

## **VALIDACIÓN DEL MODELADOR COMPUTACIONAL DE BANDAS FINITAS “BAFIN 1.0” UTILIZANDO LOS PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS ANSYS® Y SAP 2000®, APLICADO A UN PROBLEMA DE PUENTE DE SECCIÓN CAJON RECTO**

**Pallares M. Myriam Rocío<sup>a</sup>, Rodríguez C. Wilson<sup>b</sup>, Pulecio D. Julián Andrés<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>Grupo de Investigación y Desarrollo en Simulación, Carrera 9 No. 51 – 11, Facultad de Ingeniería Civil. Universidad Santo Tomás, Bogotá D.C, Colombia, [myriampallares@usantotomas.edu.co](mailto:myriampallares@usantotomas.edu.co)

<sup>b</sup>Centro de investigación en Modelación Numérica y Desarrollo de Software CAE, Carrera 2 No. 10 - 70, Programa de Ingeniería Civil, Universidad de La Salle, Bogotá D.C, Colombia, [wrodriguez@unisalle.edu.co](mailto:wrodriguez@unisalle.edu.co)

**Palabras claves:** Método de banda finita “MBF”, placas, puente viga cajón recto, BaFin 1.0, Sap 2000®, ANSYS®.

**Resumen.** En este artículo se presenta la formulación y los resultados de la implementación del método de bandas finitas “MBF” para el análisis de un puente de sección cajón recto mediante el modelador computacional GiD® BaFin 1.0 y su validación mediante la modelación por el método de los elementos finitos “MEF” en ANSYS® y Sap 2000®. El artículo resalta la superioridad computacional del MBF para reducir un problema estructural tridimensional a una representación pseudobidimensional, donde el comportamiento transversal del puente se modela por el MEF y el comportamiento longitudinal de la misma se calcula mediante series de Fourier, por otra parte, La validación permitió corroborar las bondades del método, la ventaja que significa desarrollar herramientas propias de cálculo numérico en el escenario latinoamericano, la competitividad del método de cálculo implementado en computador en términos de costo computacional frente al MEF a pesar de ser este último la herramienta más utilizada en la actualidad y, la verificación de la superioridad en términos de tamaño y dimensión.

## 1 INTRODUCCIÓN

El método de la banda finita se conoce como una técnica unificada para el análisis de estructuras prismáticas (propiedades geométricas constantes a lo largo de una dirección), entre las que se pueden citar las placas, puentes rectos y curvos de sección celular, láminas y láminas de revolución, que en general, conservan una sección transversal constante a lo largo de su longitud recta o curva. Una solución por banda finita de una estructura prismática se logra combinando una formulación de elementos finitos para caracterizar el comportamiento transversal y desarrollos en serie de Fourier para el comportamiento longitudinal; sin embargo, es posible usar otro tipo de interpoladores para la aproximación del comportamiento longitudinal (BSplines por ejemplo). No obstante, se ha empleado la formulación básica de las series de Fourier, dado que esta proporciona un sistema desacoplado para los diferentes armónicos calculados. La ventaja fundamental del método es el ahorro de variables asociadas a la dirección longitudinal y consecuentemente la disminución del costo computacional respecto a una solución tridimensional clásica por elementos finitos. El procedimiento de combinación MEF-Series de Fourier se basa en la aproximación semianalítica de Kantorovich (1958). Una buena cantidad de investigadores han hecho aportes y estudios importantes del método entre los que están Grafton y Strome (1963), Wilson (1965), y Ahmad en láminas y sólidos de revolución (1968), Cheung (1968), Loo y Cusens en puentes y estructuras laminares (1978), Oñate y Suárez en diferentes estructuras laminares empleando la teoría de Reissner – Mindlin (1976, 1986), Zienkiewicz y Too (1972) expandieron el método al análisis de sólidos prismáticos bajo el nombre de método de prisma finito, entre otros. En este artículo se aplica el método de la banda finita (MBF) para determinar el comportamiento de un puente recto de sección cajón mixto en escala reducida. La validación del programa BaFin abre posibilidades para el uso de esta herramienta y de la técnica de bandas finitas en el análisis y evaluación de estructuras tan importantes para las obras viales como los puentes prismáticos de sección abierta o celular, en tipologías rectas.

## 2 SÍNTESIS DEL PROCESO DEL MÉTODO DE BANDAS FINITAS (MBF) EN PUENTE DE SECCIÓN CAJON RECTO

La Figura 1 muestra el diagrama de flujo del proceso del método adaptado a placas y puentes de sección cajón rectos. Estos pasos son empleados para el desarrollo matemático en el que se basa el código BaFin.

- |     |  |
|-----|--|
| (1) | Elección de la teoría básica.  |
| -   | Teoría de Reissner - Mindlin (placas y puentes de sección cajón)   |
| -   | Campos de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos   |
| -   | Energía potencial total de la estructura   |
| (2) | Combinación de elementos finitos y funciones armónicas   |
| -   | Discretización   |
| -   | Campo de movimientos para una banda  |
| -   | Desarrollo armónico de las cargas externas   |
| -   | Minimización de la energía potencial total   |
| -   | Desacoplamiento de las ecuaciones de rigidez   |
| -   | Ensamble y transformación de coordenadas (caso especial en puentes de sección cajón).                              |
| (3) | Implementación del elemento lineal en forma explícita  |
| (4) | Adaptación de un solucionador directo o iterativo para el sistema lineal de ecuaciones (LDLT, PCG, GMRES, u otros) |

Figura 1: Método de bandas finitas en puente de sección cajón recto

### 3 MARCO TEÓRICO GENERAL DEL MÉTODO DE BANDAS FINITAS (MBF) EN PUENTE DE SECCIÓN CAJON RECTO

En este ítem se muestra el estudio con banda finita aplicado al análisis de estructuras laminares prismáticas rectas. Este tipo de estructuras engloban la mayor parte de los puentes de sección celular más usuales. Por lo tanto, considerando solo el caso de bandas finitas planas, el comportamiento cinemático de la estructura se puede considerar como un conjunto de placas ensambladas (Figura 2). Para secciones transversales curvas se resuelve incrementando el número de bandas utilizadas en la discretización.

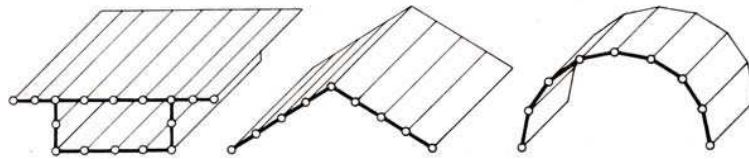


Figura 2: Estructuras laminares prismáticas discretizadas en bandas finitas de dos nodos. Fuente: Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos, análisis estático lineal, 1995.

En seguida se muestra una síntesis de la formulación básica de bandas finitas para láminas planas en puentes rectos, se sugiere si los lectores lo requieren abordar la teoría básica de bandas finitas para placas y algunos aspectos clásicos del método de elementos finitos y de la teoría de Reissner-Mindlin para placas (Oñate, 1995).

La primera etapa del método es dividir la estructura en bandas longitudinales como muestra la Figura 2. Siendo  $n$  el número de nodos de una banda y  $m$  el número de armónicos a desarrollar, el campo de movimientos locales dentro de la misma se escribe como:

$$a' = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n S^l N_i a_i^l \quad (1)$$

Indicando las primas (') vectores expresados en movimientos locales y el subíndice "0" que los desplazamientos corresponden al plano medio de la banda.

$$\begin{aligned} a' &= [u'_{oi}, v'_{oi}, w'_{oi}, \theta'_{x'}, \theta'_{y'}]^T \\ a_i^l &= [u^l_{oi}, v^l_{oi}, w^l_{oi}, \theta^l_{x'i}, \theta^l_{y'i}]^T \\ N_i &= N_i(x) \cdot I_5 \\ S^l &= \begin{bmatrix} S^l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S^l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^l \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

donde para el caso simplemente apoyado se tiene:

$$\begin{aligned} S^l &= \text{sen}(\lambda \cdot y) \\ C^l &= \text{cos}(\lambda \cdot y) \end{aligned} \quad (3)$$

Estas son las mismas funciones armónicas que se consideran en el caso de placas. Esto en

la práctica equivale a que la formulación es válida para estructuras laminares rectas con extremos apoyados y secciones de apoyo rigidizadas en su plano (diafragma rígido). Esta característica es usual en puentes de sección celular. Las deformaciones generalizadas locales y los esfuerzos generalizados locales en una banda se obtienen sustituyendo (1) en las expresiones de  $\hat{\varepsilon}'$  y  $\hat{\sigma}'$  clásicas para láminas:

$$\hat{\varepsilon}' = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \hat{S}^l B_i'^l a_i'^l \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}' = \hat{D}' \cdot \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \hat{S}^l B_i'^l a_i'^l \quad (5)$$

Donde:  $D'$  es la matriz constitutiva y  $B_i'^l$  la matriz de deformaciones generalizadas locales, del nodo  $i$  para el armónico  $l$ , que se escribe como:

$$B_i'^l = \left\{ \begin{array}{l} B_{mi}'^l \\ B_{fi}'^l \\ B_{ci}'^l \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} B_{mi}'^l = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda N_i & 0 & 0 & 0 \\ \lambda N_i & \frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_{fi}'^l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda N_i \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda N_i & -\frac{\partial N_i}{\partial x'} \end{bmatrix} \\ B_{ci}'^l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x'} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda N_i & 0 & -N_i \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (6)$$

Los subíndices  $m$ ,  $f$  y  $c$  corresponden a los efectos de membrana o axiles, flexión y cortante respectivamente, presentes en elementos de lámina. Finalmente la matriz  $S^l$  tiene la forma:

$$\hat{S}^l = \begin{bmatrix} S_m^l & 0 & 0 \\ 0 & S_f^l & 0 \\ 0 & 0 & S_c^l \end{bmatrix} \quad S_m^l = S_f^l = \begin{bmatrix} S^l & 0 & 0 \\ 0 & S^l & 0 \\ 0 & 0 & C^l \end{bmatrix} \quad S_c^l = \begin{bmatrix} S^l & 0 \\ 0 & C^l \end{bmatrix} \quad (7)$$

Con

$$S^l = \text{sen}(\lambda \cdot y) \quad C^l = \text{cos}(\lambda \cdot y) \\ \lambda = \frac{l \cdot \pi}{b} \quad (8)$$

Sustituyendo (1), (4) y (5) en la expresión de la energía potencial total de la estructura y minimizando ésta con respecto a las amplitudes de los movimientos nodales  $a_i'^l$  se obtiene:

$$\frac{\partial \Pi(\cdot)}{\partial a_i'^l} = 0 \Rightarrow K \cdot a = f \quad (9)$$

La matriz de rigidez de la estructura para el armónico 1 se forma ensamblando las diferentes matrices de rigidez de cada banda, que en ejes locales se obtiene por:

$$[K_{ij}^{lm}]^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} (\hat{S}^l(y)B_i^l(x))^T \cdot \hat{D}' \cdot \hat{S}^m(y)B_j^m(x) dA \quad (10)$$

Tras hacer uso de las propiedades ortogonales de las funciones armónicas utilizadas, el sistema de ecuaciones (9) queda desacoplado y la matriz de rigidez se escribe como:

$$[K_{ij}^{ll}]^{(e)} = \frac{b}{2} \int_{a^{(e)}} [B_i^l]^T \cdot \hat{D}' \cdot B_j^l dx \quad (11)$$

Para el ensamblaje de la matriz de rigidez se debe tener todos los desplazamientos expresados en un sistema global de coordenadas. Para ello se escogen ejes globales convenientes de forma que la transformación, para estructuras prismáticas, sea la más simple posible y dependa solamente de la dirección del ángulo que forman las direcciones  $x'$  local,  $y$ ,  $x$  global. Entonces, para una estructura laminar prismática, los sistemas de referencia escogidos son los que se muestran en la Figura 3.

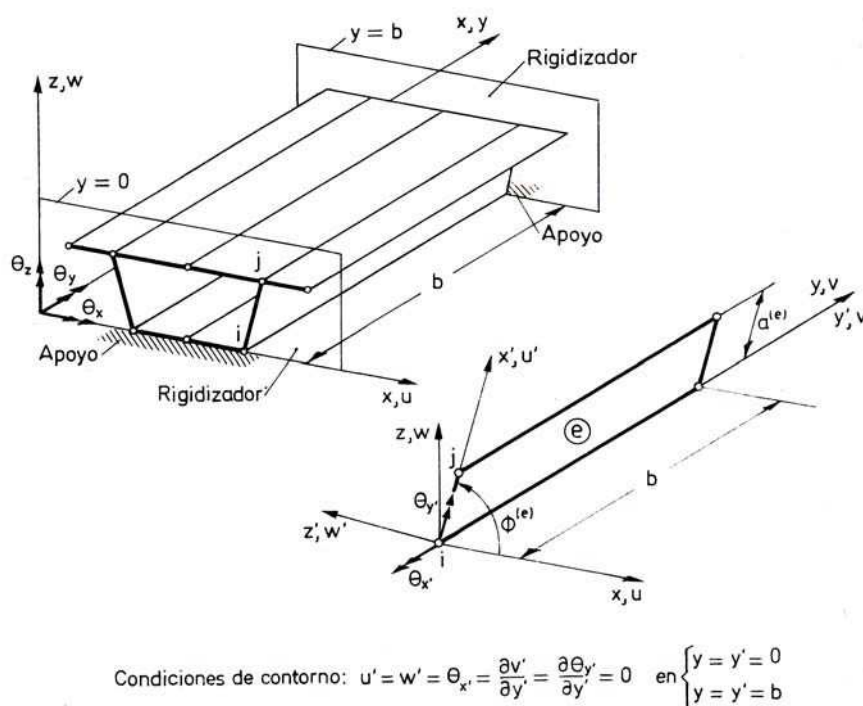


Figura 3: Ejes globales y locales y condiciones de contorno en las secciones extremas de un puente cajón. Discretización en bandas finitas de dos nodos. Fuente: Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos, análisis estático lineal, 1995.

Así la transformación de movimientos nodales se escribe como:

$$a_i'^l = L_i^{(e)} a_i^l \quad (12)$$

Donde

$$a_i^l = [u_{oi}^l, v_{oi}^l, w_{oi}^l, \theta_{xi}^l, \theta_{yi}^l, \theta_{zi}^l]^T \quad (13)$$

es el vector de movimientos globales del nodo i para el armónico l, en el que los giros están definidos vectorialmente según los ejes globales x, y, z y  $L_i^{(e)}$  es la matriz de transformación

$$L_i^{(e)} = \begin{bmatrix} C & 0 & S & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -S & 0 & C & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & C & 0 & S \end{bmatrix} \quad (14)$$

Con

$$S = \text{sen}(\phi^{(e)}) \quad C = \text{cos}(\phi^{(e)}) \quad (15)$$

Siendo  $\phi^{(e)}$  el ángulo que la banda forma con el eje global x (Figura 3). Se observa que debido a este cambio de coordenadas un nuevo giro  $\theta_{zi}^l$  se introduce en el campo de desplazamientos.

La matriz de rigidez de la banda se obtiene en el sistema global por:

$$[K_{ij}^{ll}]_{6 \times 6}^{(e)} = [L_i^{(e)}]_{6 \times 5}^T [K'_{ij}{}^{ll}]_{5 \times 5}^{(e)} [L_j^{(e)}]_{5 \times 6} \quad (16)$$

Pero de una forma más práctica se añade previamente la matriz  $L_i^{(e)}$ , de cambio de coordenadas, a la matriz de deformación y se procede al cálculo de la matriz de rigidez así:

$$[K_{ij}^{ll}]_{6 \times 6}^{(e)} = \frac{b}{2} \int_{a^{(e)}} [B_i^{l'}]^T \cdot \hat{D}' \cdot B_i^{l'} dx' \quad (17)$$

Donde

$$B_i^l = B_i^{l'} \cdot L_i^{(e)} \quad dy' \cdot dx' = |J| \cdot dx \cdot dy \quad (18)$$

y el Jacobiano es

$$\left. \begin{array}{l} x' = x \cdot \text{cos}(\phi^{(e)}) + z \cdot \text{sen}(\phi^{(e)}) \\ y' = y \\ z' = -x \cdot \text{sen}(\phi^{(e)}) + z \cdot \text{cos}(\phi^{(e)}) \end{array} \right\} J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\phi^{(e)}) & 0 & -\text{sen}(\phi^{(e)}) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\phi^{(e)}) & 0 & \text{cos}(\phi^{(e)}) \end{bmatrix} \quad (19)$$

por lo tanto su determinante es:

$$|J| = \begin{vmatrix} \text{cos}(\phi^{(e)}) & 0 & -\text{sen}(\phi^{(e)}) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\phi^{(e)}) & 0 & \text{cos}(\phi^{(e)}) \end{vmatrix} = \text{cos}^2(\phi^{(e)}) + \text{sen}^2(\phi^{(e)}) = 1 \quad (20)$$

Nótese que por ser el elemento plano  $L_i^{(e)} = L_j^{(e)}$ , además la ecuación (12) se escribe de

manera idéntica para la transformación de fuerzas nodales globales a locales. Siendo este vector fuerzas debido a cargas repartidas y puntuales el que se muestra a continuación:

$$[f_i^l]^{(e)} = \frac{b}{2} \int_{a^{(e)}} N_i^T t^l dx' + \frac{b}{2} p_i^l \quad (21)$$

Donde  $t^l$  y  $p_i^l$  son los vectores de amplitudes de las cargas repartidas y puntuales, respectivamente, para el armónico  $l$ , expresados como:

$$t^l = \frac{2}{l\pi} \begin{Bmatrix} q_x (\cos(\lambda y_0) - \cos(\lambda y_1)) \\ q_y (\sin(\lambda y_1) - \sin(\lambda y_0)) \\ q_z (\cos(\lambda y_0) - \cos(\lambda y_1)) \\ m_x (\cos(\lambda y_0) - \cos(\lambda y_1)) \\ m_y (\sin(\lambda y_1) - \sin(\lambda y_0)) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad p_i^l = \frac{2}{b} \begin{Bmatrix} p_x \sin(\lambda y_i) \\ p_y \cos(\lambda y_i) \\ p_z \sin(\lambda y_i) \\ M_{\theta x} \sin(\lambda y_i) \\ M_{\theta y} \cos(\lambda y_i) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Estando todas las componentes referidas a ejes globales  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y siendo  $y_0$  e  $y_1$  los límites longitudinales de actuación de la carga repartida, y  $y_i$  la coordenada que define la posición longitudinal de la carga puntual sobre el nodo  $i$ .

Con el uso del elemento de banda lineal de dos nodos con integración reducida, se evita el bloqueo por membrana y se da sencillez a las expresiones de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas nodales. Ello permite una programación con un costo mínimo. Las expresiones que se derivan de esto se representan en la Figura 4.

$$[K'_{ij}]^{(e)} = \frac{ba^{(e)}}{2} [\bar{B}_i^l]^T \bar{D}' \bar{B}_j^l$$

( $\bar{\cdot}$ )  $\equiv$  Valores calculados en el centro de la banda.

$$\bar{B}_i^l = \begin{Bmatrix} \bar{B}_{mi}^l \\ \bar{B}_{fi}^l \\ \bar{B}_{ci}^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i C & 0 & A_i S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} C & A_i & \frac{\lambda}{2} S & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} C & 0 & \frac{\lambda}{2} S \\ 0 & 0 & 0 & -A_i C & \frac{\lambda}{2} & A_i S \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_i S & 0 & A_i C & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} S & 0 & \frac{\lambda}{2} C & -\frac{1}{2} C & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} S \end{bmatrix}$$

$$A_i = \frac{(-1)^i}{a^{(e)}} ; S = \text{sen}(\phi^{(e)}) ; C = \text{cos}(\phi^{(e)}) ; \lambda = \frac{l\pi}{b}$$

$$[f_i^l]^{(e)} = \frac{ba^{(e)}}{4} t^l + \frac{b}{2} p_i^l$$

Figura 4: Forma explícita de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales del elemento de banda de dos nodos en estructuras laminares prismáticas rectas. Fuente: Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos, análisis estático lineal, 1995.

Se puede observar que debido a la necesidad del cambio de coordenadas los grados de libertad de cada uno de los nodos aumentan de 5 a 6. La teoría de Reissner- Mindlin, para láminas con elementos planos, opera con 6 incógnitas por nodo.

Se tiene que decir, también, que el ensamblaje de las matrices de rigidez según el procedimiento anterior puede dar lugar a un sistema de ecuaciones singular en el caso de existir nodos coplanares. Esto se debe a la introducción del sexto grado de libertad, el giro en z, sin embargo, este inconveniente se evita aplicando una serie de procedimientos específicos, como ensamblaje selectivo en ejes locales o adición de una rigidez rotacional ficticia, o utilizando elementos de placa especiales. Estos temas se pueden consultar en (Oñate, 1995).

#### 4 IMPLEMENTACIÓN EN GID<sup>®</sup> BAFIN 1.0

El motor de cálculo BAFIN 1.0 es un ProblemType diseñado para GiD como objetivo de un proyecto de investigación conjunto entre los Grupos de Investigación: Centro de Investigación en Modelación Numérica y Desarrollo de Software CAE – CIMON de la Universidad de La Salle (Colombia) y el Grupo de investigación en Simulación Numérica (SICON) de la Universidad Santo Tomás (Colombia).

El proyecto consiste en el desarrollo de un software orientado al análisis de placas y puentes de sección cajón por el método de la banda finita. Para el desarrollo del sistema mencionado se usa la plataforma GID (Interfaz de pre y posproceso desarrollada por el Centro



internacional de Métodos Numéricos CIMNE, de la Universidad Politécnica de Cataluña) y en el desarrollo del motor de cálculo se emplea el lenguaje de programación de alto nivel como FORTRAN. La ventaja fundamental del sistema desarrollado es el ahorro de memoria de almacenamiento y la disminución de los tiempos de cálculo, lo cual permite el análisis de modelos estructurales relativamente robustos en tiempos razonables y muy competitivos, por tanto, se mejora la calidad del análisis de soluciones y la toma de decisiones de diseño.

El programa GiD realiza las actividades de pre y posproceso, sin embargo, cuando se desarrolla el motor de cálculo es necesario generar una interface adaptada al problema particular que soluciona dicho motor. Este proceso se hace a través del desarrollo de seis archivos que se describen brevemente a continuación:

- Bafin.prb: Provee la ventana para la carga de información de parámetros generales del problema (Figura 5).
- Bafin.cnd: este informa a GiD sobre las condiciones impuestas al modelo (en líneas o puntos): Desplazamientos y cargas (Figura 6).
- Bafin.mat: este archivo se encarga de proveer información sobre las propiedades físicas de los materiales y algunas propiedades geométricas de las bandas empleadas (Módulo de elasticidad, Relación de Poisson, Espesor, Longitud de la banda) (Figura 7).
- Bafin.bas: provee el formato de datos del archivo que será creado para intercambiar información entre GiD y el código desarrollado.
- Bafin.bat: se encarga de lanzar el módulo de cálculo. La opción en GiD "Calculate" ejecuta este archivo.
- Bafin.exe: este es el ejecutable del motor de cálculo desarrollado en FORTRAN (resuelve el problema estructural por el método de bandas finitas)

Uno de los valores agregados de la plataforma GiD es la posibilidad de desarrollar adaptaciones particulares de motores de cálculo para analizar o diseñar problemas específicos en diferentes campos de la ingeniería. GiD cuenta con una estructura propia para el desarrollo de interfaces y existe una comunidad creciente de desarrolladores a nivel mundial.

Solo se muestran las ventanas de ejecución de algunos de los archivos de la interface (Bafin.prb, Bafin.cnd, Bafin.mat), dado que, Bafin.bas, Bafin.bat y Bafin.exe son archivos de comandos (los dos primeros) y el ejecutable del motor de cálculo.

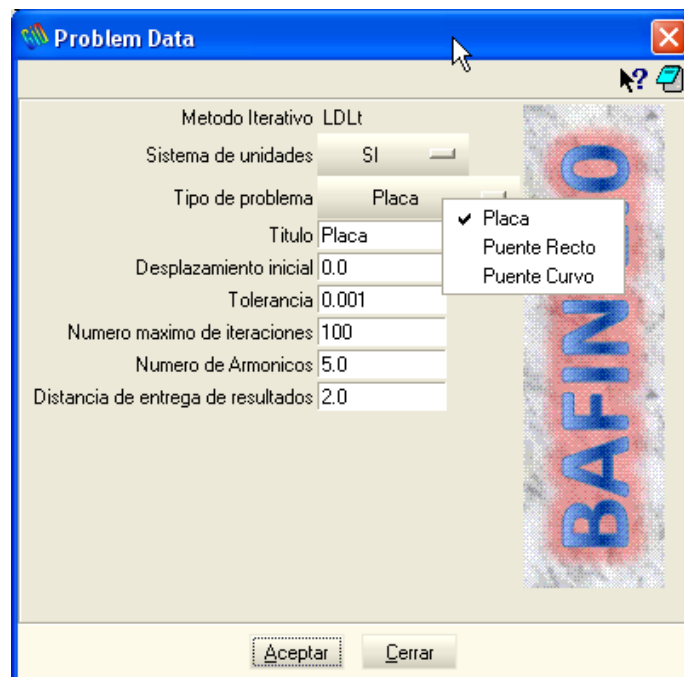


Figura 5: Ventana generada por Bafin.prb en GiD. (Ruta: Data ---> Problem Data). Fuente: Autores.



Figura 6: Ventanas generadas por Bafin.cnd en GiD. (Ruta: Data ---> Conditions). Fuente: Autores.

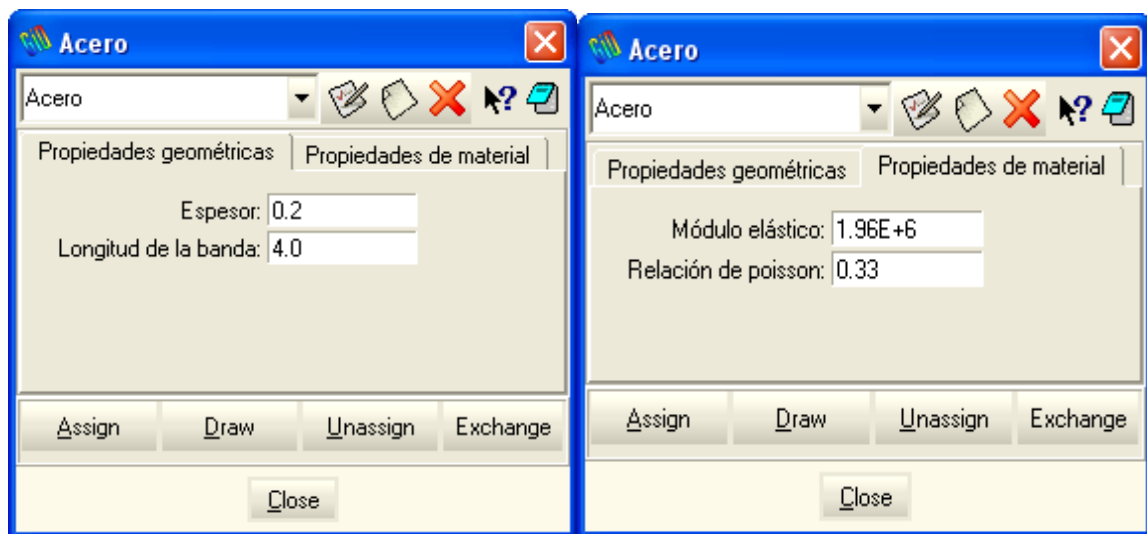


Figura 7: Ventanas generadas por Bafin.mat en GiD. (Ruta: Data ---> Materials). Fuente: Autores.

Lo anterior respecto a la interfaz gráfica, por otra parte, el motor está hecho de 8 subrutinas básicas, que se apoyan en otras subrutinas que desarrollan operaciones del método que tienen carácter repetitivo, como el cálculo de matrices de rigidez elementales para cada armónico, el cálculo de vectores de fuerza para cada armónico, entre otros. La primera subrutina lee el archivo de datos “\*.dat”. De la segunda hasta la sexta subrutina se ejecuta un ciclo controlado por el armónico  $l$  hasta el número máximo de armónicos especificados por el usuario. La segunda subrutina arma el sistema de ecuaciones lineales a solucionar para hallar los desplazamiento nodales para el armónico  $l$ . La tercera soluciona el sistema ensamblado para el armónico  $l$  empleando el método directo de factorización LDLt adaptado al sistema (los desarrolladores usan este solucionador por su disponibilidad y adaptación a matrices simétricas, sin embargo, planean incorporar otros solucionadores, principalmente iterativos). La cuarta y quinta subrutina se encargan de calcular y sumar el vector de curvaturas para cada armónico. La sexta acumula los desplazamiento nodales para el armónico  $l$ , para obtener la solución final de desplazamiento en la longitud media de la banda, en esta subrutina se cierra el bucle de armónicos. La séptima subrutina calcula los esfuerzos generalizados (momentos y cortantes) en una sección transversal de interés ubicada por el usuario en la sección de datos básicos del problema (Bafin.prb). Finalmente, la octava subrutina genera el archivo de resultados “\*.flavia.res”. Los valores de desplazamientos y esfuerzos generalizados que GiD usa para ejecutar la fase de posproceso son obtenidos de este archivo. En la figura 8 se muestra un pseudocódigo que resume el proceso ejecutado dentro de Bafin 1.0.

	Declaración de variables
(1)	Lectura de datos del archivo *.dat (Este archivo es generado por GiD, a través de la interface desarrollada para Bafin)
do	ll= 1, número de armónicos
(2)	Ensamble del sistema de ecuaciones lineales a solucionar para hallar los desplazamiento nodales para el armónico ll
(3)	Solución del sistema ensamblado para el armónico ll empleando el método directo de factorización LDL <sup>t</sup> adaptado al sistema.
(4)	Cálculo del vector de curvaturas para el armónico ll
(5)	Acumulación del vector de curvaturas calculado en (4)
(6)	Acumulación de los los desplazamiento nodales para el armónico ll calculados en (3)
Enddo	
(7)	Cálculo de esfuerzos generalizados en la sección especificada por el usuario.
(8)	Escritura de resultados en el archivo *.flavia.res
	END

Figura 8: Pseudocódigo de Bafin 1.0.Fuente: Autores.

Para el uso del programa se recurre al menú Data del Top Menú de GiD, al recorrer las opciones se encuentra el menú Problem Type, donde se incorpora la opción Bafin que corresponde a la interface y el motor de cálculo puestos al servicio de GiD para la solución de problemas de placas y puentes celulares por el método de bandas finitas. En la Figura 9 se muestra el menú recorrido para la activación de Bafin 1.0 dentro de GiD.

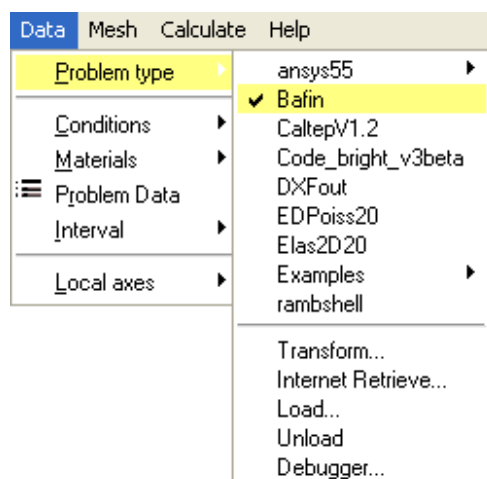


Figura 9: Menú recorrido para la activación de Bafin 1.0 en GiD. Fuente: Autores.

## 5 RESULTADOS, POSPROCESO Y VERIFICACIÓN USANDO LOS PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS (MEF) ANSYS® Y SAP 2000®

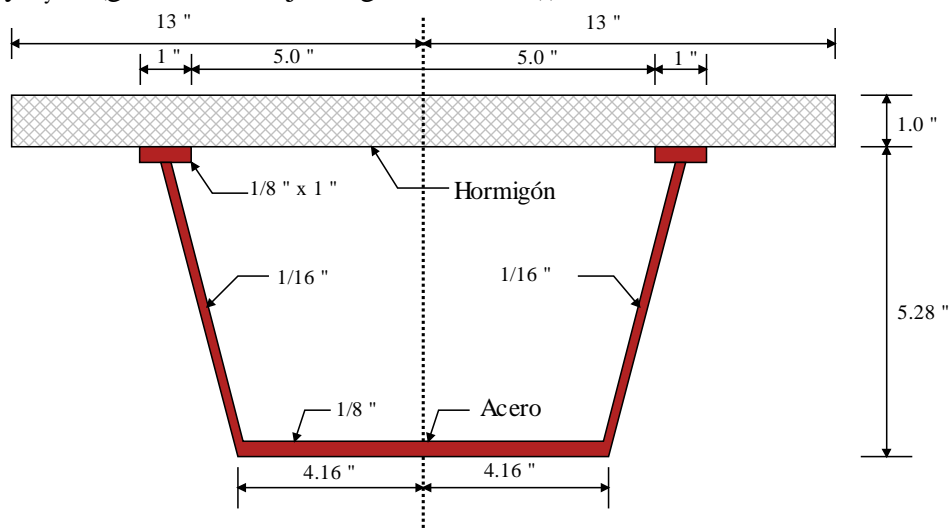
El caso analizado introduce una aplicación hacia puentes de sección cajón competitivos en infraestructura vial, dadas las propiedades geométricas favorables propias de la sección cerrada. Se realizan comprobaciones con los programas ANSYS, SAP2000 y BaFin. Esta prueba es fundamental para la validación de la formulación de bandas finitas tratada en el ítem

3 y abre la posibilidad de usar la opción de BaFin programada para puentes de estas características.

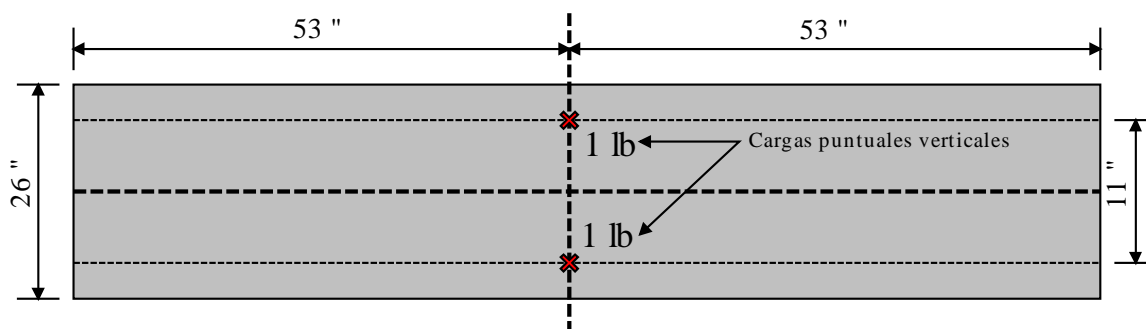
La competitividad de BaFin en puentes de sección cajón se hace evidente en cuanto a la simplificación del modelo desde el punto de vista geométrico y en la cantidad de cálculo necesario para el análisis. En términos productivos el análisis facilita la disposición rápida de fuerzas internas que permitan dar celeridad al inicio de la etapa de diseño y posterior construcción.

El caso analizado consiste en el análisis de un puente en cajón construido a escala reducida, donde se realizan mediciones experimentales que se reportan en la comparación final. Autores como Loo y Cusens y Coul y Das, realizaron pruebas experimentales en sección reducida como parte de sus investigaciones en puentes de sección cajón rectos y curvos. Los datos del modelo en unidades inglesas son los siguientes: Módulo de Elasticidad del acero: 30000 lib/in<sup>2</sup>, Relación de Poisson del acero: 0.300, Módulo de Elasticidad del hormigón: 2690 lib/in<sup>2</sup> y Relación de Poisson del hormigón: 0.157.

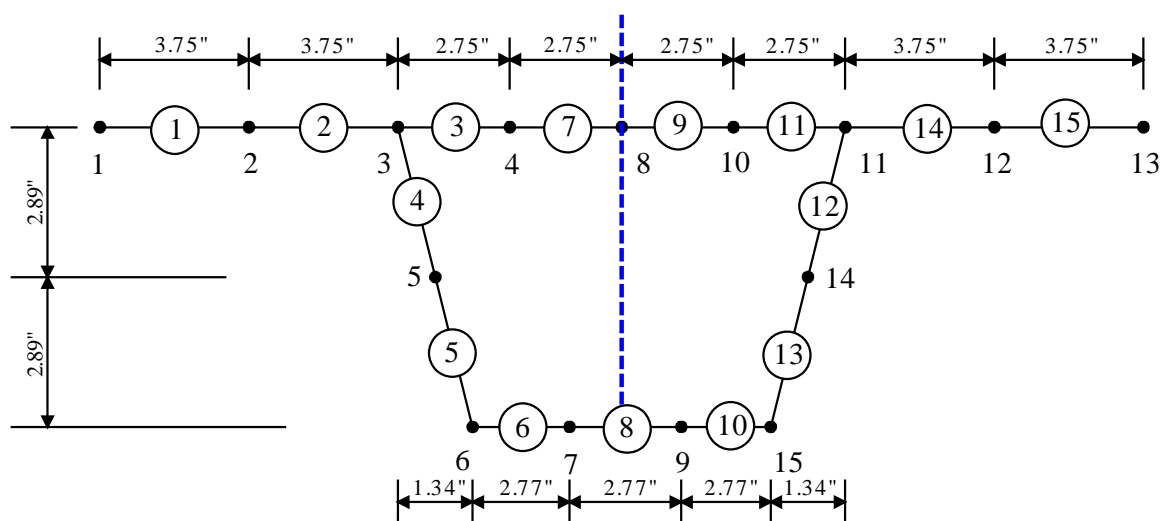
Los datos geométricos, las condiciones de carga y la discretización se muestran en la Figura 10. Las condiciones de frontera son simplemente apoyadas en los extremos ( $u_x=u_y=u_z=0$ , y  $\theta_y=0$  (giro sobre el eje longitudinal nulo)).



a) Sección transversal



b) Planta del puente



c) Idealización en bandas finitas

Figura 10: Modelo geométrico, discretización y condiciones de carga del modelo del puente de sección cajón mixto. Fuente: Autores.

### 5.1 Implementación del modelo de puente recto de sección cajón en ANSYS

Para este modelo se emplea una discretización de elementos finitos cualitativamente similar a la empleada en la idealización de bandas finitas (Figura 10c), esto para tener cierta similitud en cuanto a la forma como se crean las mallas en los dos modelos.

Las Figuras 11, 12 y 13 muestran aspectos del modelo construido como la discretización, condiciones de apoyo, ejes locales de los elementos y cargas aplicadas.

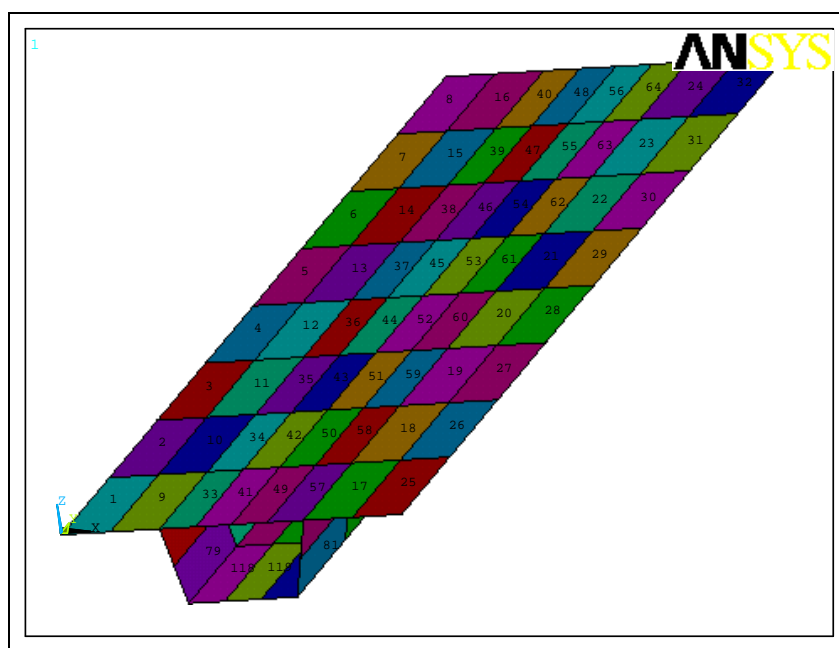


Figura 11: Discretización del modelo del puente de sección cajón mixto en ANSYS. Fuente: Autores.

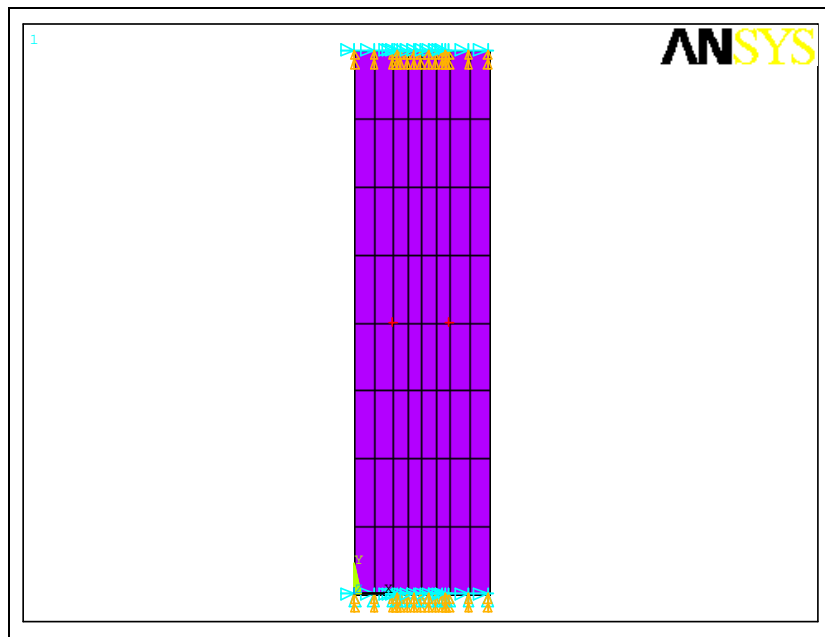


Figura 12: Condiciones de apoyo y carga para el modelo del puente de sección cajón mixto en ANSYS. Fuente: Autores.

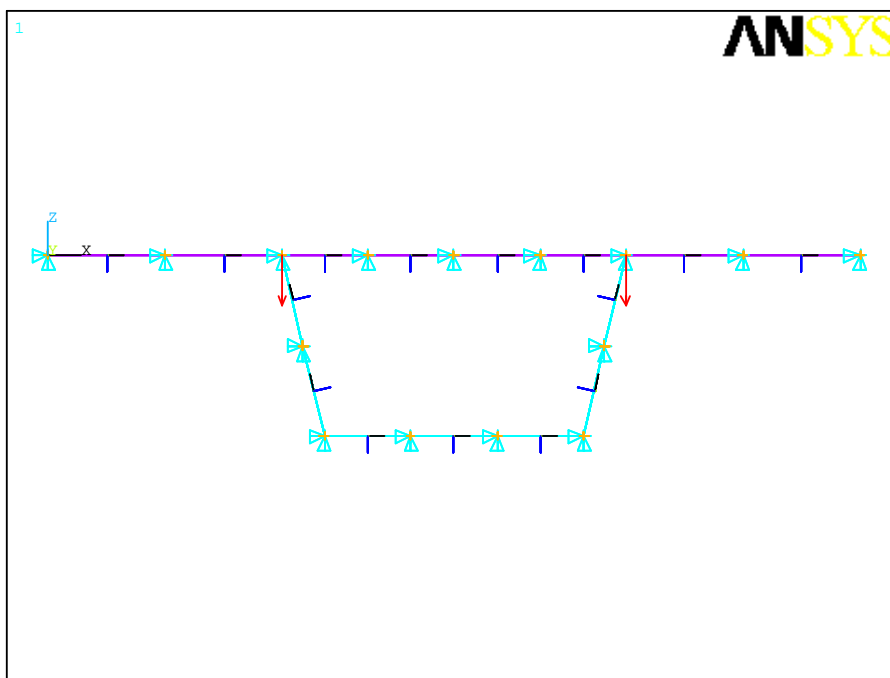


Figura 13. Detalle de ejes locales de los elementos y carga aplicada al modelo del puente de sección cajón mixto en ANSYS. Fuente: Autores.

Las Figuras 14 y 15 muestran la solución en ANSYS (deflexión  $z$  y esfuerzo de membrana generalizado en  $y$  o axil longitudinal) del modelo del puente.

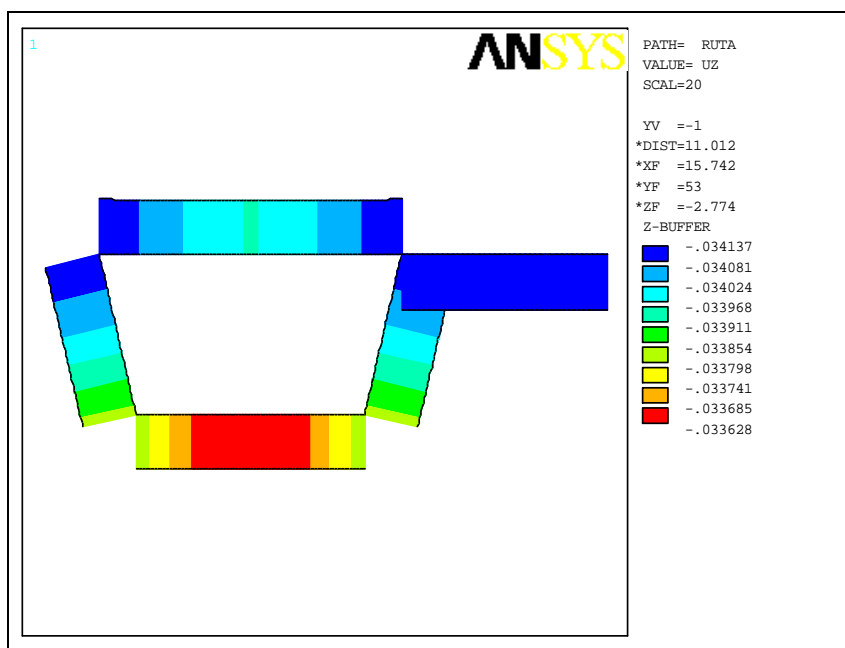


Figura 14: Diagrama de deflexión z (in) en la sección central del puente de sección cajón mixto en ANSYS. Fuente: Autores.

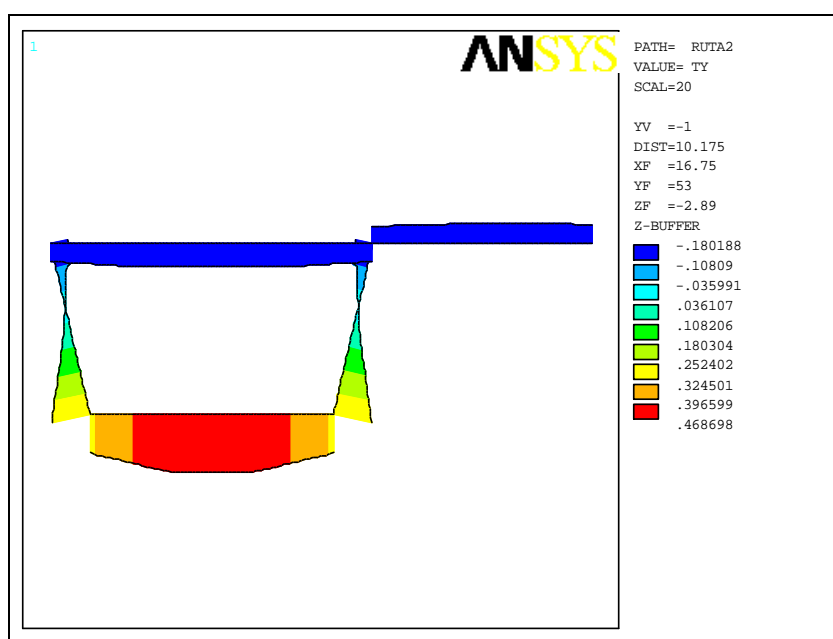


Figura 15: Gráfica de axil longitudinal (lib-in/in) en la sección central del puente de sección cajón mixto en ANSYS. Fuente: Autores.

A continuación se muestran gráficas de isocontornos adicionales que ilustran los desplazamientos verticales y los axiles longitudinales de manera global en el modelo. Puede verse que de la gráfica de axil longitudinal puede deducirse el comportamiento esperado en la sección central, como es tensión en la lámina inferior y compresión en la losa de concreto, y lógicamente tensión y compresión en las láminas oblicuas de unión.



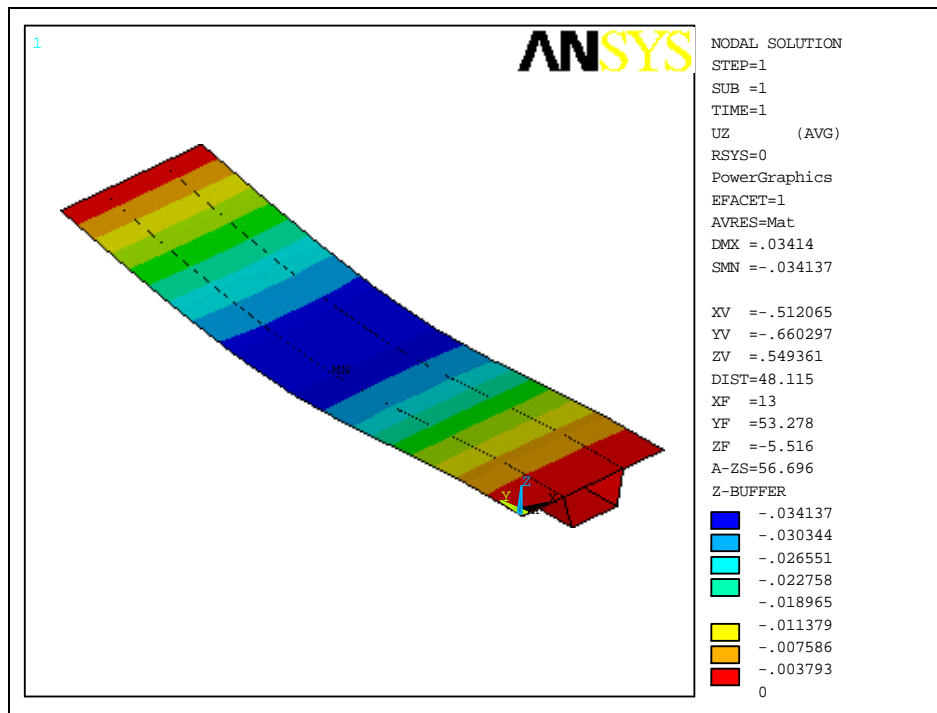


Figura 16: Isocontornos de la deflexión vertical(in) en el puente de sección cajón mixto en ANSYS. Fuente: Autores.

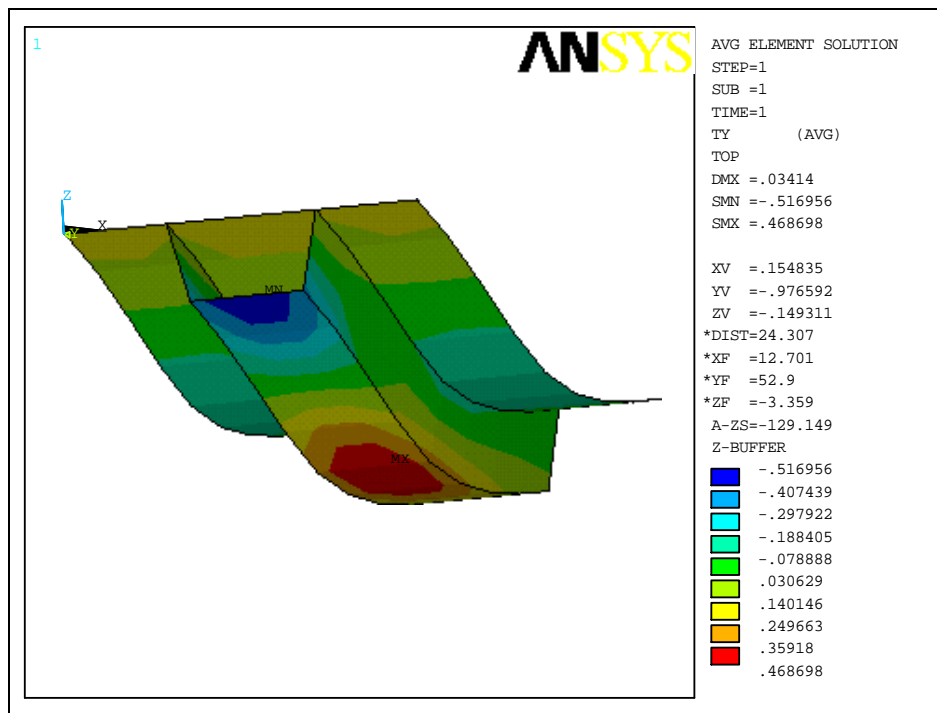


Figura 17: Isocontornos de axil longitudinal (lib/in) en el puente de sección cajón mixto en ANSYS. Fuente: Autores.

## 5.2 Implementación del modelo de puente recto de sección cajón en SAP2000

Se realiza un modelo en SAP2000, refinando levemente la malla para mejorar un poco los resultados o ver posibles efectos de este refinamiento.

El modelo construido mantiene las mismas condiciones de apoyo, geometría, propiedades de material y cargas aplicadas. El único cambio realizado se levemente en la densidad de la malla.

Las Figuras 18, 19, 20 y 21 muestran detalles del pre y posproceso del modelo del puente analizado.

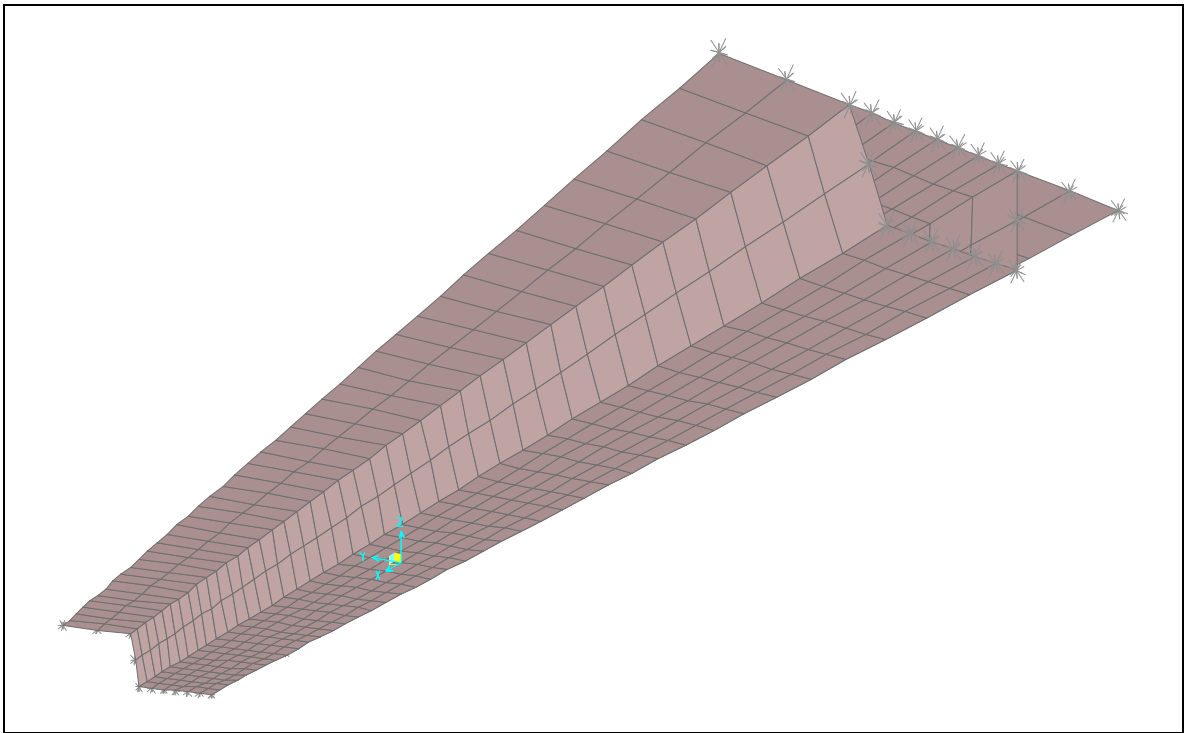


Figura 18: Discretización del modelo del puente de sección cajón mixto en SAP2000. Fuente: Autores.

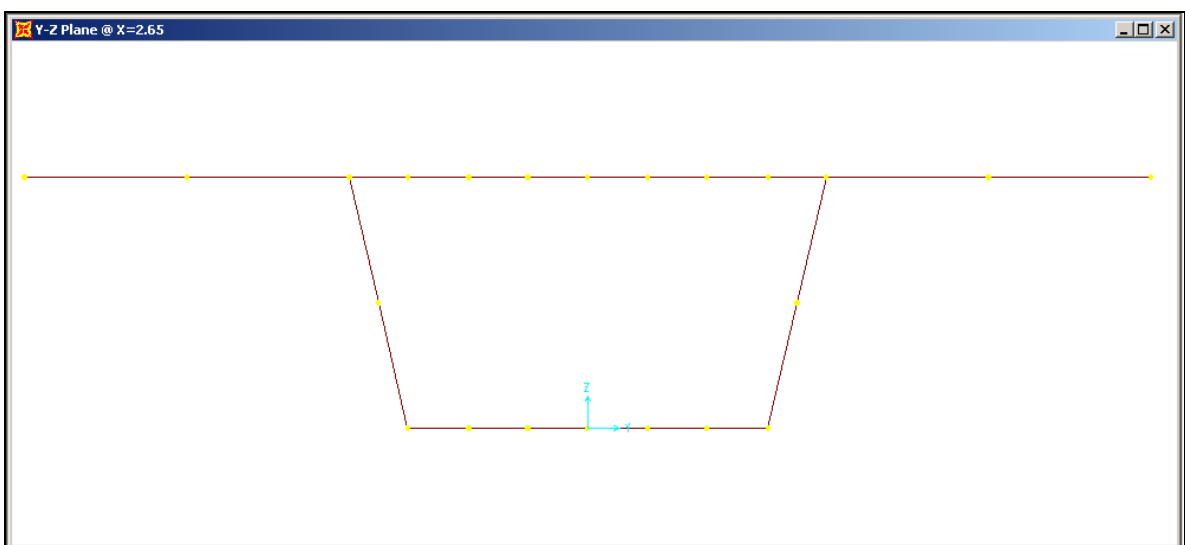


Figura 19: Sección transversal del puente de sección cajón mixto y su discretización en SAP2000. Fuente: Autores

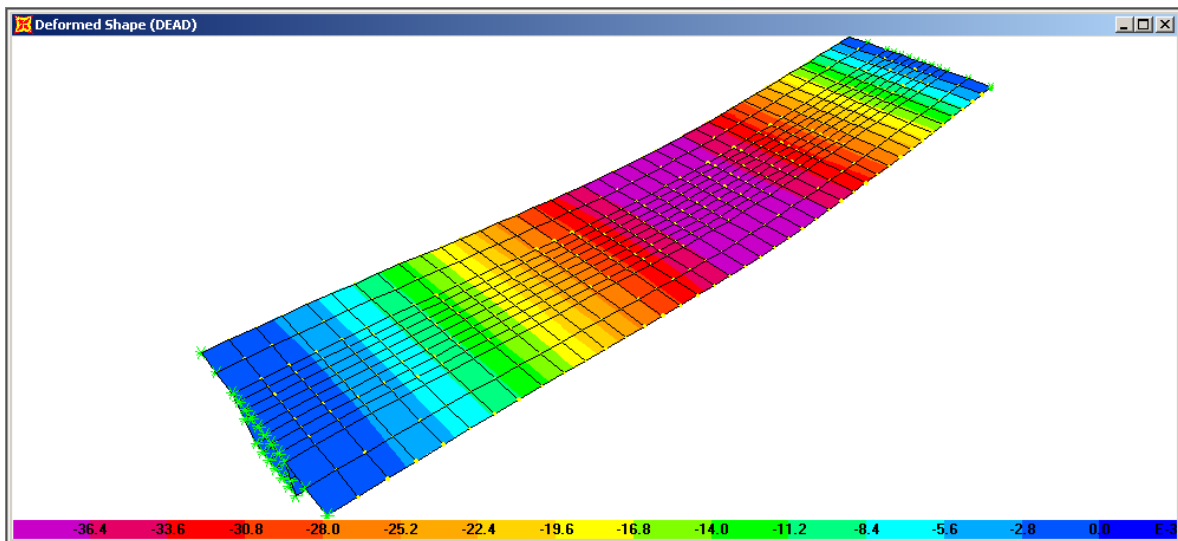


Figura 20: Isocontornos de la deflexión vertical (in) en el puente de sección cajón mixto usando SAP2000.  
Fuente: Autores.

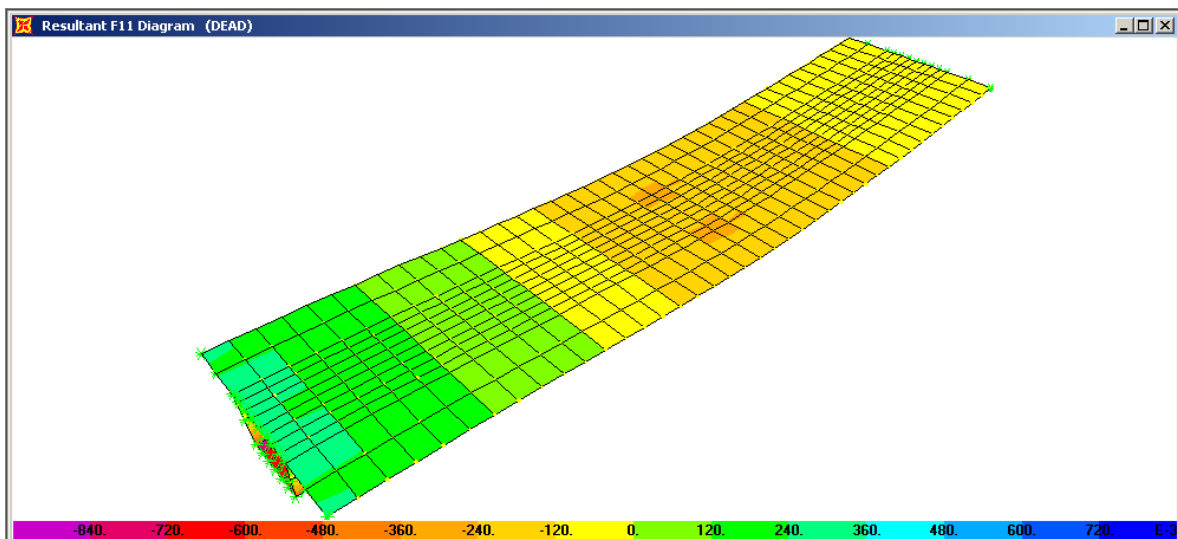


Figura 21: Isocontornos de axil longitudinal (lib/in) en el puente de sección cajón mixto y detalle de la sección central en SAP2000. Fuente: Autores.

### 5.3 Implementación del modelo de puente recto de sección cajón en GiD-BaFin

Finalmente se construye un modelo de bandas finitas de la sección central del puente usando la discretización mostrada en la Figura 10. En esta estructura se ve con mucha más contundencia la ventaja en la sencillez del modelo y la notable disminución en la cantidad de elementos y nodos.

Las Figuras 22, 23 y 24 muestran la discretización y la solución en BaFin (deflexión  $z$  y esfuerzo de membrana generalizado en  $y$  o axil longitudinal) del modelo del puente.

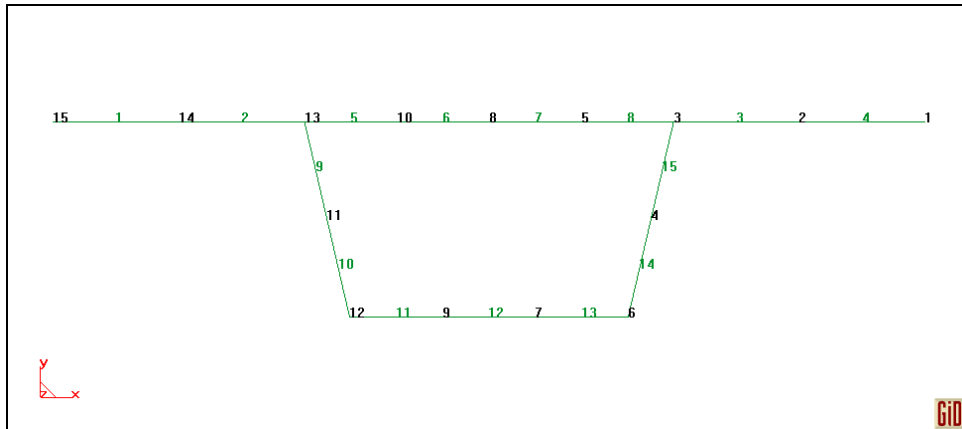


Figura 22: Discretización del modelo del puente de sección cajón mixto en BaFin. Fuente: Autores.

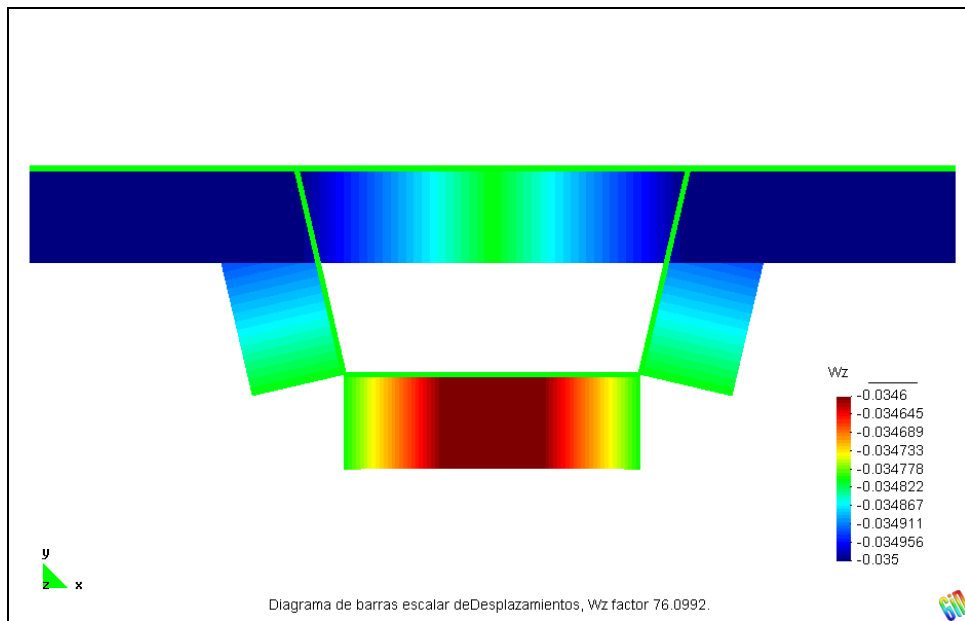


Figura 23: Diagrama de deflexión z (in) en la sección central del puente de sección cajón mixto en BaFin. Fuente: Autores.

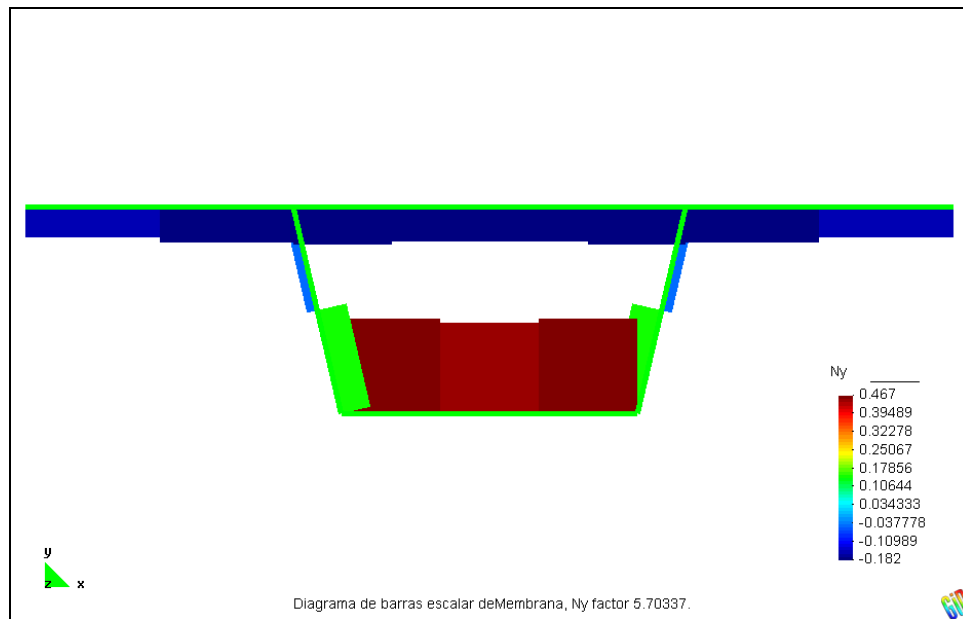


Figura 24: Gráfica de axil longitudinal (lib/in) en la sección central del puente de sección cajón mixto en BaFin. Fuente: Autores.

### 5.4 Comparación de resultados y discusión en el análisis del puente recto de sección cajón mixto

La tabla 1 permite comparar los resultados obtenidos para los grados de libertad en la sección central del puente en los puntos 1, 3 y 6 de la Figura 10c. Se reportan resultados usando BaFin, ANSYS y SAP2000. Las gráficas de soporte se encuentran en el apartado 5.1, 5.2 y 5.3 y la figura de datos del modelo es la Figura 10.

Nodo	BaFin	ANSYS	SAP2000	Ref (Figura 25) Oñate, 87	% de Variación respecto a ANSYS	% de Variación respecto a SAP2000
1	-0.350E-01	-0.341E-01	-0.388E-01	-0.350E-01	2.6	9.8
3	-0.350E-01	-0.341E-01	-0.391E-01	-0.350E-01	2.6	10.5
6	-0.347E-01	-0.338E-01	-0.384E-01	-0.348E-01	2.7	9.6

Tabla 1: Resultados de los grados de libertad en la sección central del puente en los nodos 1, 3 y 6 (ver Figura 10c) usando BaFin (21 armónicos), ANSYS y SAP2000 (flecha en pulgadas). Fuente: Autores.

En la tabla 1 se ven algunas diferencias en los porcentajes de variación respecto a ANSYS y SAP2000, puede decirse que estas diferencias eran de esperarse principalmente al factor de escala del modelo de sección reducida, sin embargo, son diferencias del orden de la centésima de pulgada que no representan mayores inconvenientes, por otra parte, debe tenerse en cuenta que todas las formulaciones deben enfrentar problemas numéricos clásicos como el bloqueo numérico de la solución por cortante y membrana para espesores pequeños, además, se sabe por la literatura que una vez realizado el ensamblaje de las contribuciones elementales se presenta singularidad de la matriz de rigidez por la existencia de nodos coplanares. Probablemente, los porcentajes de variación también se deban a la discretización, por lo cual se establece como estrategia parcial para disminuir los porcentajes de variación usar mallas un

poco más finas y emplear una cantidad de armónicos mayor en el caso de las bandas finitas. Debe notarse además que las cargas aplicadas son puntuales y que estas exigen una buena discretización de la misma y del dominio próximo.

En cuanto a la correspondencia con la referencia de Oñate (1987, Figuras 25 y 26), puede verse que prácticamente es coincidente, luego el desarrollo de BaFin es correcto y se adapta completamente a la formulación propia de Oñate revisada aquí.

En conclusión, puede decirse que los resultados son muy satisfactorios si se tiene en cuenta que las mallas empleadas son bastante gruesas para las exigencias de un modelo a escala reducida. Obviamente, se emplea este tipo de mallas para tener la posibilidad propia de esta tesis de validar la solución respecto a fuentes de otros autores.

Como información de análisis adicional se presenta la tabla 2 que muestra los resultados de esfuerzos generalizados en BaFin, ANSYS y SAP2000 (distribuidos en la longitud correspondiente del elemento), con las siguientes unidades, para las fuerzas lib/in.

Elemento	BaFin	ANSYS	SAP2000	Ref (Figura 26) Oñate, 87	% de Variación respecto a ANSYS	% de Variación respecto a SAP2000
1	-0.151	-0.140	-0.171	-0.151	7.9	11.7
2	-0.176	-0.163	-0.197	-0.176	8.0	10.7
3	-0.182	-0.170	-0.221	-0.182	7.1	17.6
4	-0.052	-0.051	-0.082	-0.052	2.0	36.6
5	0.148	0.136	0.173	0.148	8.8	14.5
6	0.467	0.437	0.544	0.467	6.9	14.2
7	-0.171	-0.158	-0.221	-0.171	8.2	22.6
8	0.447	0.412	0.524	0.447	8.5	14.7

Tabla 2: Resultados de esfuerzos generalizados en la sección central del puente para los elementos 1 a 8 (ver Figura 10c) usando BaFin (21 armónicos), ANSYS y SAP2000 (fuerzas axiales longitudinales lib/in). Fuente: Autores.

En la tabla 2 puede verse que los porcentajes de variación de los esfuerzos generalizados son superiores a los de las flechas de la tabla 2, esto se debe como se explicó en la placa a varios factores, en primer lugar los esfuerzos generalizados son variables secundarias que toman como base los grados de libertad, por tanto el mismo proceso de cálculo induce error adicional, otro aspecto que interfiere es la baja densidad de la malla y la cantidad de armónicos usados (21 pueden ser adecuados para la flecha pero no para los esfuerzos generalizados) para la interpolación longitudinal, finalmente el elemento de banda finita desarrollado en BaFin presenta un campo lineal de esfuerzos generalizados, mientras que el elemento de placa de ANSYS y SAP2000 usan un campo bilineal de esfuerzos generalizados que a la hora de comparar puede establecer diferencias difíciles de salvaguardar, dada la dificultad misma de la toma de resultados en ANSYS y SAP2000.

Estos resultados, advierten la necesidad del uso de una malla más fina en todos los modeladores, así como el empleo de una cantidad mayor de armónicos. Bajo esta situación las

ventajas de BaFin se hacen evidentes, dado que, los sobrecostos adicionales por densificación de la malla en BaFin son mínimos respecto a ANSYS y SAP2000, además, las exigencias de tiempo en la modificación de modelos de elementos finitos es superior respecto a los construidos en bandas finitas, no obstante, los avances actuales en técnicas de mallado y preproceso en general.

Finalmente puede verse que BaFin representa una solución central que muestra un equilibrio importante a la hora de usar los resultados en la fase de diseño estructural. A continuación se muestran las figuras referenciadas en las Tablas 1 y 2.

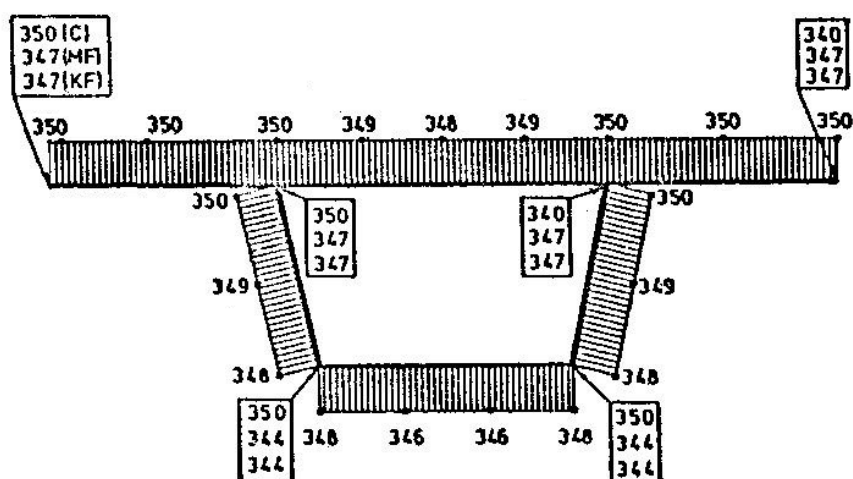


Figura 25: Diagrama de deflexión  $z$  ( $\text{in} \cdot 10^{-4}$ ) en la sección central del puente de sección cajón mixto. Fuente: OÑATE, E. Curso avanzado de aplicación del M.E.F. en problemas no lineales. Barcelona, España. Escuela técnica superior de ingenieros de caminos, canales y puertos, Universidad Politécnica de Catalunya, 1987. 821 p.

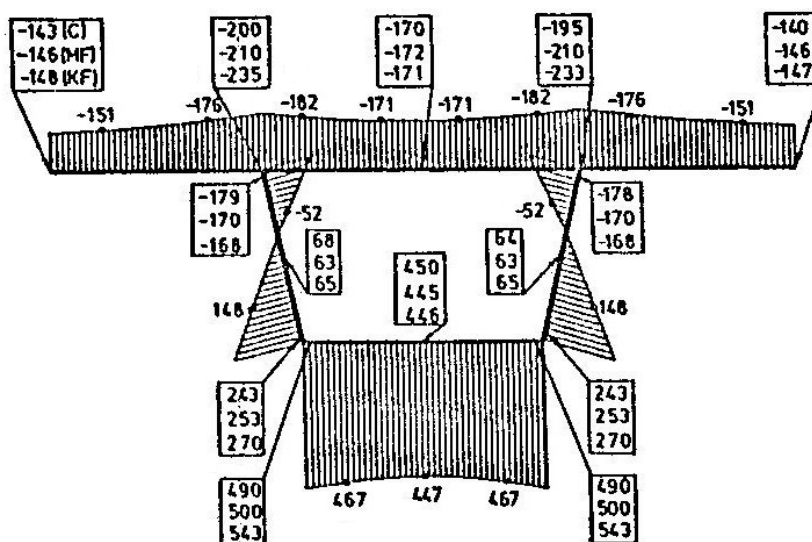


Figura 26: Gráfica de axil longitudinal ( $\text{lb}/\text{in} \cdot 10^{-3}$ ) en la sección central del puente de sección cajón mixto. Fuente: OÑATE, E. Curso avanzado de aplicación del M.E.F. en problemas no lineales. Barcelona, España. Escuela técnica superior de ingenieros de caminos, canales y puertos, Universidad Politécnica de Catalunya, 1987. 821 p.

## 6 CONCLUSIONES

- El método de bandas finitas exhibe ventajas frente al método de los elementos finitos clásico en términos de costo computacional, facilidad en el preproceso del modelo, ahorro de tiempo cpu, entrega de resultados en secciones críticas, entre otras.

- En todos los casos modelados se demuestra la superioridad computacional de las bandas finitas con respecto a la sencillez del preproceso, solución y posproceso de modelos, particularmente en los puentes de sección cajón prismáticos el método alcanza su mayor competitividad.

- Es necesario tener en cuenta que el alcanzar porcentajes de variación pequeños en flechas o giros, no garantiza una buena precisión en el cálculo de esfuerzos generalizados, sobre todo en el caso de los cortantes donde es necesario incrementar la densidad de la malla y el número de armónicos calculados.

- Pese a todos los problemas numéricos que pueden surgir en el cálculo de estructuras modeladas con láminas, los resultados permiten validar la capacidad de BaFin para modelar adecuadamente puentes rectos, tal como se demuestra en el Benchmark contra reconocidos códigos de elementos finitos como ANSYS y SAP2000, además se valida frente a referentes de investigadores reconocidos como Cheung, Oñate y Suarez, entre otros.

- Los resultados muestran que el desarrollo de herramientas propias y su validación constituyen rutas factibles para la investigación y el fortalecimiento de la capacidad para el desarrollo de software ajustado a las necesidades y recursos propios de nuestro medio.

- Es necesario en la práctica contemplar solucionar modelos con dos configuraciones de malla que permitan establecer la independencia máxima de los resultados de esta.

- Los puentes de sección cajón muestran ser una alternativa muy interesante como solución estructural en infraestructura vial, sin embargo se muestran los cuidados y recomendaciones que deben tenerse en cuenta para un análisis adecuado que por supuesto afectara el diseño y la configuración de construcción final.

## REFERENCIAS

- Ahmad, S., Irons, B.M. y Zienkiewicz, O.C., *Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems*, Proc. 2<sup>nd</sup> Conf. Matrix Methods in structural Mech, Air Force Inst. of Technol., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1968.
- ANSYS®. *Manual de usuario*, California, EE.UU. Berkeley University, 2010.
- Cheung, Y.K. *Finite Strip Analysis of elastic slabs*. Proc. Am. Soc. Civil Eng., Vol. 94, pp. 1365, 1968.
- Computer And Structures, Inc. Sap 2000. *Basic analysis reference manual*, California, EE.UU. Berkeley University, 2008.
- GID, *Manual de usuario*, Barcelona, España. Centro internacional de métodos numéricos en ingeniería, Universidad Politécnica de Catalunya, 2010.
- Kantorovitch, L.V. y Krylov, V.I., *Approximate methods of higher analysis*, J. Wiley, 1958.
- Grafton, P.E. y Strome, D.R., *Analysis of axi-symmetric shells by the direct stiffness method*, A.I.A.A.J., Vol. 1, pp. 2342, 1963.
- Loo, Y.C. y Cusens, Y.A.R. *The Finite strip method in bridge engineering*, Viewpoint, 1978.
- Oñate, E., *Comparisons of finite strip methods for the analysis of box girder bridges*, M. Sc. Thesis, Civil, Eng. Dpt., Univ. College of Swansea, 1976.
- Oñate, E. *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos, análisis estático lineal*. 2



- ed. Barcelona, España. Centro internacional de métodos numéricos en ingeniería, Universidad Politécnica de Catalunya, 1995. 838 p.
- Oñate, E. *Curso avanzado de aplicación del M.E.F. en problemas no lineales*. Barcelona, España. Escuela técnica superior de ingenieros de caminos, canales y puertos, Universidad Politécnica de Catalunya, 1987. 821 p.
- Suárez, B. *La formulación de bandas finitas de Reissner-mindlin para análisis de placas, puentes y láminas de revolución*, Tesis Doctoral, Barcelona, España. Escuela técnica superior de ingenieros de caminos, canales y puertos, Universidad Politécnica de Catalunya, 1982.
- Wilson, E.I., "Structural analysis of axisymmetric solids, A.I.A.A.J., Vol. 3, pp. 2269, 1965.
- Zienkiewicz, O.C. y Too, J. *The finite element prism in analysis of thick simply supported bridges*, Proc. Inst. Civ. Eng., Vol. 53, pp. 147, 1972.