

## ANÁLISIS Y MODELADO DE LOS ESFUERZOS EN UNA SECCIÓN DE CEMENTO DE UN POZO PETROLERO UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)

Manuel Martínez <sup>a</sup>, Daniel Insausti <sup>b</sup> y Alejandro Corales <sup>b</sup>.

<sup>a</sup>Comisión de Estudios de Postgrado – Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela, Los Chaguaramos –Caracas, Venezuela, [mjmartinezster@gmail.com](mailto:mjmartinezster@gmail.com), <http://mpostgweb.ing.ucv.ve/>

<sup>b</sup>Escuela de Ingeniería Mecánica – Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela, Los Chaguaramos –Caracas, Venezuela, [mjmartinezster@gmail.com](mailto:mjmartinezster@gmail.com), <http://mpostgweb.ing.ucv.ve/>

**Palabras clave:** Elementos de contorno (MEC), geomecánica, cementación, análisis de esfuerzos.

**Resumen.** En este trabajo se desarrollaron varios modelos físico – matemáticos en dos dimensiones para determinar el estado de esfuerzos a los que se encuentra sometido el cemento de un pozo petrolero a una profundidad determinada, mediante el método de elementos de contorno (MEC).

Como modelo geométrico se utilizó la cuarta parte de la sección transversal de un cilindro hueco, mientras que las condiciones de carga usadas fueron dos: presión externa constante e igual al esfuerzo horizontal *in situ* máximo, y presión externa variable, donde la carga externa cambiaba angularmente desde el esfuerzo horizontal *in situ* mínimo hasta el esfuerzo horizontal *in situ* máximo. Ambos modelos de carga poseían además dos variantes: en la primera, no se tomó en cuenta la presión de lodo dentro del casing y en la segunda, si se consideró esta presión.

Se realizaron dos estudios a nivel matemático, uno a través de un programa computacional basado en el MEC y otro mediante el método de elementos finitos (MEF), siendo este último hecho con fines comparativos tanto del método numérico como de los resultados obtenidos.

Para realizar los cálculos por el MEC se separó el modelo físico real (cemento-casing) en tres partes: anillo de cemento, casing y el conjunto completo como un solo material, utilizando las teorías de materiales compuestos. Para los cálculos por el MEF se utilizó únicamente la configuración completa tratada como dos materiales unidos de manera perfecta.

Los resultados obtenidos fueron que el casing recibe casi la totalidad de la carga externa, mientras que el cemento se comporta más como un elemento aislante y de apoyo para el casing, el modelo de material combinado es útil solo para obtener los esfuerzos de Von Mises en la interfaz, mas no los desplazamientos, y el estado de esfuerzos y desplazamientos en el cemento pudo ser obtenido por medio de la separación del conjunto.

## 1 INTRODUCCIÓN

Al explotar un pozo petrolero, a medida que se va penetrando la tierra mediante el uso de máquinas y herramientas diseñadas para tal fin, se distorsiona o altera el estado de esfuerzo en equilibrio (estado de esfuerzo *in-situ*) que prevalecen en el subsuelo, por ello se hace necesaria la inserción y colocación de tubos de acero entre la formación y el taladro con varios propósitos (Marcano, 2001):

- Tratar de contrarrestar el desbalance del estado de esfuerzos, creado por la perforación del pozo.
- Evitar que el pozo colapse debido al derrumbe de las paredes del pozo.
- Evitar que el agua, el gas y el petróleo existente en las distintas formaciones entren en contacto, ya que esto originaría pérdidas de producción.

Para proteger a esta tubería de la corrosión, de fuerzas generadas externamente y otros agentes contaminantes, entre ella y la formación geológica se coloca un revestimiento de cemento, que además ayuda al aislamiento del pozo. Este proceso se conoce como cementación.

La selección de un cemento adecuado para el revestimiento del pozo es una decisión crítica debido a que los sistemas de cementación deben tolerar los efectos de las presiones, las temperaturas y de los fluidos de formación a medida que se profundiza en el subsuelo.

Una vez la lechada de cemento ha sido emplazada, los diferentes cambios en las condiciones del pozo pueden inducir esfuerzos que comprometan la integridad del cemento fraguado o inclusive reducirlo a escombros, tales como esfuerzos tectónicos, aumentos considerables de presión y/o temperatura, operaciones de cañoneo (punzonamiento) o fracturas hidráulicas (Sifontes, (2005) y Rodríguez et al., (2003)).

Dada la importancia del proceso de cementación dentro de la explotación de un pozo petrolero y el tipo de cemento usado en el mismo, un estudio de los esfuerzos al que está sometido este material se hace indispensable para lograr un trabajo exitoso al explotar una zona petrolífera.

Para modelar estos esfuerzos se han usado una gran variedad de métodos numéricos y computacionales, este trabajo se orienta a realizar un estudio por estas vías en pro de incrementar y tal vez mejorar los análisis ya existentes.

## 2 DESARROLLO TEÓRICO – FORMULACIÓN NUMÉRICA

### 2.1 Método de elementos de contorno

El método de elementos de contorno (Brebbia y Domínguez, 1989), al igual que otros métodos numéricos, se emplea en la elastostática para determinar las tracciones y los desplazamientos en un cuerpo sometido a cargas, cuando la forma de estas o la geometría del sólido tienen cierto grado de complejidad que hacen que obtener la solución mediante métodos analíticos sea un poco engorroso.

En este método, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema a resolver son transformadas en ecuaciones integrales, las cuales son aplicables sobre la frontera superficial de la región. Luego se divide el contorno del dominio del problema en un número finito de subdominios, los cuales tienen una geometría simple. Cada elemento tiene un número de nodos en el espacio que son determinados por las coordenadas relativas a un sistema de ejes dado, la dimensión de los elementos está reducida en uno. Esto es, para problemas donde el dominio es

plano se usan elementos unidimensionales (líneas), mientras que para dominios en tres dimensiones se usan elementos superficiales.

Una vez hecho esto, se asume algún tipo de variación de las incógnitas entre los nodos de un mismo elemento, siendo las más comunes la constante, la lineal y la cuadrática.

Luego se resuelven las ecuaciones integrales de manera numérica para la superficie usando los valores de frontera conocidos y alguna solución fundamental de la ecuación integral, para la elastostática se utiliza la solución analítica de Kelvin.

Si se quieren hallar los valores de las variables en puntos internos se utiliza la identidad de Somigliana, que determina estos valores en función de los resultados obtenidos en la frontera (Beer y Watson, 1992).

## 2.2 Consideraciones generales

- 1 Los materiales a estudiar son homogéneos e isotrópicos.
- 2 Las superficies son concéntricas y el espesor de las mismas es constante.
- 3 No existen discontinuidades dentro de los materiales
- 4 En los análisis hechos por elementos finitos, se asume que la unión entre el cemento y el casing es perfecta.
- 5 No se consideran efectos térmicos.
- 6 Las deformaciones ocurren solamente en la región elástica del material.
- 7 El estudio en 2D se realiza bajo la teoría de deformación plana debido a que la relación entre la longitud del cilindro y el radio externo es grande, las cargas son perpendiculares al eje longitudinal y están distribuidas uniformemente

## 3 MODELADO DEL PROBLEMA ESTUDIADO

Debido a que el problema estudiado presentaba simetría tanto de geometría como de cargas aplicadas con respecto al eje longitudinal del cilindro, se hizo el análisis a la cuarta parte de este.

Por limitaciones del programa computacional, solo era posible estudiar un material a la vez, por lo que se dividió el problema en 3 partes:

- ### 3.1 Anillo de cemento:
- Este modelo tiene un diámetro exterior de 8,5 in (21,59 cm) (diámetro del hoyo) y un diámetro interno de 7,625 in (19,3675 cm). El cemento utilizado es API clase H, el cual posee un módulo de Young compresivo de  $2 \times 10^6$  psi (13,8 GPa) y una relación de Poisson es de 0,22

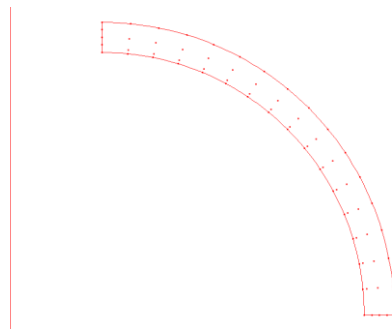


Figura 1: Cemento

**3.2 Casing:** Es un tubo de acero de grado API J-55, su módulo de Young es de  $30 \times 10^6$  psi (20,7 GPa) y su relación de Poisson es de 0,3, el diámetro externo es de 7,625 in (19,3675 cm) y el diámetro interno es de 6,969 in (17,70126 cm).

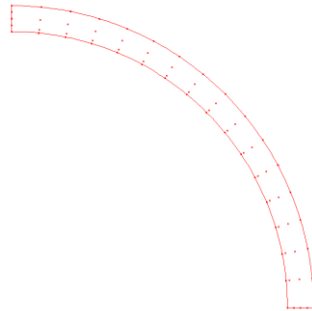


Figura 2: Casing

**3.3 Material combinado (cemento – acero):** En este modelo se asume el conjunto como un único material, con diámetro externo de 8,5 in (21,59 cm) y diámetro interno de 6,969 in (17,70126 cm). El módulo de Young de este material es de  $3,21 \times 10^6$  psi (22,1 GPa) y su relación de Poisson es de  $6,09 \times 10^{-2}$ . Para obtener estos valores se utilizó la teoría de materiales compuestos (Shackelford, 1992), la cual se encuentra, explicada de manera resumida, en los anexos.

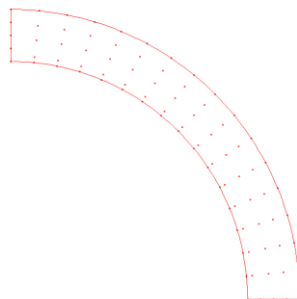


Figura 3: Material combinado

La malla está compuesta por elementos unidimensionales, parabólicos de 3 nodos, además fueron colocados puntos internos distribuidos en líneas paralelas a los bordes circulares, a estas líneas se les conocerá como fibras en lo que a este trabajo respecta.

### 3.4 Condiciones de frontera

Las condiciones de borde para cada uno de los modelos presentados son las siguientes

#### 3.4.1 Casing

Se aplicaron 2 tipos de carga externa:

1. **Presión constante:** Presión externa uniforme e igual al esfuerzo horizontal máximo ( $\sigma_H$ )
2. **Presión variable:** Presión externa variable, desde  $\sigma_h$  en el eje X de referencia hasta  $\sigma_H$  en el eje Y. Esta variación es lineal con respecto al ángulo  $\theta$  medido en sentido contrario a las agujas del reloj partiendo desde el lado positivo del eje X.

A estos modelos de carga se le hicieron dos variantes: en la primera el borde interior no se encontraba sometido a presión alguna, mientras que en el segundo se cargó internamente con la presión hidrostática del lodo de producción.

Los valores de las presiones aplicadas correspondieron a los obtenidos en la data geomecánica para una profundidad de 6375 ft (1943.1 m).

En cuanto las condiciones de desplazamiento los bordes del área estudiada (líneas a  $0^\circ$  y  $90^\circ$ ) fueron restringidos de movimiento lateral o tangencial, pero son libres de desplazarse radialmente.

#### 3.4.2 Cemento

Las condiciones de carga externa y de restricción en los bordes fueron las mismas que se emplearon en el casing, mientras que en el límite interior se colocaron como condiciones de desplazamiento los valores obtenidos a lo largo de la curva externa del casing.

### 3.5 Material compuesto (acero – cemento)

Se mantuvieron las mismas condiciones de borde empleadas en el casing.

$$T = r\mu \left[ (F_1 - f(\alpha_1)) \frac{1}{k\mu} (e^{k\mu(\alpha_2 - \alpha_1)} - 1) + f_{Lin}(\alpha_2) - f_{Lin}(\alpha_1) \right] \quad (1)$$

donde,

$$f_{Lin}(\alpha) = \frac{-2wR}{1 + \mu^2} (\cos\alpha + k\mu s e n \alpha) \quad (2)$$

Para secciones rectas las ecuaciones se reducen a:

$$F_2 = F_1 + w\Delta s (\pm \mu s e n \alpha + \cos\alpha) \quad (3)$$

$$T = r\mu (w\Delta s s e n \alpha) \quad (4)$$

configuración deformada está libre de esfuerzos y deformaciones, y los puntos de contacto serán considerados en nodos definidos.

## 4 CASOS DE ESTUDIO – RESULTADOS Y ANÁLISIS

### 4.1 Convergencia del método

Para determinar el número de elementos óptimo en MEC para el problema estudiado, se hicieron varias corridas con cada modelo de carga para  $\frac{1}{4}$  de cilindro. Se seleccionaron 3 puntos sobre la superficie para la comparación.

El número de elementos obtenido solo dependió de la forma de variación de las cargas, siendo 20 para presión externa constante y 40 para presión externa variable.

### 4.2 Casing

#### 4.2.1 Sin presión de lodo

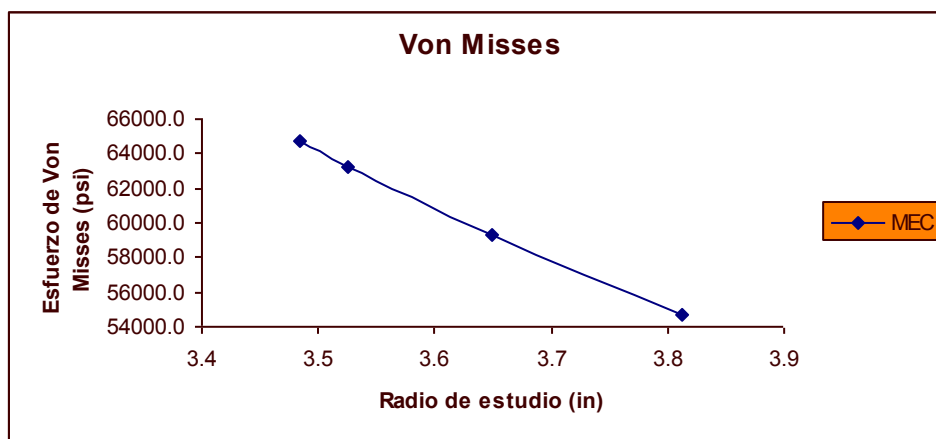


Figura 4: Esfuerzo de Von Mises para el casing, presión externa constante. Sin presión interna.

#### 4.2.2 Con presión de lodo

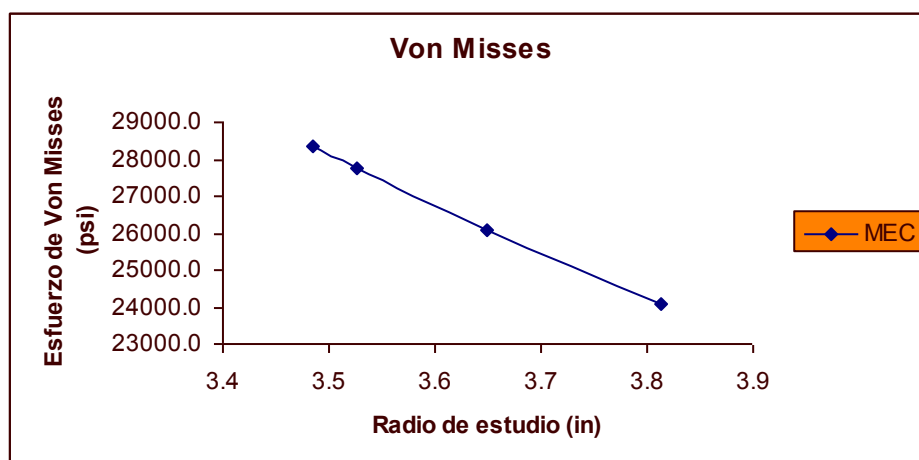


Figura 5: Esfuerzo de Von Mises para el casing, presión externa constante. Con presión interna.

Los resultados obtenidos por el MEC para los valores del esfuerzo de Von Misses se aproximan en gran medida a los obtenidos para el MEF, siendo la mayor diferencia relativa de 1,35 %. Esta diferencias máxima se obtuvo justo en la zona donde el casing y el cemento hacen contacto.

Estos resultados indican que el casing soporta los esfuerzos *in situ* de la formación casi en su totalidad.

### 4.3 Cemento

Al igual que en el caso anterior, las aproximaciones entre ambos métodos fue satisfactoria, sin embargo, en los modelos donde se aplicó como condición de borde en la fibra interior del cemento los valores de desplazamiento obtenidos en el estudio del casing sometido a una presión interna, las diferencias relativas sufrieron un leve aumento.

#### 4.3.1 Presión externa constante

##### 4.3.1.1 Sin presión de lodo

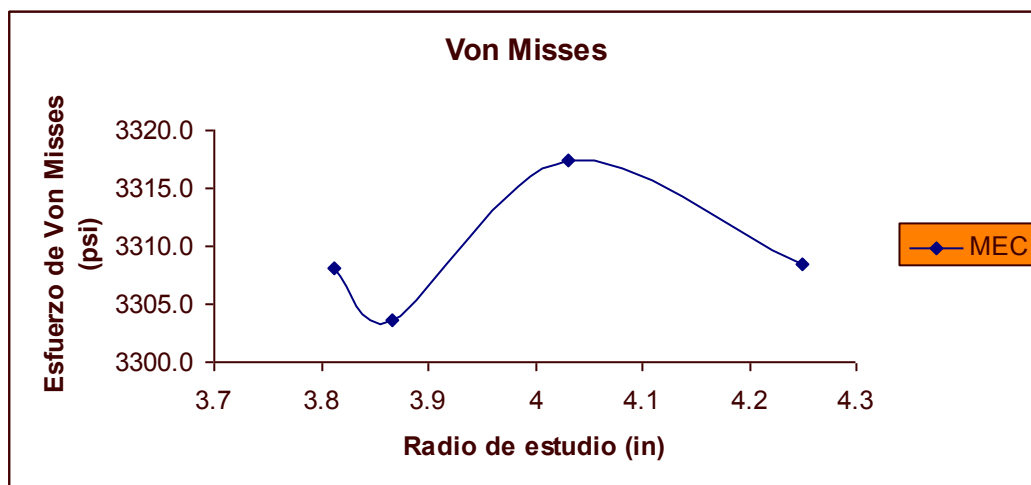


Figura 6: Esfuerzo de Von Misses para el cemento, presión externa constante. Sin presión interna en Casing.

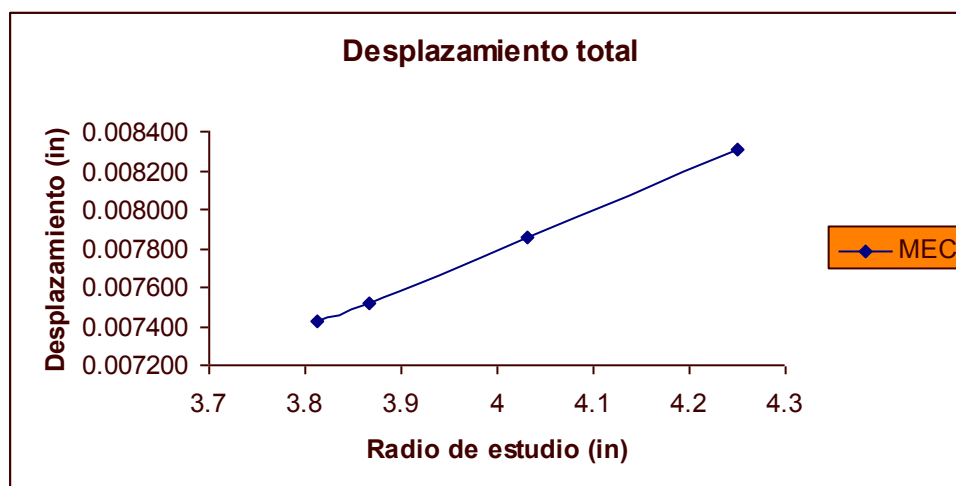


Figura 7: Desplazamiento total para el cemento, presión externa constante. Sin presión interna en Casing.

Los esfuerzos de Von Mises presentan un comportamiento oscilatorio para el modelo de presión constante, esto se debe, en gran parte, al método matemático empleado.

Los esfuerzos radiales obtenidos en la fibra externa, tienen la misma magnitud que la presión aplicada (esfuerzos *in situ*). Estos valores se incrementan a medida que se penetra en el cemento hasta llegar a su máximo en la zona de contacto, esto debido a que en esa región el cemento se consigue con un cuerpo que posee mayor rigidez (casing). Por otra parte, la magnitud de los esfuerzos obtenidos supera, en gran medida, a la resistencia última a la compresión (UCS) del cemento (3.000 psi), pero esto no implica la falla del mismo debido a que la resistencia UCS que se conoce para el cemento tipo H es determinada, generalmente, en ensayos de compresión no confinados, y una característica importante del cemento es precisamente que a medida que se aumenta la presión de confinamiento su resistencia se incrementa.

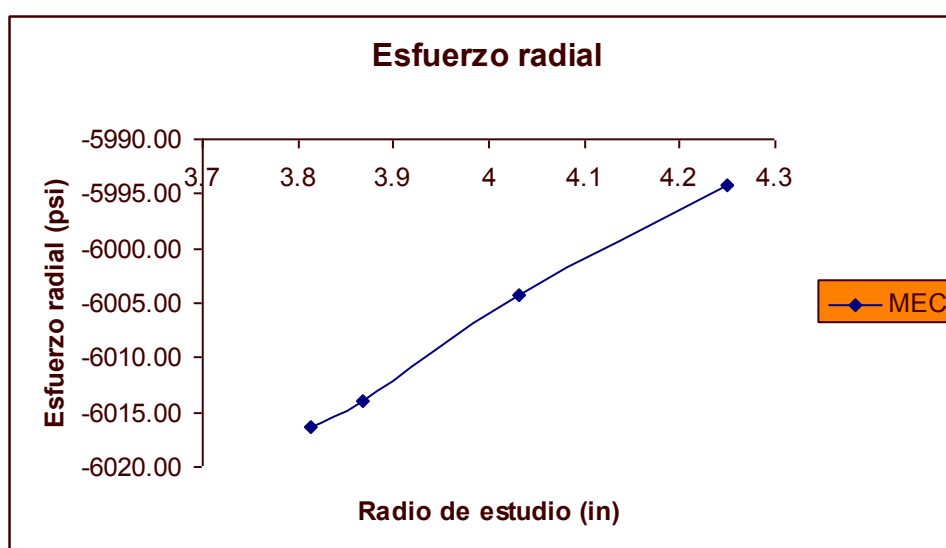


Figura 8: Esfuerzo de radial para el cemento, presión externa constante. Sin presión interna en casing.



#### 4.4 Con presión de lodo

Cuando se agrega presión de lodo al sistema, los resultados indican que el cemento se encuentra sometido a niveles de esfuerzo mayores en lo que sería una zona cercana a la superficie de contacto, implicando esto que la presión de lodo no compense totalmente la presión externa aplicada, sino que evita que se produzcan grandes niveles de esfuerzos en una zona tan delicada como la interfaz.

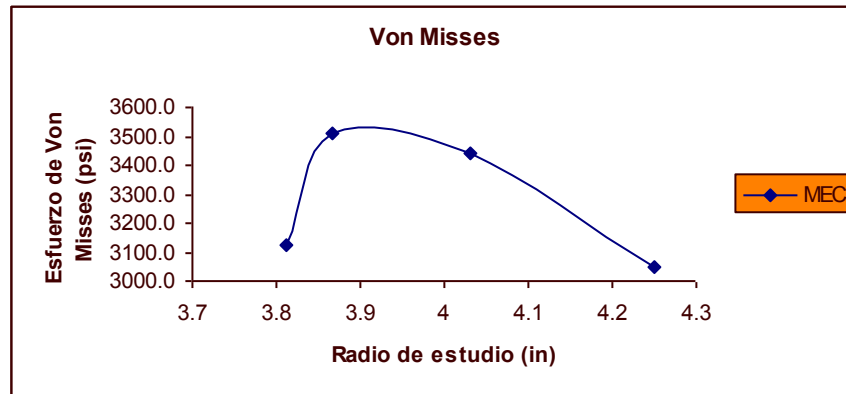


Figura 9: Esfuerzo de Von Mises para el cemento, presión externa constante. Con presión interna en Casing.

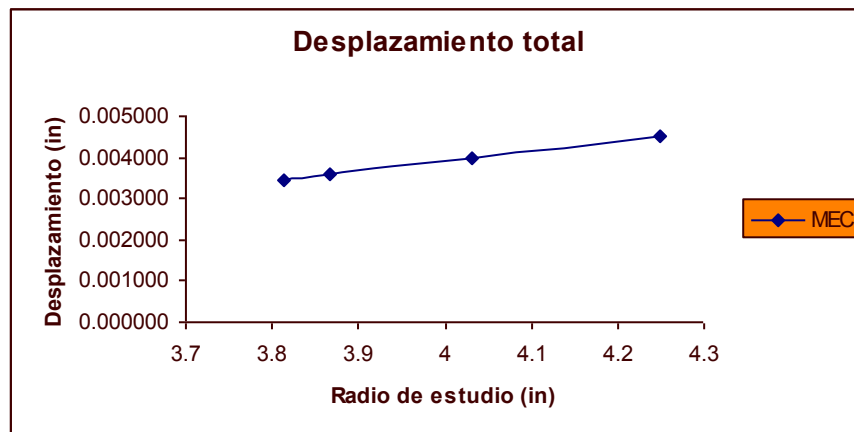


Figura 10: Desplazamiento total para el cemento, presión externa constante. Con presión interna en Casing.

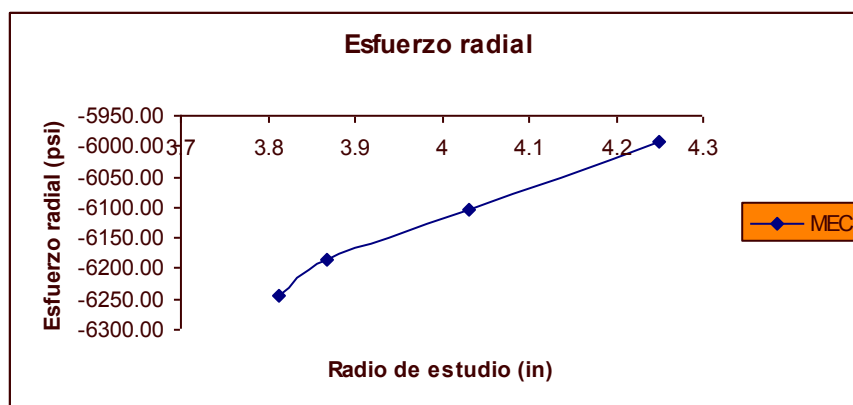


Figura 11: Esfuerzo radial para el cemento, presión externa constante. Con presión interna en casing.

#### 4.4.1 Presión externa variable

En el caso de los modelos a presión variable, los esfuerzos de Von Mises tienden a tomar un único valor a medida que el radio se incrementa, mientras que los valores de desplazamientos reflejan la “ovalización” que se muestra en la Figura 13, ya que, para un arco de radio constante, se tienen magnitudes de desplazamiento total bastante diferentes en 3 puntos cualesquiera, lo que crea concentraciones de esfuerzos en la zona donde está aplicado el esfuerzo horizontal mínimo ( $\sigma_h$ ).

La zona con mayores esfuerzos en el cemento es la que corresponde a la interfaz con el casing y las fibras cercanas a ella.

##### 4.4.1.1 Sin presión de lodo

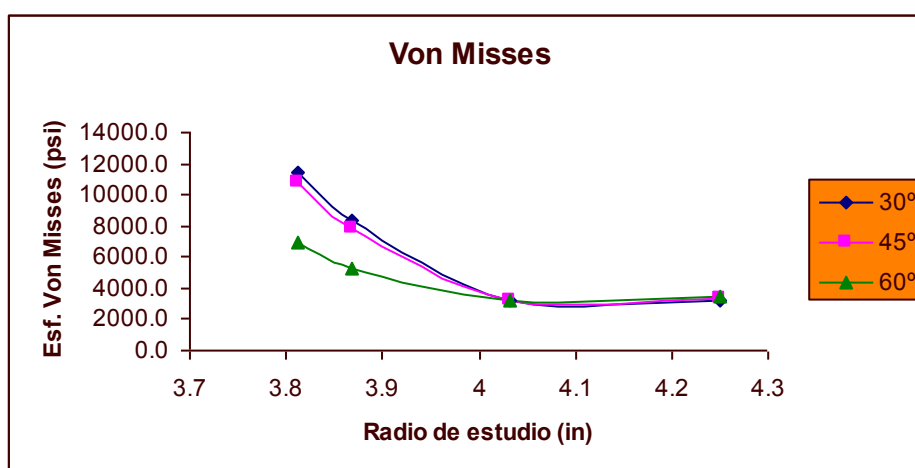


Figura 12: Esfuerzo de Von Mises para el cemento, presión externa variable. Sin presión interna en Casing.

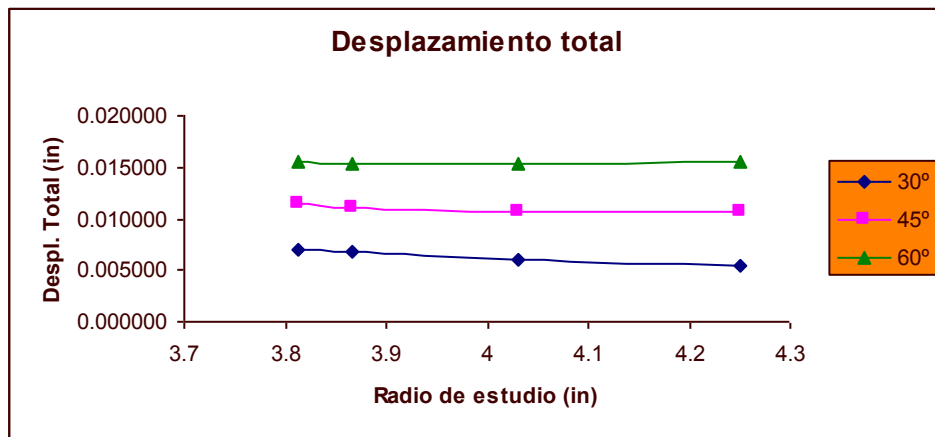


Figura 13: Desplazamiento total para el cemento, presión externa variable. Sin presión interna en Casing.

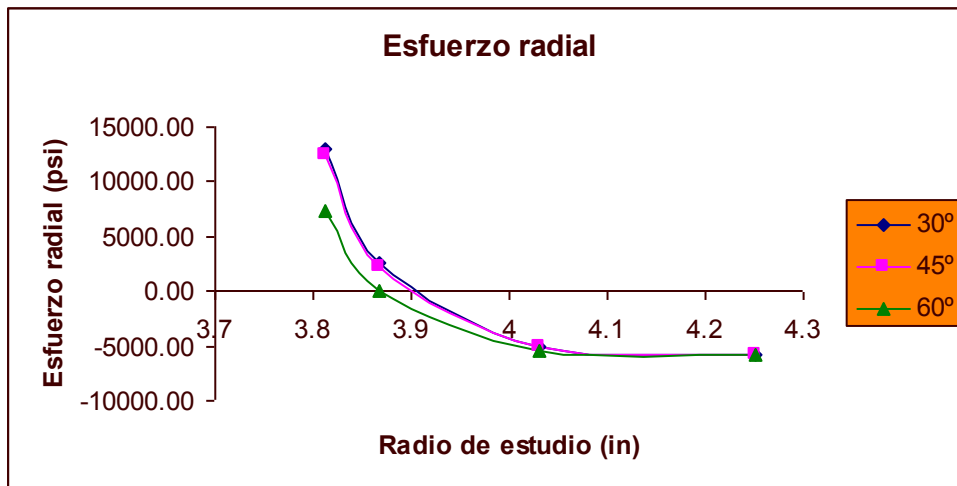


Figura 14: Esfuerzo de radial para el cemento, presión externa variable. Sin presión interna en casing.

#### 4.4.1.2 Con presión de lodo

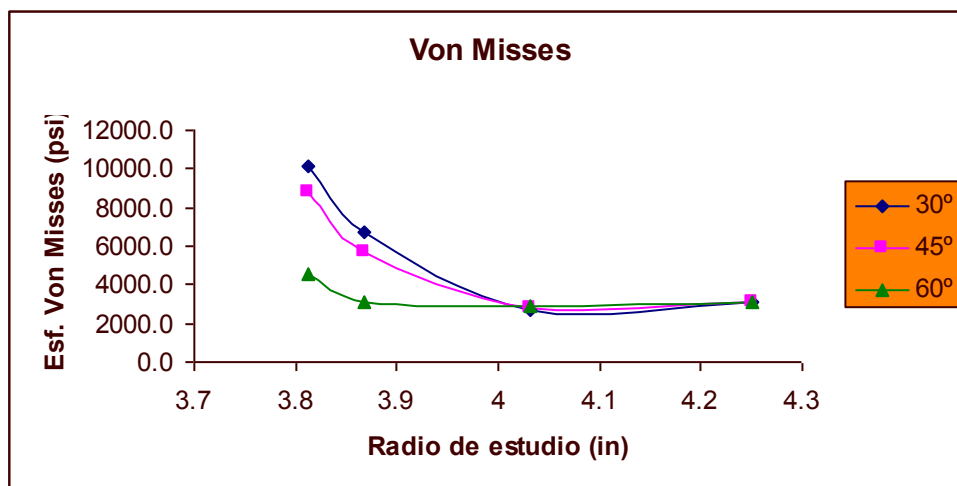


Figura 15: Esfuerzo de Von Mises para el cemento, presión externa variable. Con presión interna en

Casing.

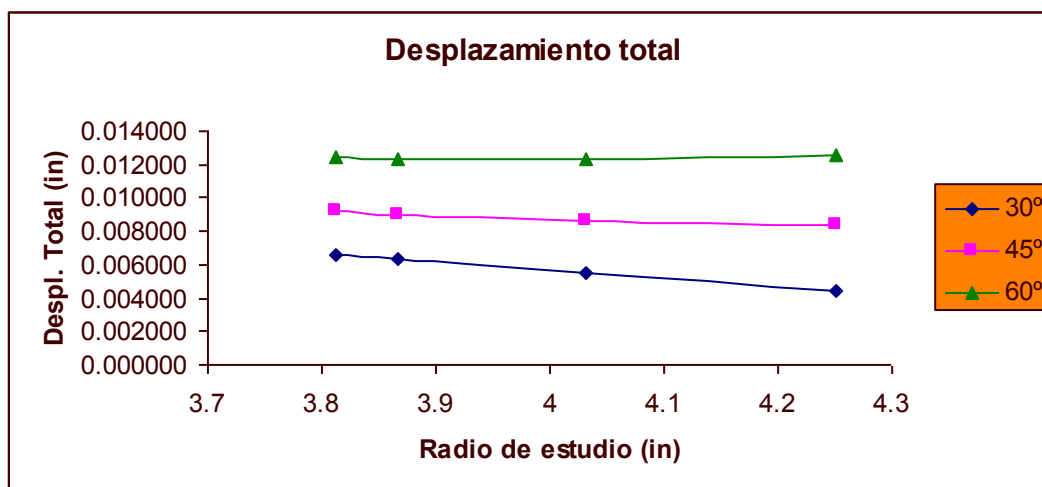


Figura 16: Desplazamiento total para el cemento, presión externa variable. Con presión interna en Casing.

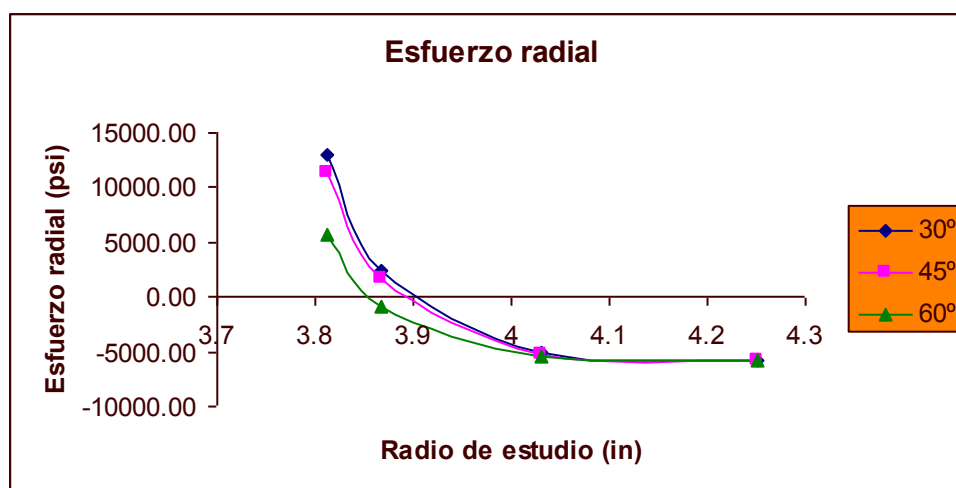


Figura 17: Esfuerzo radial para el cemento, presión externa variable. Con presión interna en casing.

#### 4.5 Material compuesto

Para este modelo realizado bajo el MEC, se consideró al conjunto de acero y cemento como si fuese un solo material, con módulo de Young y relación de Poisson específicamente calculado. Para la verificación de este modelo se utilizaron los resultados obtenidos en Nastran® para el conjunto completo. Pudiéndose observar que los valores del esfuerzo de Von Misses para la zona de contacto (interfaz) obtenidos en MEF se aproximaban en gran medida a los conseguidos para una zona geoméricamente equivalente - esto es, una fibra ubicada en la zona geoméricamente equivalente a la región de contacto entre el cemento y el acero - a los valores obtenidos en el MEC.

#### 4.5.1 Sin presión de lodo

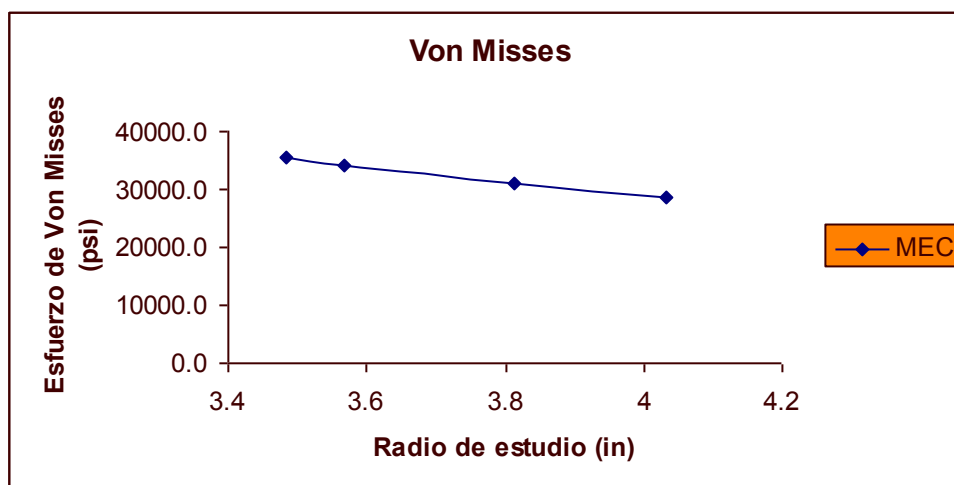


Figura 18: Esfuerzo de Von Mises para el material compuesto, presión externa constante. Sin presión interna en Casing.

#### 4.5.2 Con presión de lodo

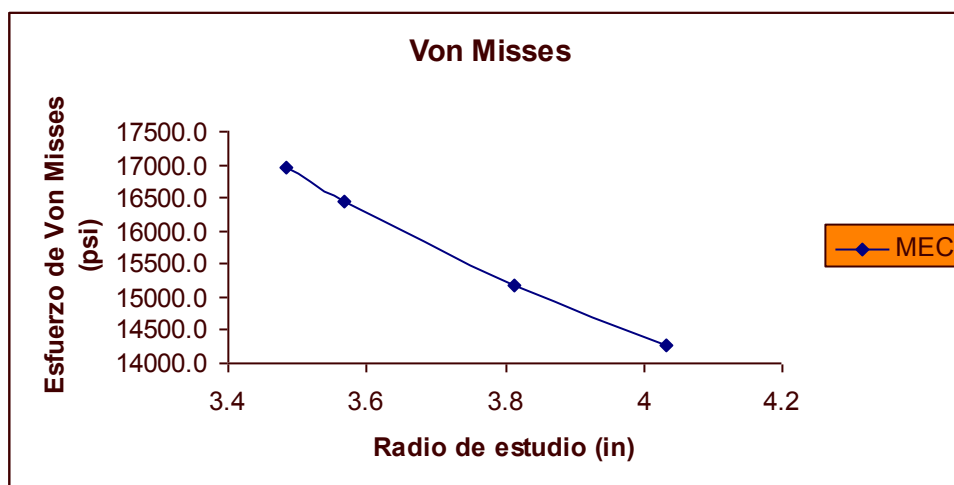


Figura 20: Esfuerzo de Von Mises para el material compuesto, presión externa constante. Con presión interna en Casing.

#### 4.6 Desplazamientos de los modelos

Debido a que los gráficos de deformaciones no son reales sino por el contrario se encuentran a escala, los efectos de la presión interna no son apreciables. En vista de ello se mostrarán solo dos gráficos representativos de lo que sucede con los modelos de presión externa constante y variable para el cilindro completo. En ambas gráficas las curvas negras representan la geometría original y las rojas la geometría deformada.

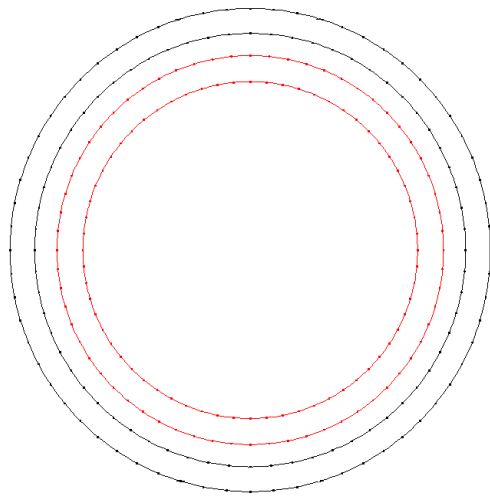


Figura 21: Deformación a causa de la presión constante.

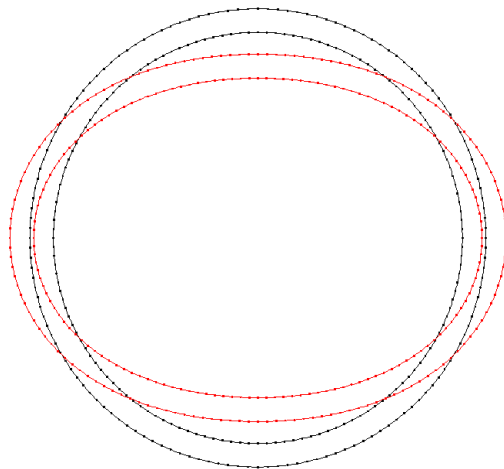


Figura 22. Deformación a causa de la presión variable.

## 5 CONCLUSIONES

- Se puede modelar, de manera satisfactoria, el estado general de esfuerzos al que está sometido el cemento de un pozo petrolero utilizando el método de elementos de contorno, inclusive si el programa usado está limitado a un solo tipo de material.
- El modelo más utilizado para determinar los esfuerzos en pozos petroleros es similar al planteado en este trabajo., con la diferencia que, por lo general, no se plantean la aplicación de cargas externas variables
- El modelo de material combinado usado en el MEC es una buena aproximación de lo que ocurre en la interfaz del modelo real a nivel del esfuerzo de Von Mises, mas no así para los desplazamientos.
- Los esfuerzos *in situ* se transmiten casi en su totalidad al acero, lo que implica que el cemento cumple la función de apoyo y aislante.
- Los puntos críticos en el cemento están ubicados en las fibras más cercanas a la interfaz o zona de contacto, incluyendo la misma, ahí el cemento sufre los mayores niveles de esfuerzos, lo que puede producir que este pierda adherencia con el casing o inclusive fracturarse.
- Es importante controlar la presión del lodo dentro del pozo, ya que una sobrepresión muy grande puede provocar la ruptura del cemento
- Los esfuerzos y desplazamientos en el cemento pueden ser obtenidos mediante el método de separación (cemento, casing y combinado), planteado en este trabajo.
- La tendencia del hoyo a tomar forma ovalada en el modelo de carga variable coincide con estudios realizados que indican que el cemento tiende a fallar en la dirección del esfuerzo horizontal mínimo, por lo que este modelo de carga sería el más adecuado para la realización de estudios geomecánicos

## REFERENCES

- Rodríguez, W. J., et al. "Simulation of Collapse Loads on Cemented Casing Using Finite Element Analysis", Society of Petroleum Engineers, SPE 84566, 1-9, (2003)
- Shackelford, James F. "Ciencia de materiales para ingenieros". México, Prentice Hall hispanoamericana, S. A, (1992).
- Barroso, Segundo e Ibáñez, Joaquín. "Introducción al conocimiento de materiales", Madrid, Universidad de Educación a Distancia, (1996).
- Marcano, Alexander (2001). "Estudio del Campo de Esfuerzos In-Situ utilizando Fallas observadas en Pozos Petroleros", Trabajo Especial de Grado, Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Mecánica, (2001)
- Sifontes, Carlos. "Cálculo de Esfuerzos Mecánicos en el Sistema Tubería/Cemento/Formación de Pozos Petroleros Mediante Simulación Numérica". Trabajo Especial de Grado, Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre, Departamento de Ingeniería Mecánica, Caracas, Venezuela, (2001).
- Brebbia, C. A. y Domínguez, J. "Boundary Elements. An introductory course", Southampton, M<sup>c</sup>Graw-Hill, (1989)
- Beer, G y Watson, J. O. (1992). "Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers", West Sussex, John Wiley & Sons Ltd, (1992).

## ANEXO A

### A.1 Teoría de materiales compuestos

Los materiales compuestos son aquellos que incluyen una combinación de dos o más materiales como metales, cerámicas y polímeros (Barroso e Ibáñez, (1996)). Existen tres tipos básicos:

- Compuesto artificial reforzado con fibras, en este tipo de compuesto las fibras de refuerzo que se colocan dentro del material base o matriz pueden ser dispuestas de tres maneras: alineada en una sola dirección, cortada aleatoriamente o trenzada con la matriz. La configuración es seleccionada por el fabricante del material. El ejemplo típico de este tipo de compuesto es la fibra de vidrio.
- Compuesto reforzado con fibra natural, las fibras están dentro de la matriz por la misma naturaleza del material, un ejemplo de esto es la madera.
- Compuesto aglomerado, la matriz está reforzada por partículas en lugar de fibras, el ejemplo más representativo es el concreto.

En este trabajo, en particular, se estudiará el conjunto cemento-casing como un material reforzado con fibras de dirección paralela a la matriz.

Para el caso de materiales compuestos es lógico pensar que sus propiedades vienen dadas por una especie de promedio de sus componentes individuales, aunque este promedio dependerá en gran medida de factores como la geometría microestructural o la dirección de las cargas aplicadas.

A continuación se mostrarán 2 casos idealizados, en el primero la carga es paralela a las fibras del compuesto y en el segundo la carga será perpendicular.

### A.2 Carga paralela a las fibras de esfuerzo

En la figura A-1.1, se muestra la forma de la carga. Si la matriz y la fibra de refuerzo están muy bien enlazadas, entonces la deformación de ambos compuestos debe ser la misma. Esta condición de isodeformación es cierta, aunque el módulo elástico de cada material tendiera a ser muy diferente, en otras palabras:

$$\varepsilon_A = \frac{\sigma_A}{E_A} = \varepsilon_B = \frac{\sigma_B}{E_B} = \varepsilon_C = \frac{\sigma_C}{E_C} \quad (\text{A-1.1})$$



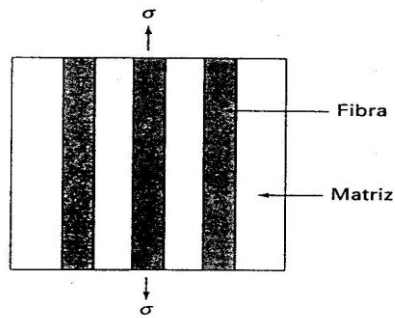


Figura: A-1.1 Carga paralela a las fibras de esfuerzo.

donde C representa al material compuesto por los elementos A y B.

Además, la carga que es llevada por el compuesto es la suma simple de las cargas que lleva cada componente:

$$P_C = P_A + P_B \quad (\text{A-1.2})$$

Recordando que el esfuerzo se define como carga dividido entre área, se llega a lo siguiente:

$$\sigma_C A_C = \sigma_A A_A + \sigma_B A_B \quad (\text{A-1.3})$$

Combinando las ecuaciones 6.1 y 6.3 (deformación y esfuerzo), se obtiene lo siguiente:

$$E_C \varepsilon_C A_C = E_A \varepsilon_A A_A + E_B \varepsilon_B A_B \quad (\text{A-1.4})$$

Simplificando, y dividiendo ambos lados de la ecuación por  $A_C$ :

$$E_C = E_A \frac{A_A}{A_C} + E_B \frac{A_B}{A_C} \quad (\text{A-1.5})$$

Para el caso de un cilindro, la fracción de áreas es igual a la fracción de volumen, es decir:

$$E_C = E_{\parallel} = E_A v_A + E_B v_B \quad (\text{A-1.6})$$

donde  $v_A$  y  $v_B$  son las fracciones volumétricas de los materiales A y B, respectivamente.

Con un estudio similar se puede llegar a la relación de Poisson para este tipo de carga:

$$v_C = v_{\parallel} = v_A v_A + v_B v_B \quad (\text{A-1.7})$$

Carga perpendicular a las fibras de esfuerzo

En la figura A-1.2, se muestra la forma de la carga. En este caso, la tensión soportada por la matriz y las fibras es la misma, e igual a la tensión aplicada  $\sigma$ . Sin embargo la deformación del compuesto,  $\varepsilon_C$ , será la media ponderada de las deformaciones de las fibras y la matriz por lo que, aplicando lo anterior (teoría de las mezclas), se obtiene:

$$\varepsilon_C = \varepsilon_A v_A + \varepsilon_B v_B \quad (\text{A-1.8})$$

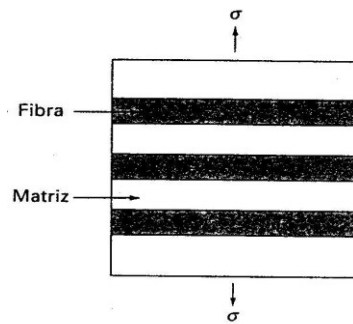


Figura: A-1.2 Carga perpendicular a las fibras de esfuerzo.

Dividiendo ambos lados de la ecuación por la tensión y simplificando se obtiene:

$$\frac{1}{E_C} = \frac{\nu_A}{E_A} + \frac{\nu_B}{E_B} \quad (\text{A-1.9})$$

O lo que es lo mismo:

$$E_C = E_{\perp} = \frac{E_A E_B}{E_A \nu_B + E_B \nu_A} \quad (\text{A-1.10})$$

La relación de Poisson para este tipo de carga viene dada por:

$$\nu_{\perp} = \nu_{\parallel} \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} \quad (\text{A-1.11})$$

Una vez aclarados estos puntos, se procederá al cálculo del módulo de Young y la relación de Poisson para el material compuesto.

Material A: Acero

Material B: Cemento

$E_A$ :  $30 \times 10^6$  psi

$E_B$ :  $2 \times 10^6$  psi

$\nu_A$ : 0,3

$\nu_B$ : 0,22

$D_{eA}$ : 7,625 in

$D_{iA}$ : 6,969 in

$D_{eB}$ : 8,5 in

$D_{iB}$ : 7,625 in

Recordando que:

$$A = \pi * \frac{(D_e^2 - D_i^2)}{4} \quad (\text{A-1.12})$$

Entonces:

$A_A = 7,5191$

$A_B = 11,0815$

$A_T = 18,6006$

Sustituyendo todos estos valores en las ecuaciones A-1.6, A-1.7, A-1.10 y A-1.11 se obtienen los siguientes resultados:

$$E_{\parallel} = 13,3 \times 10^6 \text{ psi (91,7 GPa)}$$

$$E_{\perp} = 3,21 \times 10^6 \text{ psi (22,1 GPa)}$$

$$\nu_{\parallel} = 0,25$$

$$\nu_{\perp} = 6,09 \times 10^{-2}$$

Los valores usados son los perpendiculares ( $\perp$ ) debido al tipo de carga.