^{(J)} \\ (\mathbf{f}_1^{K(J)} N_2^{(J)} + \mathbf{f}_2^{K(J)} N_1^{(J)}) \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}^{K(J)} \\ &= \bar{\mathbf{B}}_{3 \times 18}^f \delta \mathbf{u}^f \end{aligned} \quad (43)$$

donde el vector $\delta \mathbf{u}^f$ incluye sólo los nudos de la cara f (inferior o superior).

4.1.1. Matriz de rigidez geométrica

La matriz de rigidez geométrica en tanto resulta de:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_g \Delta \mathbf{u} &= \int_V \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11} \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22} \\ \bar{C}_{12} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} dV \\ &= \sum_{G=1}^2 \frac{1}{3} Vol_G \sum_{f=1}^2 L^f \sum_{K=1}^3 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \left\{ \delta \mathbf{u}^I [N_1^J N_2^J] \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^J \\ N_2^J \end{bmatrix} \right\}^{(K)} \end{aligned} \quad (44)$$

donde la suma en G es la integración numérica con 2 puntos en la dirección ζ .

4.2. Tratamiento del corte transversal

El tratamiento de corte transversal se realiza usando una aproximación en deformaciones impuestas. Aquí nos basaremos en el trabajo de Oñate et al. (1992) que presenta una metodología general para la cura del bloqueo debido al corte transversal en elementos de lámina. Allí se trabaja con un elemento triangular cuadrático completo, que propone una variación lineal de la deformación de corte tangente al lado. Esta aproximación puede particularizarse para elementos más sencillos (Zárate et al. (1994)) imponiendo sobre cada lado un valor constante de la deformación transversal de corte tangente al lado que resulta:

$$\begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1 - \eta \\ \xi & \xi - 1 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} C_{t3}^1 \\ -C_{\eta 3}^2 \\ C_{\xi 3}^3 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\xi, \eta) \tilde{\mathbf{c}} \quad (45)$$

donde las componentes de corte transversal ($C_{\xi 3}$, $C_{\eta 3}$) han sido definidas en un sistema mixto, i.e. que incluye las coordenadas naturales en el plano (ξ, η) y la coordenada espacial en la dirección transversal (y_3). Las componentes de interés se calculan en función del gradiente tangencial al contorno (\mathbf{f}_t) y el gradiente en la dirección normal \mathbf{y}_3 (\mathbf{f}_3) en cada lado: 1 ($\xi = \eta = \frac{1}{2}$), 2 ($\xi = 0, \eta = \frac{1}{2}$) y 3 ($\xi = \frac{1}{2}, \eta = 0$) (ver Figura 2).

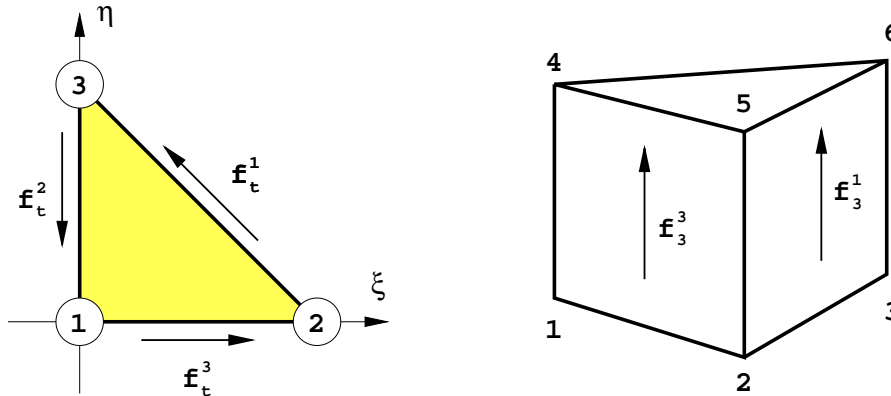


Figura 2: Puntos de evaluación de las componentes transversales en triángulos

Por otro lado la integración se realiza en dos puntos sobre el eje del prisma ($\xi = \eta = \frac{1}{3}$), en dichos puntos:

$$\begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}C_{t3}^1 \\ -C_{\eta 3}^2 \\ C_{\xi 3}^3 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}C_{t3}^1 - C_{\eta 3}^2 + C_{\xi 3}^3}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\xi 3}^3 \\ C_{\eta 3}^2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

A los fines de mantener el elemento sin modos de deformación espurios es necesario tener al menos 4 medidas de deformación, por lo cual no es suficiente evaluar estas componentes sobre la superficie media (lo cual daría sólo 3 las que al integrar sobre el eje se transforman en sólo 2 independientes). Aquí evaluaremos los 3 valores de deformaciones naturales para los dos valores de ζ correspondientes a los puntos de integración (otra opción es hacerlo para $\zeta = \pm 1$ e interpolar a los puntos de integración). Como luego utilizando (46) se evaluarán las componentes del tensor derecho de Cauchy-Green en los puntos de integración, el número de medidas de deformación será la mínima necesaria (4) lo cual permitirá no tener que utilizar estabilización alguna.

Las componentes mixtas evaluadas en los puntos de muestreo son:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}C_{t3}^1 \\ -C_{\eta 3}^2 \\ C_{\xi 3}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\mathbf{f}_t^1 \cdot \mathbf{f}_3^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \cdot \mathbf{f}_3^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \mathbf{f}_3^3 \end{bmatrix} \quad (47)$$

lo cual permite evaluar :

$$\tilde{\mathbf{C}}_2 = C_{\xi 3} (\mathbf{t}^\xi \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\xi) + C_{\eta 3} (\mathbf{t}^\eta \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\eta) \quad (48)$$

donde $[\mathbf{t}^\xi \ \mathbf{t}^\eta \ \mathbf{t}^3]$ son los vectores de la base dual de la terna local $[\mathbf{t}_\xi \ \mathbf{t}_\eta \ \mathbf{t}_3] = \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_3} \right]$ y de allí calcular las componentes cartesianas modificadas.

$$\bar{C}_{13} = \mathbf{t}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}}_2 \cdot \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \cdot [C_{\xi 3} (\mathbf{t}^\xi \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\xi) + C_{\eta 3} (\mathbf{t}^\eta \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\eta)] \cdot \mathbf{t}_3 \quad (49)$$

denotando por $a_i^j = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}^j$ (con $i = 1, 2, 3$ y $j = \xi, \eta, 3$)

$$\bar{C}_{13} = C_{\xi 3} \left(a_1^\xi a_3^3 + a_1^3 a_3^\xi \right) + C_{\eta 3} \left(a_1^\eta a_3^3 + a_1^3 a_3^\eta \right) = C_{\xi 3} a_1^\xi + C_{\eta 3} a_1^\eta \quad (50)$$

y similarmente para la otra componente de interés (\bar{C}_{23}). Luego usando la condición $a_i^3 = \delta_i^3$ resulta

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^\xi & a_1^\eta \\ a_2^\xi & a_2^\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_p^{-1} \begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} \quad (51)$$

donde \mathbf{J}_p^{-1} es la inversa del jacobiano de la interpolación isoparamétrica restringido al plano tangente a la superficie. Notar que debido a la forma en que se han definido a los sistemas locales las componentes son nulas en la configuración de referencia.

Las componentes de interés del gradiente de la deformación en el sistema natural en los puntos de muestreo (1-3) se obtienen valuando las derivadas de las funciones de forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t(\xi = \eta = \frac{1}{2}) \\ -\mathbf{f}_\eta(\xi = 0, \eta = \frac{1}{2}) \\ \mathbf{f}_\xi(\xi = \frac{1}{2}, \eta = 0) \end{bmatrix} \quad (52)$$

las derivadas de las funciones de forma (17) del elemento prisma de 6 nudos valuadas en los puntos de muestreo resultan

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\mathbf{f}_t^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3) L^1 + (-\mathbf{x}^5 + \mathbf{x}^6) L^2 \\ (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3) L^1 + (\mathbf{x}^4 - \mathbf{x}^6) L^2 \\ (-\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) L^1 + (-\mathbf{x}^4 + \mathbf{x}^5) L^2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Hasta aquí se ha escrito los gradientes (coordenadas naturales) de \mathbf{x} en los puntos de muestreo en función de las coordenadas nodales. Los gradientes en la dirección transversal se expresan como

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\xi & \mathbf{f}_\eta & \mathbf{f}_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\xi & \mathbf{f}_\eta & \mathbf{f}_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y_3} \end{bmatrix} = \nabla_\xi(\mathbf{x}) \mathbf{j}_3^{-T} \quad (54)$$

donde $(\frac{\partial}{\partial y_3})$ son las componentes en la dirección y_3 de la inversa del jacobiano (la tercera columna o \mathbf{j}_3^{-1}) o también

$$\mathbf{f}_3 = \sum_{I=1}^6 \hat{N}_3^I \mathbf{x}^I \quad (55)$$

con

$$\hat{N}_3^I = \begin{bmatrix} N_\xi^I & N_\eta^I & N_\zeta^I \end{bmatrix} \mathbf{j}_3^{-T} \quad (56)$$

Obtenidas las componentes de corte transversal, estas se pueden pasar al sistema cartesiano en la misma forma que el gradiente

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} & \frac{\partial \eta}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y_2} & \frac{\partial \eta}{\partial y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_p^{-1} \begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Las componentes de corte transversal del tensor \mathbf{C}_2 respecto al sistema cartesiano resultan entonces de reemplazar las (47) en las (45) y éstas en las (51)

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix}(\xi, \eta) = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{P}(\xi, \eta) \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^1 \cdot \mathbf{f}_3^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \cdot \mathbf{f}_3^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \mathbf{f}_3^3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{P}(\xi, \eta) \tilde{\mathbf{c}} \quad (58)$$

La matriz que relaciona el incremento de desplazamientos con el incremento de deformaciones $\bar{\mathbf{B}}$, resulta de primero evaluar en los puntos de muestreo

$$\tilde{\mathbf{B}}_s \delta \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \mathbf{f}_3^1 + \mathbf{f}_t^1 \cdot \delta \mathbf{f}_3^1 \\ -\delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \mathbf{f}_3^2 - \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \delta \mathbf{f}_3^2 \\ \delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \mathbf{f}_3^3 + \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \delta \mathbf{f}_3^3 \end{bmatrix} \quad (59)$$

donde (con $\delta \mathbf{x}^e = \delta \mathbf{u}^e$)

$$\delta \begin{bmatrix} \sqrt{2}\mathbf{f}_t^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L^1 \delta \mathbf{x}^2 + L^1 \delta \mathbf{x}^3 - L^2 \delta \mathbf{x}^5 + L^2 \delta \mathbf{x}^6 \\ L^1 \delta \mathbf{x}^1 - L^1 \delta \mathbf{x}^3 + L^2 \delta \mathbf{x}^4 - L^2 \delta \mathbf{x}^6 \\ -L^1 \delta \mathbf{x}^1 + L^1 \delta \mathbf{x}^2 - L^2 \delta \mathbf{x}^4 + L^2 \delta \mathbf{x}^5 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\delta \begin{bmatrix} \sqrt{2}\mathbf{f}_t^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0 & -L^1 & +L^1 & +0 & -L^2 & +L^2 \\ +L^1 & +0 & -L^1 & +L^2 & +0 & -L^2 \\ -L^1 & +L^1 & 0 & -L^2 & +L^2 & +0 \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^3 \\ \mathbf{u}^4 \\ \mathbf{u}^5 \\ \mathbf{u}^6 \end{bmatrix} \quad (61)$$

y (con un abuso de notación)

$$\delta \begin{bmatrix} \mathbf{f}_3^1 \\ \mathbf{f}_3^2 \\ \mathbf{f}_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{N}_3^{1(1)} & \hat{N}_3^{2(1)} & \hat{N}_3^{3(1)} & \hat{N}_3^{4(1)} & \hat{N}_3^{5(1)} & \hat{N}_3^{6(1)} \\ \hat{N}_3^{1(2)} & \hat{N}_3^{2(2)} & \hat{N}_3^{3(2)} & \hat{N}_3^{4(2)} & \hat{N}_3^{5(2)} & \hat{N}_3^{6(2)} \\ \hat{N}_3^{1(3)} & \hat{N}_3^{2(3)} & \hat{N}_3^{3(3)} & \hat{N}_3^{4(3)} & \hat{N}_3^{5(3)} & \hat{N}_3^{6(3)} \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^3 \\ \mathbf{u}^4 \\ \mathbf{u}^5 \\ \mathbf{u}^6 \end{bmatrix} \quad (62)$$

luego interpolar a los puntos de integración usando (46) y finalmente pasar al sistema cartesiano

$$\bar{\mathbf{B}}(\xi, \eta) = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{P}(\xi, \eta) \tilde{\mathbf{B}}_s \quad (63)$$

Las deformaciones de Green-Lagrange asociadas al corte transversal son directamente los valores interpolados

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix}(\xi, \eta) = \mathbf{J}_p^{-1} \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1-\eta \\ \xi & \xi-1 & \xi \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}} \\ &= \mathbf{J}_p^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}C_{t3}^1 - C_{\eta 3}^2 + C_{\xi 3}^3}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\xi 3}^3 \\ C_{\eta 3}^2 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (64)$$

En tanto que las fuerzas nodales equivalentes se expresan como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T &= \int_V \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix}^T [\bar{\mathbf{B}}_s]_{2 \times 18} dV \\ &= \int_{y_3} A \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_p^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ +\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} [\tilde{\mathbf{B}}_s]_{3 \times 18} dy_3 \end{aligned} \quad (65)$$

donde las fuerzas generalizadas de corte $\bar{\mathbf{Q}}$ en cada punto de Gauss se definen como:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} A \quad (66)$$

4.2.1. Matriz de rigidez geométrica

Con lo anterior puede avanzarse en la obtención de la matriz de rigidez geométrica:

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{sG} \Delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T \int_{y_3} \Delta \left[\tilde{\mathbf{B}}_s \right]_{18 \times 3}^T \bar{\mathbf{Q}} dy_3 \quad (67)$$

donde

$$\Delta \left(\tilde{\mathbf{B}}_s \delta \mathbf{u} \right) \bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}^T \Delta \begin{bmatrix} \delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \mathbf{f}_3^1 + \mathbf{f}_t^1 \cdot \delta \mathbf{f}_3^1 \\ -\delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \mathbf{f}_3^2 - \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \delta \mathbf{f}_3^2 \\ \delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \mathbf{f}_3^3 + \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \delta \mathbf{f}_3^3 \end{bmatrix} \quad (68)$$

que, por ejemplo, para el primer lado es

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_1 \times & \left[(-L^1 \delta \mathbf{u}^2 + L^1 \delta \mathbf{u}^3 - L^2 \delta \mathbf{u}^5 + L^2 \delta \mathbf{u}^6) \cdot \sum_{I=1}^6 \hat{N}_3^{I(1)} \Delta \mathbf{u}^I \right. \\ & \left. + \sum_{I=1}^6 \hat{N}_3^{I(1)} \delta \mathbf{u}^I (-L^1 \Delta \mathbf{u}^2 + L^1 \Delta \mathbf{u}^3 - L^2 \Delta \mathbf{u}^5 + L^2 \Delta \mathbf{u}^6) \right] \end{aligned} \quad (69)$$

4.3. Comportamiento volumétrico

Para evitar el bloqueo volumétrico (en problemas cuasi-incompresibles o elasto-plásticos con flujo isócoro) se promediará la deformación volumétrica de los dos puntos de integración utilizados. Esto conduce a un elemento excesivamente flexible cuando se utiliza un sólo elemento en el espesor, por lo cual en tales casos se utilizarán al menos dos elementos en el espesor. Por otro lado para captar con detalle el proceso de plastificación se requieren al menos cuatro puntos en el espesor por lo que un elemento es insuficiente. Una segunda opción es usar más de dos puntos de integración en el elemento (no implementada de momento).

5. EJEMPLOS

En el conjunto de ejemplos presentados abajo se denota por `Wedge` al elemento descrito en la Sección 3, en tanto que al elemento en el que se incorpora alguna técnica para mejorar el comportamiento membranar o curar el bloqueo por cortante o volumétrico se lo denota por `Prism`. Al respecto el sufijo `B` indica que se promedia la deformación volumétrica en el elemento, `S` indica que se ha considerado la mejora en el corte transversal y `Q` indica que se ha considerado la mejora en el comportamiento membranar.

En el caso de simulaciones a gran escala con fuertes no-linealidades asociadas a inestabilidades geométricas, modelos constitutivos complejos, contacto friccional, es común utilizar algoritmos explícitos con matrices de masa diagonalizadas que son condicionalmente estables. Al simular láminas discretizadas con varios elementos de sólido en el espesor el tiempo de avance crítico puede resultar prohibitivamente pequeño. Para este tipo de modelos [Olovsson et al. \(2004\)](#) propusieron una estrategia de escalamiento selectivo de masa que permite que el tiempo crítico no dependa de la discretización en el espesor. Esta técnica ha sido utilizada aquí (una descripción de esta técnica puede verse también en [Flores y Oñate \(2010\)](#) y [Flores y Oñate \(2011\)](#)) para los experimentos numéricos mostrados abajo salvo en el segundo (cilindro de Scordelis que es un problema lineal) y tercer ejemplo (semi-esfera con cargas puntuales). Los ejemplos 1 y 4 son dinámicos en tanto que los otros si bien son esencialmente estáticos han sido

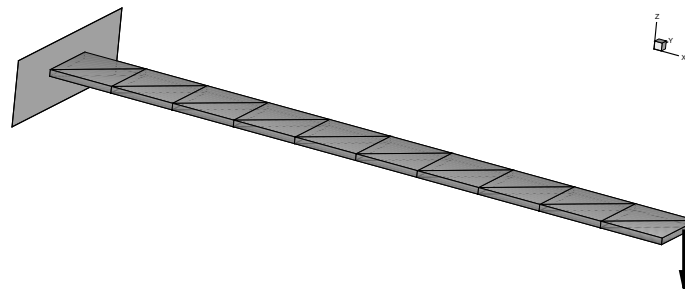


Figura 3: Viga en voladizo bajo carga puntual

resueltos utilizando el código dinámico explícito con un importante amortiguamiento que quita energía cinética en forma continua convirtiendo la simulación en pseudo estática.

Con fines comparativos se utilizan resultados obtenidos con otros elementos desarrollados por el autor: *Solag*: elemento de 8 nudos basado en la formulación de la sección 3 (Flores (2001)), *Solag-S*: idéntico al anterior más una aproximación en deformaciones para el corte transversal (Flores y Oñate (2011)) y *LBST* y *BBST* son elementos triangulares de lámina delgada sin grados de libertad rotacionales, el primero (Flores y Oñate (2001)) utiliza el triángulo de deformación constante para la membrana en tanto que el segundo (Flores y Oñate (2007)) incluye una aproximación en deformaciones impuestas para la membrana.

5.1. Viga en voladizo con carga puntual

En este primer ejemplo (tomado de Olovsson et al. (2004)) se considera el comportamiento dinámico de una viga en voladizo de longitud, ancho y espesor $L = 1$, $b = 0,1$ y $t = 0,01$. Las propiedades mecánicas son módulo de Young $E = 1 \times 10^{11}$ Pa, relación de Poisson $\nu = 0$ y densidad $\delta = 1000$ kg/m³. La carga puntual tiene un valor de 100 N y responde a una función escalón (Heaviside). Dado que el problema es elástico y se considera ν nulo no hay efecto Poisson en el espesor ni bloqueo volumétrico. El problema es puramente flexional y sirve para evaluar el bloqueo por corte y su cura. La discretización incluye diez divisiones uniformes en la dirección del largo, una en el ancho y una en el espesor (ver Fig. 3). La aproximación volumétrica es estándar, i.e. no se considera el promedio o integración reducida (de otra manera da un comportamiento muy flexible).

Con el elemento sólido estándar (*SOLAG*) se obtiene un bloqueo por cortante que invalida totalmente el resultado. En la Figura 4 se puede ver que este desplazamiento apenas supera el 2 % del desplazamiento correcto. Curiosamente el *Wedge* si bien bloquea no lo hace tan severamente. Por otro lado tanto los resultados con los elementos que incluyen la cura del bloqueo por cortante (*Solag-S* de 8 nudos y *Prism-S* de 6 nudos) dan resultados prácticamente idénticos al elemento de lámina triangular *BBST* con la misma discretización.

5.2. Cilindro de Scordelis

Este segundo ejemplo considera el análisis de una cubierta cilíndrica bajo peso propio. Está apoyada sobre diafragmas rígidos en sus extremos curvos y está libre en sus lados rectos. Se modela sólo un cuarto de la geometría debido a las condiciones de simetría con mallas estructuradas con la misma cantidad de elementos por lado (ver Figura 5.a). Se consideran mallas estructuradas con orientación indicada en la figura en tanto que en el espesor se han utilizado dos elementos.

En la Figura 5.b se muestra el desplazamiento vertical a la mitad del borde libre (punto A cu-

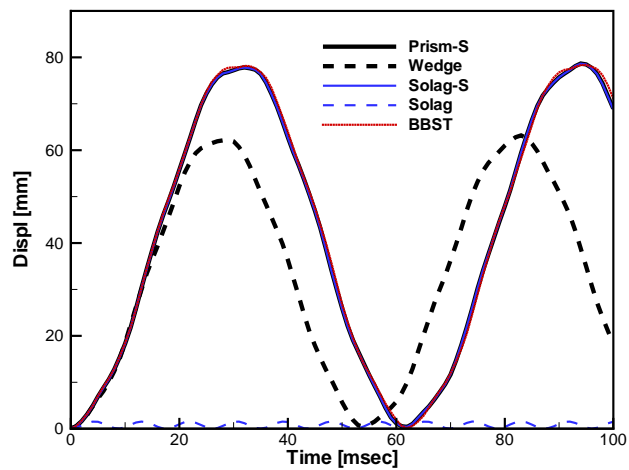


Figura 4: Viga en voladizo bajo carga puntual. Resultados

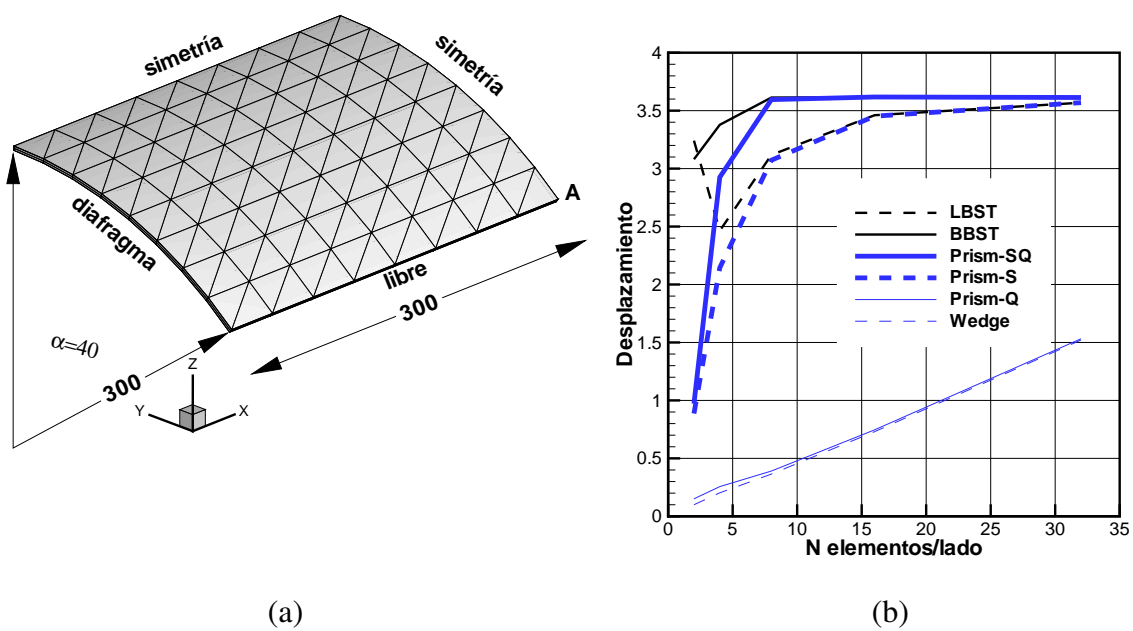


Figura 5: Techo cilíndrico de Scordelis. (a) geometría (b) desplazamiento del punto A

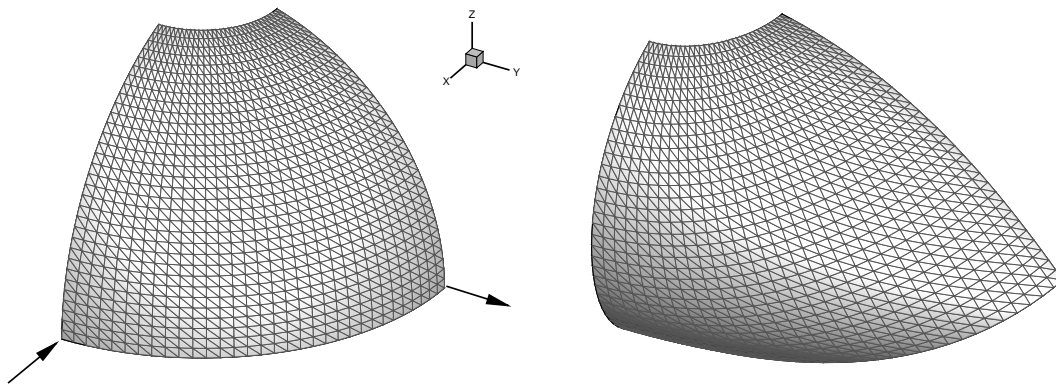


Figura 6: Esfera incompleta con cargas puntuales. Geometría original y deformada.

yo valor de de referencia es $w_A = 3,610$.) en función del número de divisiones por lado. En este caso es muy importante una buena aproximación membranal para una rápida convergencia, para mostrar esto último se incluyen en la comparación los resultados obtenidos usando los elementos de lámina LBST y BBST, cuya principal diferencia para este problema es la aproximación membranal. Puede notarse que rápidamente el segundo alcanza convergencia en el desplazamiento de referencia. La figura incluye además cuatro curvas correspondientes al elemento de sólido. Claramente *Wedge* bloquea severamente y puede verse que con sólo mejorar la membrana (*Prism-Q*) no hay cambios notorios. Al mejorar el corte transversal (*Prism-S*) los resultados son similares al elemento de lámina con el triángulo de deformación constante como membrana (LBST). Y al combinar ambos (*Prism-SQ*) los resultados convergen rápidamente al valor de referencia.

5.3. Semi-esfera incompleta con cargas puntuales

En este caso un bien conocido problema de doble curvatura en el contexto de grandes desplazamientos elásticos. La Figura 6 se muestra el cuarto de la geometría considerada en base a condiciones de simetría. La malla utilizada incluye una discretización de 32 elementos por lado y 2 en el espesor. La densidad de malla es relativamente fina en el plano de la lámina debido a que éste es un problema básicamente inextensional donde el comportamiento membranal no es importante y que, debido a la doble curvatura, es importante el efecto Poisson en el espesor y el bloqueo por curvatura (ambos efectos no considerados en esta primera formulación del elemento). El radio de la superficie media es $R = 10\text{mm}$, en tanto que para el espesor se han considerado dos valores $t = 0,04\text{mm}$ ($R/t = 250$) y $t = 0,01\text{mm}$ ($R/t = 1000$). Las propiedades mecánicas son $E = 6,825 \times 10^4\text{GPa}$ y $\nu = 0,3$.

La Figura 6 muestra a la derecha la configuración deformada para un desplazamiento entrante del 60% del radio. En tanto que la Figura 7 se muestran los desplazamientos de los puntos cargados, allí para el caso más grueso se incluyen resultados obtenidos con elementos de lámina de la Referencia [Simo et al. \(1990\)](#) y para ambos casos resultados obtenidos con el elemento BBST. El mayor de ellos corresponde a la carga entrante y tiene el signo cambiado. Del elemento propuesto se indican los desplazamientos obtenidos con la formulación estándar en desplazamientos (*Wedge*) que bloquea severamente y con tres combinaciones de mejoras, todas incluyendo la cura en el bloqueo por cortante (S) que es la más significativa para este problema. Puede notarse que la mejora al considerar la formulación membranal es muy pequeña en este caso y que si se utiliza además el promediado de la deformación volumétrica, naturalmente

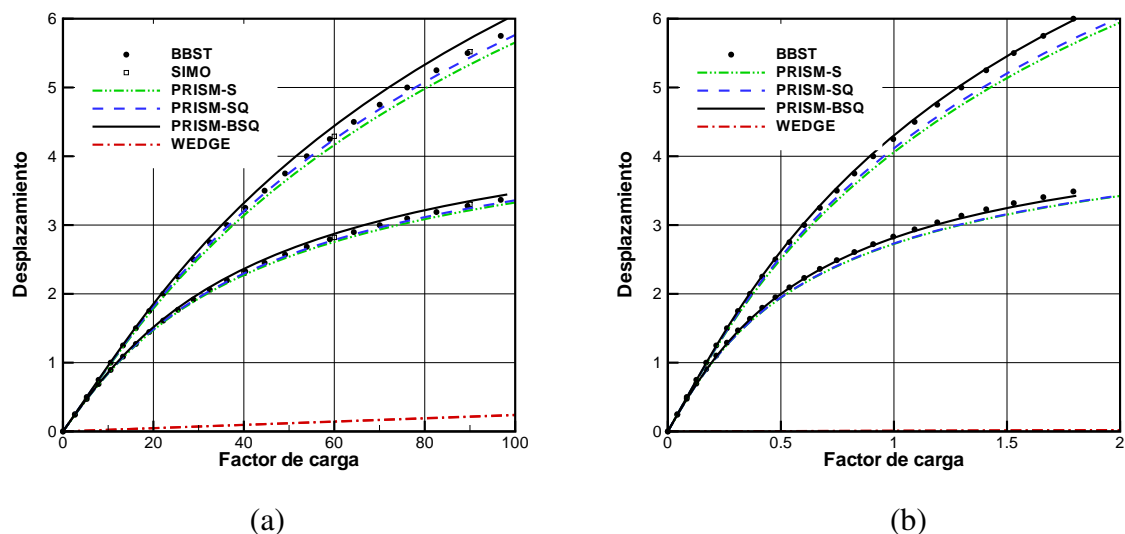


Figura 7: Esfera incompleta con cargas puntuales. Desplazamientos de los puntos cargados. (a) $R/t = 250$ (b) $R/t = 1000$.

se obtiene un comportamiento más flexible al aliviar el efecto Poisson. En el caso del elemento estándar el bloqueo se incrementa notoriamente en el caso más delgado, en tanto que para las versiones con cura del bloqueo transversal los resultados no muestran diferencias sustanciales entre ambos espesores.

5.4. Casquete esférico bajo carga uniforme

Este es un ejemplo clásico (Bathe et al. (1975)) del comportamiento dinámico de láminas tanto en régimen elástico como elasto-plástico y aparece en la mayoría de los manuales de programas de elementos finitos con capacidad no-lineal (ver por ejemplo ABAQUS (2006)). Las comparaciones se realizan contra una solución obtenida con un elemento de sólido cuadrilátero axilsimétrico Q4P1 (4 elementos en el espesor y 100 en el meridiano).

Se ha considerado una discretización relativamente gruesa con 96 elementos sobre un cuarto de la superficie de la lámina y dos elementos en el espesor y una discretización fina con 2888 elementos en el plano de la lámina y 4 elementos en el espesor. Para el modelo elástico la formulación volumétrica es estándar en tanto que para el caso elasto-plástico se utiliza el promedio en el elemento.

La Figura 8.a corresponde al caso elástico, se incluyen allí los desplazamientos del ápice del domo para la solución de referencia y la malla gruesa. Los resultados muestran la notoria mejora del presente elemento frente al elemento estándar. La Figura 8.b corresponde al caso elasto-plástico. Nuevamente los resultados de la presente versión son mucho mejores que el caso estándar, sin embargo en este caso debe refinarse notoriamente la malla para acercarse a la solución de referencia.

5.5. Ovalamiento de un codo

Un tubo de radio $r = 19,83$ cm y espesor $t = 1,041$ cm, empotrado en un extremo y formado por un tramo recto de 182,9 cm un codo a 90° de radio 60,95 cm y un segundo tramo recto de 60,96 cm, está sometido a un giro impuesto en su extremo libre. Este giro se impone sobre todos los nudos de la sección extrema de tal forma que esta se mantiene plana y

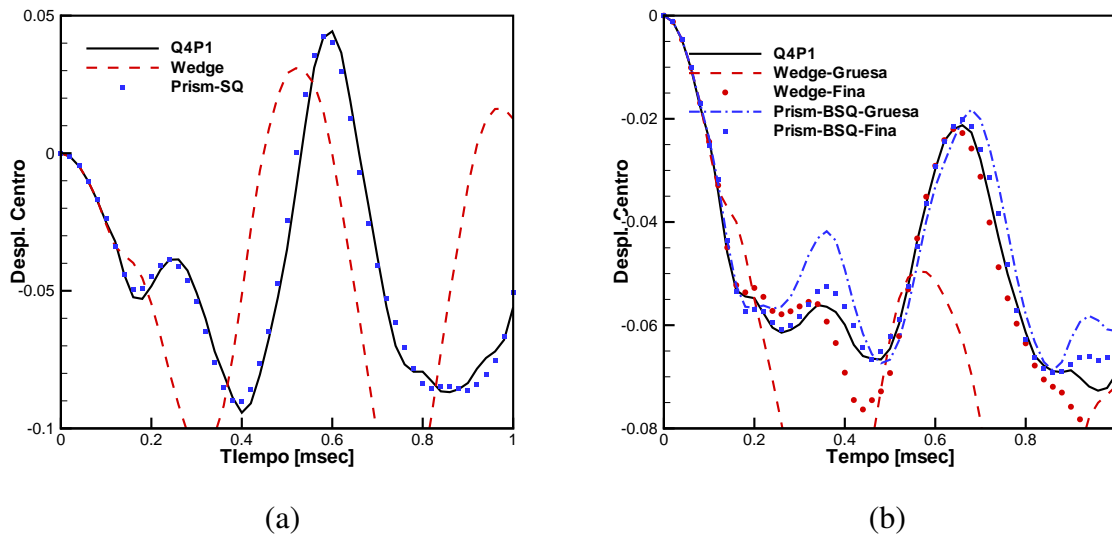


Figura 8: Domo esférico con carga uniforme. (a) elástico, (b) elasto-plástico

circular. El tubo puede estar sometido a una presión interna y se consideran entonces dos casos a) $p = 0$ y b) $p = 3,45$ MPa. La flexión produce un ovalamiento principalmente en la zona del codo. Las propiedades mecánicas del material constitutivo son: $E = 194$ GPa, $\nu = 0,264$, $\delta = 7800$ kg/m³ y plasticidad asociada (von Mises) con endurecimiento isótropo gobernado por la relación $\sigma_y = 5,71 \times 10^8 (e_p + 0,006)^{0,1}$. Se consideraron dos tipos de modelos: uno exclusivamente con elementos de láminas triangulares de 3 nudos (BBST) y otro acoplado de elementos de sólido y lámina donde la zona del codo se modeló con elementos de sólido y las partes rectas con elementos de lámina. La discretización utilizada es relativamente gruesa con 672 elementos triangulares sobre la superficie media. Para el modelo acoplado con sólidos se utilizaron 3 elementos en el espesor, la relación de aspecto (largo/espesor) de los elementos de sólido varía entre 15 y 30. Se utilizaron 6 puntos de integración en el espesor de la lámina a los fines de tener la misma cantidad de puntos de integración que en el caso del sólido y para captar razonablemente la flexión elasto-plástica. La Figura 9 muestra la geometría final del codo con la malla acoplada y la zona del codo en el modelo puramente de elementos de lámina. Se han graficado los contornos de deformaciones plásticas efectivas sobre el codo. Se ha incluido el mismo contorno de deformaciones sobre la malla media con sólo elementos de lámina con fines comparativos. Puede notarse una mayor expansión de las deformaciones plásticas en el caso de la lámina. También puede notarse una cierta discontinuidad al utilizar un modelo acoplado de elementos sólido y lámina. En los modelos sólo se ha discretizado la mitad del tubo debido a la simetría.

En la Figura 10 se ha graficado el momento resistente en función de la rotación impuesta para ambos casos de carga (con y sin presión) y para los dos modelos considerados. Además se distinguen el caso de utilizar sólo el promedio de la deformación volumétrica (PRISM-B) y la formulación en deformaciones impuestas para el corte transversal y la parte membranal (PRISM-BSQ). El modelo con sólidos estándar es notoriamente rígido debido al bloqueo por cortante (nuevamente menor en el caso del elemento de 6 nudos que en el de 8) en tanto que no hay diferencias significativas entre el modelo de lámina y el modelo acoplado cuando se utiliza la formulación en deformaciones impuestas. Las diferencias con el elemento sólido de 8 nudos son en parte debido al mejor comportamiento membranal del elemento BBST y Prism-BSQ.

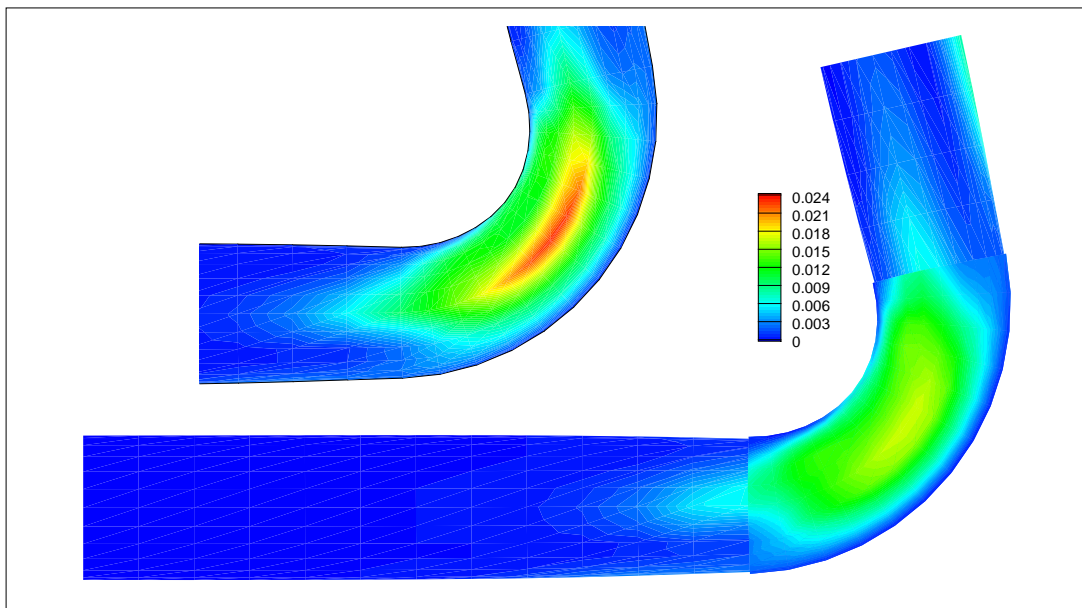


Figura 9: Codo sometido a flexión. Deformada final (X=1). Contorno de deformaciones plásticas efectivas sobre la cara externa del codo

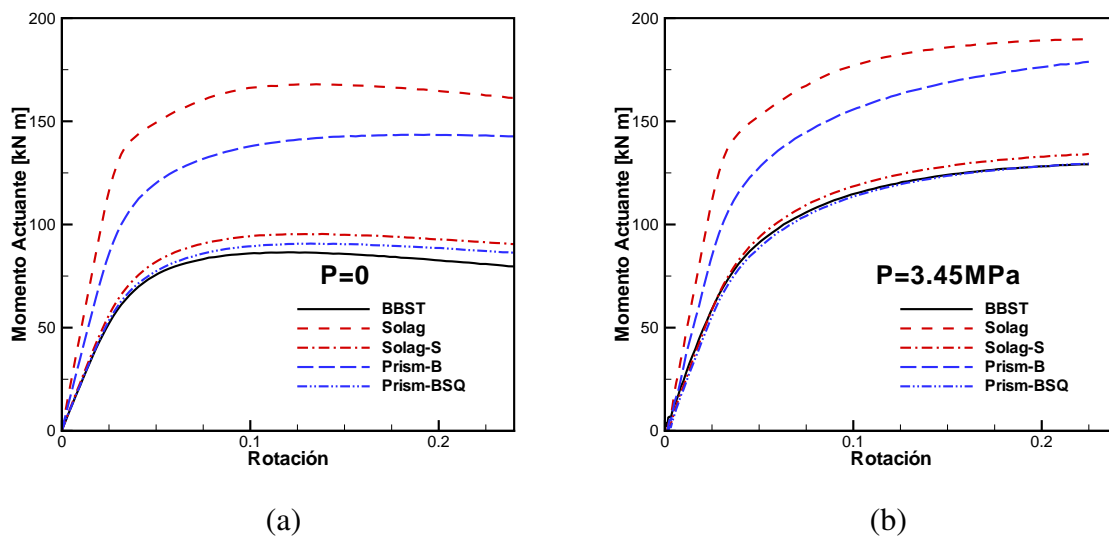


Figura 10: Codo sometido a flexión. Momento resistente en función de la rotación impuesta. (a) sin presión interna. (b) con presión interna

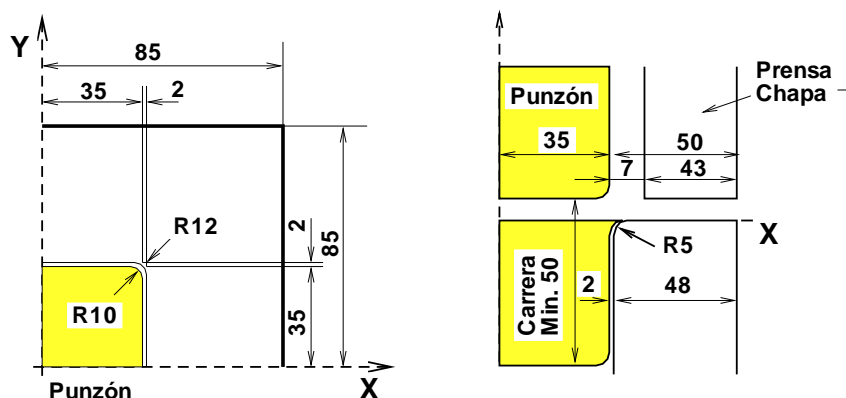


Figura 11: Geometría de las herramientas (dimensiones en mm) en el “benchmark” de Numisheet '93

5.6. Embutición de una lámina cuadrada

Como último ejemplo se ha considerado la embutición de una lámina delgada correspondiente a un “benchmark” de NUMISHEET'93 (Makinouchi et al. (1993)). En la Figura 11 se ve la geometría de las herramientas. La chapa original es cuadrada de 75 mm de lado.

Se han considerado condiciones de simetría según los ejes coordenados, por lo que se ha modelado sólo un cuarto de la geometría con una discretización en planta de 30 divisiones en cada dirección (1800 elementos en el plano) y 2 o 4 elementos en la dirección del espesor (3600 o 7200 elementos en total). La fuerza sobre el pisador (prensa chapa) es de 19,6 kN y el coeficiente de fricción adoptado es $\mu = 0,144$. Se ha realizado una embutición de 40 mm (carrera del punzón).

En la Figura 12 se muestra la fuerza sobre el punzón en función del avance del mismo. En la figura se han incluido los resultados obtenidos con el elemento de lámina triangular de 3 nudos BBST para comparación. Se incluyen resultados con las dos discretizaciones en el espesor (indicadas por el 2 y el 4) y cuatro combinaciones de las mejoras propuestas todas incluyendo el promediado de la deformación volumétrica. Puede observarse que sólo la combinación de ambas mejoras (SQ) conduce a los resultados correctos y que usar 2 o 4 elementos en el espesor no da diferencias significativas. Por otro lado no sólo las fuerzas de embutición son incorrectas sino que en la parte final del proceso ocurre un aumento localizado espurio de las deformaciones plásticas efectivas.

En la Figura 13 se muestra los contornos de deformación plástica efectiva para los modelos de sólido usando 2 y 4 elementos en el espesor y con el modelo con elementos de lámina BBST. Las diferencias entre usar 2 o 4 elementos en el espesor son imperceptibles (con un doble costo computacional para el segundo caso). Sí pueden detectarse diferencias con el modelo de lámina como era de esperar.

6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha desarrollado un elemento de sólido-lámina de base triangular (prisma) adecuado para el análisis no lineal con grandes deformaciones elasto-plásticas. En la formulación se han utilizado técnicas de deformaciones naturales impuestas para evitar el bloqueo por corte transversal y de deformaciones impuestas para mejorar el comportamiento membranar. Para evitar el bloqueo volumétrico se ha recurrido a promediar la deformación volumétrica en el espesor. La formulación es sencilla y permite efectivamente lograr el objetivo

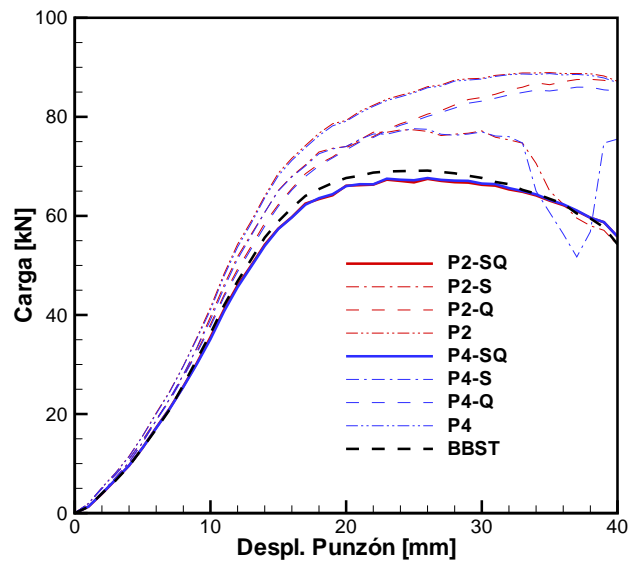


Figura 12: Fuerza en el punzón en función del avance del mismo.

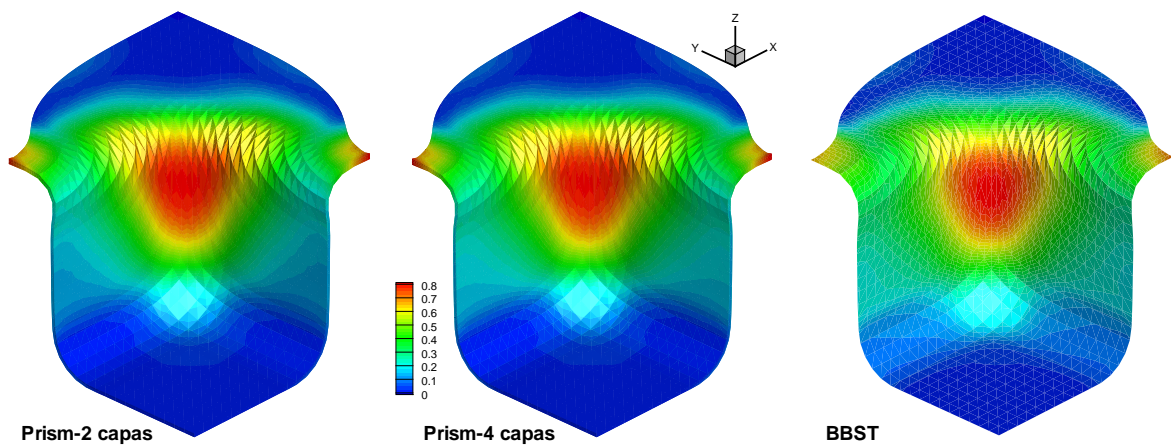


Figura 13: Deformación plástica equivalente para el máximo desplazamiento del punzón

buscado. Las principales conclusiones son:

- El bloqueo por corte transversal desaparece completamente.
- Para muchos problemas elásticos es suficiente utilizar un sólo elemento en el espesor sin recurrir al promediado de la deformación volumétrica.
- En problemas elasto-plásticos, dos elementos en el espesor dan muy buenos resultados.
- En problemas dominados por el comportamiento membranar (embutición por ej.) la mejora en el comportamiento membranar es de suma importancia.
- El elemento funciona correctamente en problemas con grandes deformaciones elasto-plásticas.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y de la SeCyT-UNC.

REFERENCIAS

- ABAQUS. *User's Manual, version 6.6.2*. Dassault Systemes Simulia Corp, 2006.
- Bathe K., Ramm E., y Wilson E. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9:353–386, 1975.
- Cardoso R., Yoon J., Mahardika M., Choudhry S., Alves de Sousa R., y Fontes Valente R. Enhanced assumed strain (eas) and assumed natural strain (ans) methods for one-point quadrature solid-shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75:156–187, 2008.
- Crisfield M. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures II: Advanced Topics*. John Wiley and Sons, 1997.
- Dvorkin E. y Bathe K. A continuum based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations*, 1:77–88, 1984.
- Flores F. Elementos finitos para el análisis de sólidos anisótropos con grandes deformaciones plásticas. *Mecánica Computacional*, 20:163–170, 2001.
- Flores F. y Oñate E. A basic thin shell triangle with only translational dofs for large strain plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:57–93, 2001.
- Flores F. y Oñate E. Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free shell triangle using an assumed strain approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:907–932, 2005.
- Flores F. y Oñate E. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1521–1551, 2007.
- Flores F. y Oñate E. Un elemento de sólido con una mejora en el comportamiento del corte transversal para el tratamiento de láminas. *Mecánica Computacional*, páginas 4303–4324, 2010.
- Flores F. y Oñate E. Un elemento de sólido con una mejora en el comportamiento del corte transversal para el tratamiento de láminas. *Rev. Int. Métodos Numér. Cál. Diseño Ing.*, 27, 2011.
- Hauptmann R. y Schweizerhof K. A systematic development of solid-shell element formulations for linear and nonlinear analyses employing only displacement degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:49–70, 1998.

- Makinouchi A., Nakamachi E., Oñate E., y Wagoner R. *Proceedings of the International Conference NUMISHEET'93*. 1993.
- Martinez X., Rastellini F., Oller S., Flores F., y Oñate E. Computationally optimized formulation for the simulation of composite materials and delamination failures. *Journal of Composites part B*, 42:134–144, 2011.
- Oñate E., Zienkiewicz O., Suárez B., y Taylor R. A methodology for deriving shear constrained reissner-mindlin plate elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:345–367, 1992.
- Olovsson L., Unosson M., y Simonsson K. Selective mass scaling for thin walled structures modeled with tri-linear solid elements. *Computational Mechanics*, 34:134–136, 2004.
- Rastellini F., Oller S., Salomón O., y Oñate E. Composite materials non-linear modelling for long fibre-reinforced laminates continuum basis, computational aspects and validations. *Computer and Structures*, 86:879–896, 2008.
- Schwarze M. y Reese S. A reduced integration solid-shell finite element based on the eas and the ans concept. geometrically linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80:1322–1355, 2009.
- Simo J., Fox D., y Rifai M. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iii: Computational aspects of the non-linear theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79:21–70, 1990.
- Vu-Quoc L. y Tan X. Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. i. statics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:975–1016, 2003.
- Zárate F., Oñate E., y Flores F. A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:2569–2582, 1994.
- Zienkiewicz O. y Taylor R. *The finite element method. Vol II: Solid Mechanics*. Butterworth heinemann, 2000.