

REGULARIZACIÓN DE LA ENERGÍA DE FRACTURA UTILIZANDO UN MODELO DE FISURA DISTRIBUIDA DE HILLERBORG Y DAÑO ISOTRÓPICO MEDIANTE UN MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS

Luis C. Pérez^a, Fernando Valdivia B.^a y Sergio Oller M.^b

^aAula UTFSM-CIMNE, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España 1680, Valparaíso, Chile, <http://www.mec.utfsm.cl>

^bEscuela de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, Universidad Politécnica de Cataluña, C/. Gran Capitán, s/n, Edificio C1, Campus Norte, U.P.C., 08034 Barcelona (España), sergio.oller@upc.edu

Palabras Clave: Fisura distribuida, daño isotrópico, métodos sin malla.

Resumen. El fenómeno de fractura en materiales heterogéneos cuasi-frágiles ha sido estudiado extensivamente con modelación numérica basada en el Método de Elementos Finitos (MEF), mostrando dependencias en la orientación y tamaño de la malla en los resultados. Es por eso que el uso de técnicas sin malla junto con modelos de fisura distribuida surgen como alternativas a estas dependencias.

En este trabajo, un modelo de fisura distribuida aplicado al fenómeno de daño isotrópico mediante un método sin malla de Puntos Finitos es presentado. Se propone el uso de una longitud geométrica dada por la dirección de los esfuerzos principales en reemplazo de una longitud característica, la cual se basa en el modelo de Fisura Ficticia de Hillerborg. El criterio de fluencia de Rankine y un esquema iterativo incremental de Newton-Raphson son usados para predecir el comportamiento no-lineal en la zona fracturada del material.

1. INTRODUCCIÓN

Hay diferentes puntos de vista para clasificar los modelos constitutivos basados en la mecánica clásica, dentro de ellos están los modelos de fisura cohesiva y los modelos basados en teoría de daño y plasticidad. Cada uno de estos grupos incluyen modelos constitutivos que reproducen numéricamente el comportamiento de la fractura de distintos tipos de materiales, por ejemplo, materiales frágiles y cuasi-frágiles (Oller, 2001).

La mecánica de daño, basada en un proceso termodinámico irreversible, ha sido introducida para modelar el comportamiento de varios materiales que exhiben, en el sentido de pérdida de rigidez, una alteración en sus propiedades elásticas durante el proceso de carga, debido a una reducción en su área efectiva resistente (Maugin, 1992). En (Kachanov, 1958) fue definido el concepto de esfuerzo efectivo. En su trabajo, Kachanov propuso la variable de daño como un escalar, la cual varía en un rango de 0 a 1. A partir de ello, es que varios investigadores han extendido esta teoría, por ejemplo aproximando la variable de daño como un tensor (Simo y Ju, 1987).

Por otro lado, los modelos de fisura cohesiva se basan en la mecánica de medios continuos usando hipótesis y parámetros de la mecánica de fractura (Rashid, 1968). Dentro de los modelos de fisura cohesiva, se encuentra el modelo de fisura ficticia propuesto por Hillerborg (Hillerborg et al., 1976), quien extendió las aproximaciones anteriores realizadas por Barenblatt (Barenblatt, 1962) y Dugdale (Dugdale, 1960), y en el cual postuló que para el concreto, el modelo de fisura ficticia era una suposición, en el sentido de que la fisura cohesiva puede desarrollarse en cualquier parte del material y no solamente en la punta de la grieta.

Los modelos que describen el comportamiento de materiales cuasi-frágiles han sido desarrollados extensivamente con el Método de Elementos Finitos (MEF), cuyos resultados muestran dependencias con respecto al tamaño y orientación de la malla. Es por eso que se presenta un método sin malla de Puntos Finitos (MPF) (Oñate. et al., 2001; Perazzo., 2002; Perazzo. et al., 2006; Pérez-Pozo. et al., 2009) como técnica numérica capaz de aproximar los campos de desplazamientos y deformaciones en la mecánica de sólidos, y se aplica en este trabajo para modelar numéricamente el comportamiento de materiales cuasi-frágiles bajo esfuerzos de tensión.

2. MÉTODO DE PUNTOS FINITOS

El MPF realiza la aproximación local de una función incógnita $u = u(x)$ para cada uno de los N nodos x_I de la discretización del dominio, tal que $1 \leq I \leq N$, usando como criterio la minimización de los errores cuadráticos ponderados (Oñate., 1996; Oñate. et al., 1996a,b, 2001; Perazzo., 2002; Pérez-Pozo. et al., 2009).

Sea $\omega_I \subset [a, b]$ subintervalo de un dominio unidimensional $\Omega : \{x \mid a \leq x \leq b\}$ donde se realiza la aproximación local para $x_I \in \omega_I$.

Se define al conjunto $\{x_{I,1}, \dots, x_{I,n_I}\}$ como nube asociada al nodo x_I , formada por los n_I nodos de la discretización contenidos en ω_I ; x_I recibe el nombre de *nodo estrella* de la *nube* I -ésima y $x_{I,k}$, $1 \leq k \leq n_I$ corresponde al nodo k -ésimo de la nube I -ésima, donde se cumple necesariamente que para cada I existe un único k de modo que $x_I = x_{I,k}$.

Considérese la base $\langle p_{I,1}(x), \dots, p_{I,m_I}(x) \rangle$ de funciones linealmente independientes en cada subintervalo ω_I para la definición de la forma de la función de aproximación, cuya dimensión m_I es la misma para todos los N subintervalos. En este trabajo se consideran $m_I = 3$ con $p_{I,1}(x) = 1$, $p_{I,2}(x) = x$, $p_{I,3}(x) = x^2$. Para la correcta implementación del MPF, se debe cumplir la condición $n_I > m_I = 3$.

Tomando $\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,m_I}$, la aproximación $\tilde{u}(x)$ de $u(x)$ en I_I es de la forma

$$\tilde{u}_I(x) = \alpha_{I,1}1 + \alpha_{I,2}x + \alpha_{I,3}x^2 \tag{1}$$

Para w_I , se escogen los $\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,3}$ tal que se minimice el valor

$$J_I = \sum_{k=1}^{n_I} w(x_{I,k})(u_I^h(x_{I,k}) - \tilde{u}_I(x_{I,k}))^2 \tag{2}$$

Donde la función $w(x_I) = w_I$ recibe el nombre de *función peso*.

Sea $h_{I,k}$ distancia entre el nodo $x_{I,k}$ con el nodo estrella. Para dar un carácter local en la aproximación por el MPF la función de peso usualmente utilizada es la que sigue:

$$w_I(x_{I,k}) = \begin{cases} \frac{e^{-(h_{I,k}/\lambda_I)} - e^{-(r_I/\lambda_I)}}{1 - e^{-(r_I/\lambda_I)}} & \text{si } h_{I,k} \leq r_I \\ 0 & \text{si } h_{I,k} > r_I \end{cases} \tag{3}$$

siendo $r_I = q \cdot h_{\text{máx}}$, con $h_{\text{máx}} = \text{máx}\{h_{I,1}, \dots, h_{I,n_I}\}$, y $\lambda = \beta \cdot r_I$, donde q y β son parámetros positivos escogidos según algún criterio. En adelante se utiliza $q = 1,1$ y $\beta = 0,25$ (Oñate. et al., 2001; Pérez-Pozo. et al., 2009).

Para problemas de tipo unidimensionales, el criterio de selección de nodos corresponde ser los $n_I - 1$ nodos más cercanos a x_I . En este trabajo se utiliza $n_I = 5$.

Sean

$$\mathbf{p}_I(x) = [p_{I,1}(x) \dots p_{I,3}(x)] \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_I = \begin{pmatrix} \alpha_{I,1} \\ \vdots \\ \alpha_{I,3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_I^h = \begin{pmatrix} u(x_{I,1}) \\ \vdots \\ u(x_{I,n_I}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_I = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_I(x_{I,1}) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_I(x_{I,n_I}) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Considerando $J_I = J_I(\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,n_I})$ función definida desde la ecuación (2). El valor mínimo de J_I se alcanza en su punto crítico, por lo que para cada nube I se escogen los $\alpha_{I,1}, \dots, \alpha_{I,n_I}$ tal que $\nabla J_I = \mathbf{0}$, obteniéndose:

$$\boldsymbol{\alpha}_I = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I^h \tag{6}$$

donde

$$\mathbf{A}_I = \mathbf{P}_I^T \mathbf{W}_I \mathbf{P}_I \quad \mathbf{B}_I = \mathbf{P}_I^T \mathbf{W}_I$$

siendo \mathbf{A}_I la matriz de momentos y \mathbf{W}_I la matriz diagonal de orden $n_I \times n_I$ con término $(\mathbf{W}_I)_{k,k} = w_I(x_{I,k})$. De este modo, reemplazando (6) en (1) se obtiene

$$\tilde{u}_I(x) = \boldsymbol{\varphi}_I(x) \mathbf{u}_I^h \tag{7}$$

con

$$\boldsymbol{\varphi}_I(x) = \mathbf{p}_I(x) \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \tag{8}$$

La aproximación de las derivadas de $\mathbf{u}(x)$, se realiza por la derivación directa de la relación (7), la que afecta únicamente a las funciones de la base de interpolación del vector $\mathbf{p}_I(x)$ definidos en (4) dentro de la ecuación (8).

Para controlar el condicionamiento de la matriz de momentos, la base de interpolación es centrada y adimensionalizada (Pérez-Pozo. et al., 2009):

$$p_{I,1}(x) = 1, \quad p_{I,2}(x) = \left(\frac{x - x_I}{h_{\text{máx}}} \right), \quad p_{I,3}(x) = \left(\frac{x - x_I}{h_{\text{máx}}} \right)^2$$

3. MODELO DE DAÑO ISOTRÓPICO

Con el fin de caracterizar el modelo de daño isotrópico, el concepto de esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$ es introducido (Oller, 2001). En una dimensión, se define la siguiente relación:

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (9)$$

donde d es el parámetro escalar de daño, el cual varía desde 0 a 1. El esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$ y la deformación ε se relacionan mediante la ley de Hooke

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon \quad (10)$$

$$\varepsilon = \nabla \mathbf{u}(x, t) \quad (11)$$

donde E es módulo elástico del material, y ∇ denota el operador gradiente. Sustituyendo (10) en (9)

$$\sigma = (1 - d)E\varepsilon \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (12)$$

La evolución de la variable de daño

$$d(x, t) = d(Y(x, t)) \quad (13)$$

depende de una variable interna, en este trabajo se propone la deformación inelástica ε^{inel}

$$Y(x, t) = \varepsilon^{inel} \quad (14)$$

4. MODELO DE FISURA FICTICIA

El modelo de fisura ficticia (fisura distribuida) de Hillerborg define su estado de comportamiento en función de las tensiones principales. Admite un comportamiento elástico hasta alcanzar el límite de ruptura (dado por el criterio de fluencia de Rankine o de la máxima tensión de tracción), luego de alcanzar este límite, el material adopta la forma de un sólido ortótropo, con respuesta diferenciada según la dirección de tensiones principal mayor y menor. En la zona fisurada se considera una pérdida de resistencia, en la dirección normal a la fisura, proporcional al desplazamiento (Oller, 2001).

El desplazamiento, una vez alcanzado el límite de fluencia es,

$$u = l \frac{\sigma}{E} - 2 \frac{G_f}{f_t^2} (\sigma - f_t) \quad (15)$$

donde l es una longitud geométrica, G_f es la energía de fractura y f_t es el esfuerzo de fluencia, ambos son propiedades del material.

De la misma forma, la relación (15) puede ser formulada en términos de deformaciones (de Borst., 2001, 2002), la deformación total una vez alcanzado el límite de fluencia,

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{inel} \quad (16)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{2G_f}{lf_t^2} (f_t - \sigma) \quad (17)$$

Se define la deformación inelástica ε^{inel} como

$$\varepsilon^{inel} = \frac{2G_f}{lf_t^2} (f_t - \sigma) \quad (18)$$

De la ecuación (17), el esfuerzo σ en función de la deformación total ε es,

$$\sigma = \varepsilon C_1 + C_2 \quad (19)$$

donde $C_1 = \frac{1}{1/E-H}$; $C_2 = H f_t C_1$; y $H = \frac{2G_f}{l f_t^2}$

Por otra parte, la deformación inelástica ε^{inel} puede ser reformulada en función de la deformación total ε

$$\varepsilon^{inel} = \varepsilon \left(1 - \frac{C_1}{E}\right) + \frac{C_2}{E} \quad (20)$$

La evolución de la fisura está dada por la función de fluencia (función de ablandamiento),

$$\sigma = f_t - \frac{\varepsilon^{inel}}{H} \quad (21)$$

sustituyendo la ecuación (21) en (9)

$$(1-d)\bar{\sigma} = f_t - \frac{\varepsilon^{inel}}{H} \quad (22)$$

finalmente se obtiene la variable escalar de daño d en función de la deformación inelástica ε^{inel} calculada en (20),

$$d = 1 - \frac{\left(f_t - \frac{\varepsilon^{inel}}{H}\right)}{\bar{\sigma}} \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (23)$$

5. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

5.1. Discretización mediante Colocación Puntual

Considere el siguiente problema de contorno gobernado por ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera

$$A(\mathbf{u}) = \mathbf{b} \text{ en } \Omega \quad (24)$$

$$B(\mathbf{u}) = \mathbf{t} \text{ en } \Gamma_t \quad (25)$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_p = 0 \text{ en } \Gamma_u \quad (26)$$

Donde A y B son operadores diferenciales y u es la función incógnita del problema. En problemas de mecánica de sólidos, A y B corresponden a las ecuaciones de equilibrio, u es el campo de desplazamientos, b son las fuerzas de cuerpo sobre el dominio Ω , t son las tracciones sobre Γ_t y u_p representa los valores prescritos del campo de desplazamientos sobre Γ_u .

Usando el método de colocación puntual (Zienkiewics.O y Taylor., 2000), las ecuaciones diferenciales (24), (25), (26) y la aproximación final del MPF definido en (7), se obtiene el siguiente sistema discreto de ecuaciones,

$$[A(\tilde{u})]_i - b_i = 0 \quad \text{en } \Omega \quad i = 1, N_a \quad (27)$$

$$(B(\tilde{u}))_j - t_j = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad j = 1, N_t \quad (28)$$

$$(\tilde{u} - u_p)_k = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad k = 1, N_u \quad (29)$$

donde N_a es el número de puntos al interior de Ω y N_t, N_u son los números de puntos en los contornos Γ_t y Γ_u respectivamente.

Finalmente el sistema discreto se puede escribir en forma compacta como:

$$K\mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (30)$$

donde la matriz K contiene a las funciones de forma $\Phi_I(x)$, \mathbf{u}^h contiene a los parámetros desconocidos o incógnitas del problema y \mathbf{f} contiene a los términos de fuerzas \mathbf{b} , \mathbf{t} y los desplazamientos \mathbf{u}_p .

5.2. Modelo lineal de esfuerzo en MPF

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de un sólido lineal, cuyas fuerzas inerciales son despreciables

$$\nabla\sigma(\mathbf{x}) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (31)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (32)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (33)$$

Considerando el método de colocación puntual definido en la sección 5.1 podemos obtener el sistema discreto de ecuaciones cuya forma matricial compacta es:

$$\mathbf{L}^T\sigma + \rho\mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (34)$$

$$\mathbf{N}^T\sigma = \bar{\mathbf{t}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (35)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (36)$$

donde \mathbf{L} un operador que define la ecuación diferencial, \mathbf{N} matriz que contiene los cosenos directores en la dirección normal exterior al contorno, σ es el vector de tensiones, \mathbf{u} es el vector de desplazamientos, $\rho\mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{t}}$ y $\hat{\mathbf{u}}$ son las fuerzas másicas, fuerzas distribuidas y desplazamientos prescritos respectivamente.

5.3. Ecuación de Gobierno para Daño Isotrópico

La ecuación de gobierno para implementar el modelo de daño isotrópico se basa en la implementación hecha en (Pérez-Pozo. et al., 2011), la cual se detalla a continuación.

Los operadores descritos en la sección 5.2 toman la siguiente forma para el caso 2D.

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} := \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}$$

$$\sigma := \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} := \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\rho\mathbf{b} := \begin{bmatrix} \rho b_x \\ \rho b_y \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{t}} := \begin{bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{u}} := \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{bmatrix}$$

Para obtener un sistema equivalente en términos de los desplazamientos, se debe usar la relación tensión/deformación y la relación deformación/desplazamiento de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = (I - d)C\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (37)$$

Finalmente se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$(I - d)\mathbf{L}^T C \mathbf{L} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}^h + (I - d)(\mathbf{L} \boldsymbol{\Phi})^T C \mathbf{L} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}^h - (\mathbf{L} \boldsymbol{\Phi} d)^T C \mathbf{L} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}^h + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (38)$$

$$\mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (39)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (40)$$

$$\mathbf{K}_{dI} \mathbf{u}^h = \mathbf{f}_I \quad I = 1, \dots, N \quad (41)$$

En donde K_d es la matriz de rigidez de daño en MPF y $\boldsymbol{\Phi}$ es la matriz que contiene a las funciones de forma $\varphi(x)$.

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

6.1. Barra unidimensional en tracción

El problema consiste en someter a tensión una barra, la cual tiene sus propiedades mecánicas ablandadas en el centro de esta, los parámetros geométricos y materiales se resumen en la tabla 1, y el esquema de la barra se aprecia en la figura 1:

Largo de la barra l	100[mm]
Largo de la zona ablandada	10[mm]
Módulo de Young E	20000[MPa]
Esfuerzo de fluencia f_t	2[MPa]
Energía de Fractura G_f	1,25[N/mm]
Factor de ablandamiento	0.9

Tabla 1: Parámetros del problema

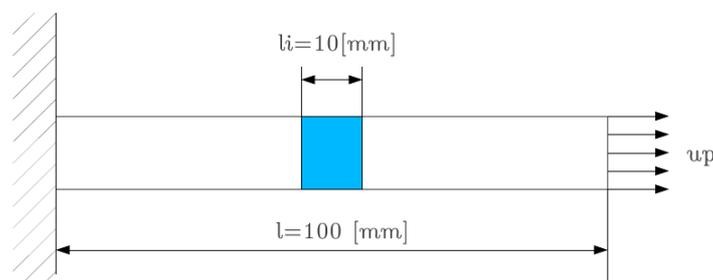


Figura 1: Esquema barra en tracción

A continuación se presentan los resultado obtenidos al aplicar el modelo desarrollado.

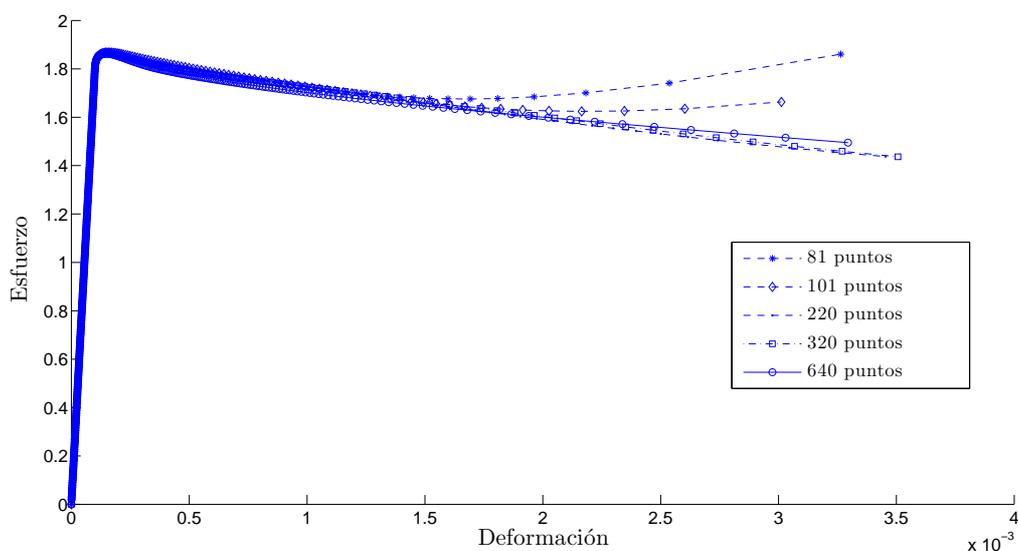


Figura 2: Gráfico esfuerzo-deformación punto central para distintas discretizaciones

La figura 2 presenta el comportamiento del punto central de la barra, el cual está completamente dañado, variando la discretización. Se puede apreciar que sobre los 320 puntos de discretización y 5 puntos por nube, la solución se mantiene estable.

Los siguientes resultados se obtienen con una discretización de 320 puntos y nubes de 5 puntos.

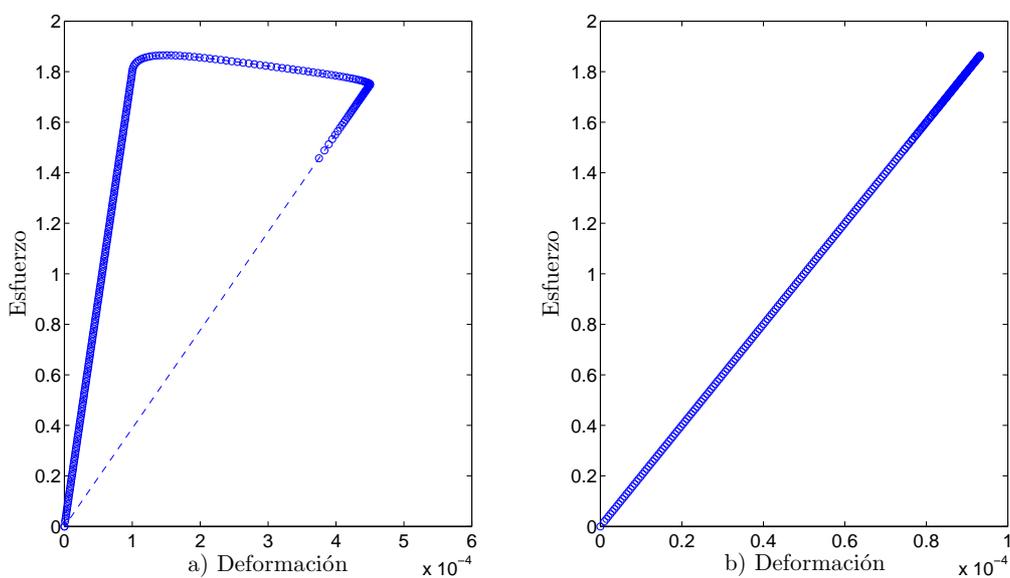


Figura 3: Gráfico esfuerzo-deformación punto a) semi-dañado; b) no dañado

En la figura 3, se puede apreciar que un punto semi-dañado tiene una descarga elástica, pero el efecto del daño sobre este se ve reflejado en el cambio de pendiente al descargarse, ya que

el daño afecta directamente al módulo de Young (ecuación (12)). Por otro lado, un punto no dañado tiene una descarga elástica sin cambio de pendiente.

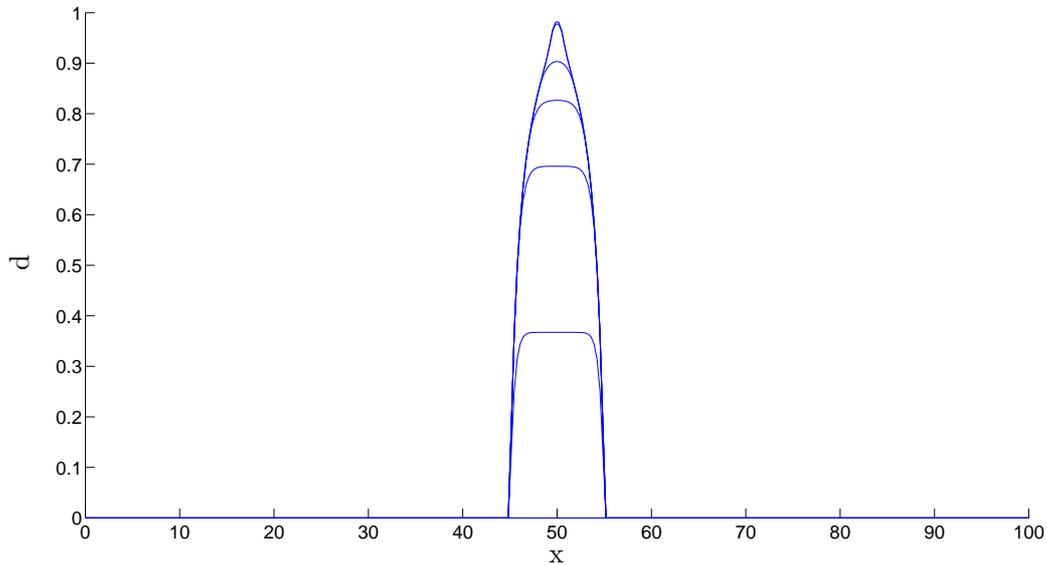


Figura 4: Evolución de la variable de daño d para distintos pasos de carga

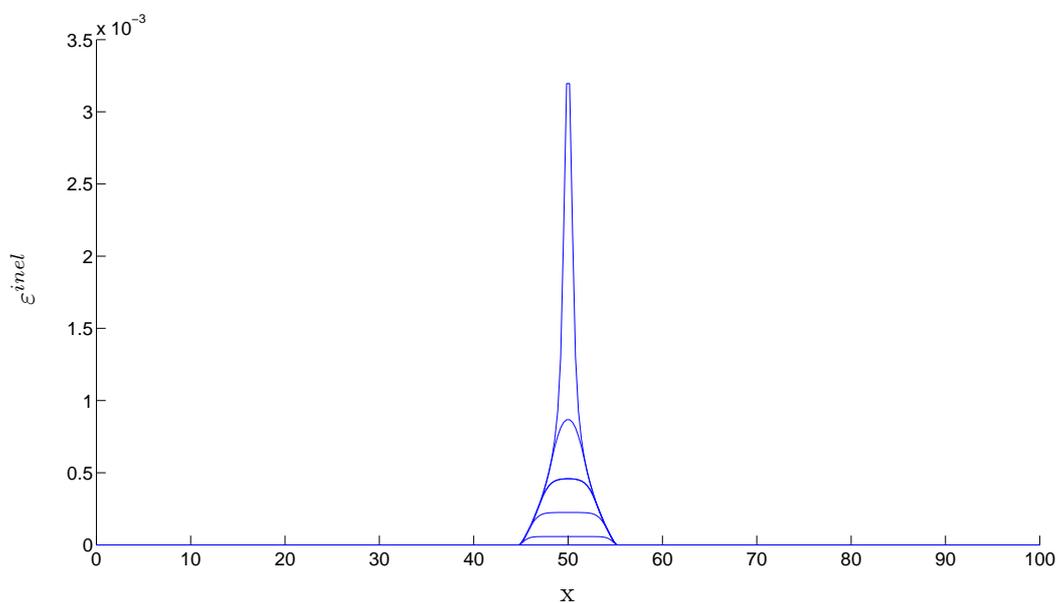


Figura 5: Evolución de la deformación inelástica ε^{inel} para distintos pasos de carga

En las figuras 4 y 5 se pueden ver la evolución de la variable de daño d y la deformación inelástica ε^{inel} al aumentar los pasos de carga, ambas variables se desarrollan en la sección de la barra con propiedades reducidas, el material virgen queda intacto comportándose de forma elástica tanto en carga como en descarga.

7. CONCLUSIONES

Se ha propuesto un modelo para la variable de daño isotrópico, el cual hace uso del modelo clásico de fisura cohesiva para simular el comportamiento inelástico de materiales cuasi-frágiles sometidos a cargas de tensión. El criterio de fluencia de Rankine inicia la fisura en el nodo, propagándose esta a través de la zona remota del material degradado. El comportamiento no-lineal se ha resuelto utilizando un esquema iterativo incremental de Newton-Raphson.

El desarrollo de una técnica sin malla de Puntos Finitos y la implementación del modelo de fisura cohesiva han provisto de independencia del uso de malla y longitudes características en los resultados.

El modelo propuesto puede ser extendido a 2 y 3 dimensiones, para asegurar la convergencia del método iterativo un algoritmo de operador tangente por un Método de Perturbación son aplicaciones que serán investigadas y desarrolladas en nuestros futuros trabajos.

8. AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) por el patrocinio otorgado para la realización de este trabajo científico a través del proyecto FONDECYT N°11100253.

REFERENCIAS

- Barenblatt G. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, (7):55–129, 1962.
- de Borst. R. Some recent issues in computational failure mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:63–95, 2001.
- de Borst. R. Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:95–112, 2002.
- Dugdale D. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, (8):100–8, 1960.
- Hillerborg A., Modeer M., y Petersson P. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6):773–782, 1976.
- Kachanov L. Time of rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk*, 8:26–31, 1958.
- Maugin G. *The thermodynamics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press, 1992.
- Oller S. *Fractura Mecánica: un enfoque global*. Ediciones UPC, 2001.
- Oñate. E. On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *CIMNE*, 81, 1996.
- Oñate. E., Idelsohn.S, Zienkiewics.O, y Taylor. R. A finite point methods in computational mechanics, application to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3839–3866, 1996a.
- Oñate. E., Idelsohn.S, Zienkiewics.O, Taylor. R., y Sacco.C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:315–346, 1996b.
- Oñate. E., Perazzo. F., y Miquel. J. A finite point method for elasticity problems. *Computer and Structures*, 79:2151–2163, 2001.
- Perazzo. F. *Una metodología numérica sin malla para la resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el método de puntos finitos*. Tesis de Doctorado, 2002.
- Perazzo. F., Oller S., Miquel. J., y Oñate. E. Avances en el método de puntos finitos para la

- mecánica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos e Ingeniería*, 22:153–168, 2006.
- Pérez-Pozo. L., Chacana. F., y Quelin .J. Regularización de la energía de fractura para el análisis de daño isotrópico mediante el método sin malla de puntos finitos. *Mecánica Computacional*, XXX:755–772, 2011.
- Pérez-Pozo. L., Perazzo. F., y Angulo. A. A meshless FPM model for solving nonlinear material problems with proportional loading based on deformation theory. *Advances in Engineering Software*, 40:1148–1154, 2009.
- Rashid Y. Analysis of prestressed concret pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 7(4), 1968.
- Simo C. y Ju J. Stress and Strain Based Continuum Damage Models. Part I and II. *Solid Structures*, 23:821–840, 1987.
- Zienkiewics.O y Taylor. R. *El método de elementos finitos*. CIMNE, 2000.