

## IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS DE LA DINÁMICA DE SISTEMAS ESTRUCTURALES

Juan F. Giró<sup>a,b</sup>, Ariel E. Matusевич<sup>a</sup> y Raúl J. Ritta<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Departamento de Estructuras, Facultad de C. E. F. y N., Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, [juanfgiro@gmail.com](mailto:juanfgiro@gmail.com), <http://www.efn.uncor.edu>*

<sup>b</sup> *Departamento de Ingeniería de Sistemas de Información, Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional, Córdoba, Argentina, [secresis@bbs.frc.utn.edu.ar](mailto:secresis@bbs.frc.utn.edu.ar), <http://www.frc.utn.ar>*

**Palabras Claves:** análisis estructural, respuesta dinámica, identificación de parámetros.

**Resumen.** La identificación de parámetros de la dinámica de sistemas estructurales tiene la finalidad de desarrollar o mejorar modelos matemáticos a partir de datos experimentales. Esos datos son la respuesta de la estructura ante condiciones de carga cuidadosamente estudiadas y los parámetros a identificar son intrínsecos del sistema, tales como los coeficientes de rigidez y amortiguamiento. El avance de la tecnología computacional que provee equipos cada vez más rápidos, con mayor capacidad de almacenamiento y amplios recursos de representación visual, ha sido un gran estímulo para consolidar y ampliar este importante campo de investigación. En este contexto se encuentran diversas aplicaciones, como son la validación de modelos desarrollados a través del método de los elementos finitos, el seguimiento de la evolución de daños estructurales para la predicción de condiciones de fallas y el análisis del comportamiento de mecanismos complejos en el área de la mecatrónica. Como contrapartida, por tratarse del estudio de fenómenos dinámicos, no lineales y altamente complejos, se han explorado una amplia variedad de formas de abordar el problema y se han propuesto numerosas técnicas de identificación, cada una con un área de aplicación específica, con sus ventajas y limitaciones. Estas áreas de aplicación muchas veces se superponen y en la mayoría de los casos se carece de recomendaciones definitivas para seleccionar la más conveniente. En este trabajo se resumen los fundamentos de un procedimiento específico que fue propuesto y viene siendo evaluado dentro del grupo de trabajo de los autores, cuya finalidad es determinar parámetros de sistemas dinámicos lineales a partir de registros de respuesta en el dominio del tiempo. Los casos que se presentan están orientados a evaluar indicadores de la calidad de los resultados obtenidos y a confirmar el buen desempeño en diversas condiciones de carga, niveles de amortiguamiento y presencia de ruido en los datos de entrada.

## 1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de la identificación de parámetros es desarrollar o mejorar la representación matemática de un sistema físico usando datos experimentales, es decir adquirir la capacidad de reproducir correctamente su comportamiento bajo la acción de diversas condiciones de excitación. Se trata de establecer un puente entre el dominio de la realidad y el del modelo que pretende representarla, contribuyendo a entender mejor la primera y perfeccionar el segundo. Necesariamente todas las técnicas de identificación se apoyan en información obtenida a través de mediciones sobre sistemas reales, y desde una visión muy global estas técnicas pueden ser clasificadas como:

- *Identificación general o de caja negra*, donde el objetivo es establecer las relaciones entrada-salida del sistema, sin hacer interpretaciones físicas sobre la composición del modelo matemático capaz de cumplir esta función.
- *Identificación estructural o de caja blanca*, donde el correcto establecimiento de la relación entrada-salida esta supeditada a la identificación previa de los parámetros intrínsecos del sistema, todos ellos con claro sentido físico, como son los que representan su inercia, elasticidad y propiedades disipativas.

El amplio campo de la identificación de parámetros se desarrolló inicialmente en ingeniería eléctrica e ingeniería de control, para extenderse luego a las áreas de ingeniería mecánica e ingeniería civil. En estas últimas se convirtió en objeto de investigación intensiva por dos razones principales (Aguado y Martínez, 2003; Alvin *et al.* 2003):

- *la potencialidad ofrecida para resolver problemas de gran vigencia*, como son la validación de modelos desarrollados a través del método de los elementos finitos, la predicción y seguimiento de la evolución de daños estructurales y el estudio del comportamiento de mecanismos complejos en el área de la mecatrónica, entre otros; y
- *los continuos progresos de la tecnología en el campo del procesamiento electrónico de datos*, que al brindar computadoras cada vez más rápidas, mayores recursos de almacenamiento y mejores capacidades de representación visual, tuvieron gran impacto al estimular la simulación de sistemas complejos a través de técnicas numéricas.

Nótese que la *identificación general* o de *caja negra* es afín a los requerimientos de la ingeniería de control, mientras que la *identificación de caja blanca* cubre las necesidades de la identificación de parámetros en ingeniería mecánica y civil, dando lugar a líneas de investigación que son en gran medida independientes. Además, cabe acotar que estos problemas pertenecen al área de los denominados “inversos”, en contraposición con los problemas directos en los que se busca determinar la respuesta del sistema causada por la excitación aplicada.

Todo lo expuesto ha conducido a desarrollar numerosos y variados métodos de identificación de parámetros, que pueden ser clasificados con distintos criterios según:

- las técnicas de identificación (*paramétricos y no paramétricos*),
- el abordaje del problema (*dominio del tiempo o de la frecuencia*),
- la naturaleza del fenómeno representado (*lineal o no lineal*),
- el tipo de respuesta considerado (*estática o dinámica*),
- las condiciones de carga (*deterministas o aleatorias*) y
- el formalismo empleado (*algebraico, estadístico o de redes neuronales artificiales*).

En el último punto se hace referencia a las redes neuronales artificiales, que han adquirido mucha importancia por su capacidad de representar fenómenos altamente complejos tanto lineales como no lineales (Bin *et al.* 2009). Muy recientemente se ha incorporado otro factor de clasificación, que se refiere a la técnica empleada para capturar los datos referidos a la respuesta del sistema. Aunque, tradicionalmente se utilizaron sensores de aceleración, velocidad o desplazamiento (que se apoyan a su vez en diversos principios físicos), en la actualidad se está difundiendo el uso de cámaras para la captura de imágenes. El reconocimiento de la respuesta de estructuras a través

de la captura y procesamiento de imágenes ha demostrado ser muy efectivo y ha incorporado un nuevo campo de investigación que despierta interés y es muy promisorio (Jeon *et al*, 2010).

En resumen, de todo lo expresado se desprende que:

- no existe un método apto para identificar todo tipo de parámetros, más bien que cada enfoque tiene un campo de aplicación acotado,
- se presentan superposiciones entre ellos, por lo que no hay fronteras claras ni definitivas, y
- para asegurar la obtención de resultados válidos, el alcance y las limitaciones de los diversos métodos debe ser claramente comprendido.

Es necesario reconocer los principales inconvenientes que son característicos de la identificación directa de parámetros estructurales a partir de mediciones experimentales, tales como:

- la dificultad, muchas veces imposibilidad, de excitar la estructura en forma apropiada para la medición de los valores buscados;
- la necesidad de reducir sus grados de libertad al mínimo posible;
- los errores inherentes a las mediciones, que se propagan a través de los cálculos con impacto incierto en los resultados; y
- las condiciones requeridas por el proceso de identificación para asegurar la no singularidad y buen condicionamiento de los procesos numéricos involucrados.

En muchos casos esos problemas restringen la potencialidad de las técnicas de identificación, desalientan su utilización y/o los limitan al tratamiento de casos simples, de menor interés práctico.

Una opción para superar la dificultad para excitar adecuadamente la estructura es construir modelos, como por ejemplo representar el sistema en estudio mediante redes neuronales artificiales del tipo multicapa de perceptrones. Luego, en una segunda etapa, se utiliza el modelo neuronal para evaluar numéricamente la respuesta del sistema a las condiciones de excitación y/o iniciales que sean compatibles con las necesidades del proceso de identificación, y que no podían ser directamente aplicadas al sistema real.

Otra limitación está dada por la cantidad de grados de libertad utilizados para representar los sistemas, que tiene numerosas causas, entre ellas las restricciones que necesariamente tiene el equipamiento de adquisición de datos. Así, para identificar los parámetros de un sistema dinámico primero hay que acotarlo dimensionalmente, razón por la cual este proceso implica la definición de un sistema equivalente que es normalmente mucho más simple que el sistema o estructura que se espera representar. Así, la identificación de parámetros resulta un medio adecuado para la obtención de sistemas equivalentes y los valores característicos obtenidos representan propiedades que podrían denominarse condensadas, tanto másicas como disipativas y elásticas (Jae, 2009).

En este trabajo se pone el foco en la identificación de parámetros de sistemas estructurales a través de un procedimiento de “*caja blanca*”, que tiene por objetivo cuantificar sus propiedades intrínsecas elásticas y disipativas, representadas por las matrices de rigidez y amortiguamiento. Para ello se asume que la matriz de masas del sistema es conocida y que también lo es el valor de la carga impulsiva aplicada en un punto. El estudio se realiza en el dominio del tiempo a través de un abordaje algebraico y se asume que la estructura tiene un comportamiento elástico lineal.

El objetivo de este trabajo es continuar estudiando las posibilidades, sensibilidad y limitaciones de un método presentado con anterioridad (Giró *et al*. 2007, 2008, 2011). En este caso se trabaja con mayor cantidad de grados de libertad y se pone el foco en evaluar la incidencia de:

- el intervalo de tiempo que separa los registros utilizados de respuesta del sistema,
- la cantidad de registros empleados y
- el impacto del ruido presente en los registros de mediciones.

El presente documento está organizado como sigue: en la sección 2 se presenta el método propuesto, en la sección 3 se describe en detalle el caso de estudio que fue seleccionado para las evaluaciones previstas, en la sección 4 se exhiben y discuten los resultados hasta aquí obtenidos y finalmente en la sección 5 se enuncian las conclusiones y las previsiones para su continuación.

## 2. MÉTODO PARA IDENTIFICAR PARÁMETROS DE SISTEMAS DINÁMICOS

El equilibrio dinámico de un sistema elástico lineal de ‘ $n$ ’ grados de libertad queda representado por un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que tienen la siguiente forma general:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = u, \quad (1)$$

donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  representan las matrices de inercia, amortiguamiento y rigidez respectivamente,  $x$  es el vector desplazamientos o ‘respuesta’ del sistema,  $\dot{x}$  el vector velocidad,  $\ddot{x}$  el vector aceleración y  $u$  el vector cargas, donde todos los vectores son variables en el tiempo. Naturalmente, las matrices son de dimensión  $n \times n$  y los vectores de dimensión  $n \times 1$ .

El modelo disipativo aquí adoptado para el sistema, representado por la matriz  $C$ , merece dos aclaraciones: *i*) se trata de amortiguamiento viscoso que da lugar a fuerzas directamente proporcionales a la velocidad, y *ii*) se adopta el concepto de amortiguamiento proporcional, también llamado de Rayleigh, en el que su matriz se evalúa como  $C = \alpha M + \beta K$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  se determinan prefijando los factores de amortiguamiento deseados correspondientes a dos frecuencias de vibración. El amortiguamiento proporcional facilita la definición de este importante parámetro (matriz  $C$ ) y permite desacoplar el sistema de la Ec. (1) a través de un cambio de base caracterizado por la matriz de autovectores, todos ellos ortogonales entre sí.

Para resolver el problema se adopta un enfoque habitual en ingeniería de control, que consiste en reducir el orden del sistema de ecuaciones, replanteándolas en términos de un vector de estado  $q$  de dimensión  $2n \times 1$ :

$$q = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

de esa manera el sistema de la Ec. (1) se convierte en el siguiente sistema de primer orden:

$$\dot{q} = Aq + B\bar{u}, \quad (3)$$

que en forma extendida resulta:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

donde  $I$  es la matriz identidad y  $0$  representa una matriz o un vector nulo y

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n}, \quad B = \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad \text{y} \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n \times 1}. \quad (5)$$

Aplicando cargas que aseguren la presencia de los principales modos de vibración en el comportamiento del sistema y adoptando un cierto intervalo de muestreo  $\Delta t$ , se capturan ‘ $m$ ’ ( $m \geq 2n$ ) registros de la respuesta en sucesivos instantes de tiempo. Estos registros quedan representados por vectores desplazamientos ‘ $x$ ’ o aceleración ‘ $\ddot{x}$ ’ según el tipo de sensores utilizados. Derivando o integrando numéricamente ‘ $x$ ’ o ‘ $\ddot{x}$ ’, según el caso, se completan los vectores de respuesta del sistema de manera de conocer ‘ $x$ ’, ‘ $\dot{x}$ ’ y ‘ $\ddot{x}$ ’ en los ‘ $m$ ’ instantes considerados. Con estos vectores de respuesta y cargas aplicadas se definen las siguientes matrices  $n \times m$ :

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_m], \quad \dot{X} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3 \ \dots \ \dot{x}_m], \quad \ddot{X} = [\ddot{x}_1 \ \ddot{x}_2 \ \ddot{x}_3 \ \dots \ \ddot{x}_m] \quad \text{y} \quad U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_m]. \quad (6)$$

Reordenando esta información se definen las matrices que contienen los vectores de estado, sus derivadas y la matriz de cargas, según se indica:

$$Q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_m] = \left[ \begin{array}{c} \left\{ \dot{x} \right\}_1 \\ \left\{ x \right\}_1 \\ \left\{ \dot{x} \right\}_2 \\ \left\{ x \right\}_2 \\ \left\{ \dot{x} \right\}_3 \\ \left\{ x \right\}_3 \\ \dots \\ \left\{ \dot{x} \right\}_m \\ \left\{ x \right\}_m \end{array} \right]_{2n \times m}, \quad (7)$$

$$\dot{Q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dots \ \dot{q}_m] = \left[ \begin{array}{c} \left\{ \ddot{x} \right\}_1 \\ \left\{ \dot{x} \right\}_1 \\ \left\{ \ddot{x} \right\}_2 \\ \left\{ \dot{x} \right\}_2 \\ \left\{ \ddot{x} \right\}_3 \\ \left\{ \dot{x} \right\}_3 \\ \dots \\ \left\{ \ddot{x} \right\}_m \\ \left\{ \dot{x} \right\}_m \end{array} \right]_{2n \times m}, \quad (8)$$

$$\bar{U} = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{u}_3 \ \dots \ \bar{u}_m] = \left[ \begin{array}{c} \left\{ u \right\}_1 \\ \left\{ 0 \right\}_1 \\ \left\{ u \right\}_2 \\ \left\{ 0 \right\}_2 \\ \left\{ u \right\}_3 \\ \left\{ 0 \right\}_3 \\ \dots \\ \left\{ u \right\}_m \\ \left\{ 0 \right\}_m \end{array} \right]_{2n \times m}. \quad (9)$$

Extendiendo la Ec. (3) a los sucesivos intervalos de tiempo en que se midió la respuesta del sistema se tiene:

$$\dot{Q} = A Q + B \bar{U} \quad \rightarrow \quad A Q = \dot{Q} - B \bar{U}. \quad (10)$$

Planteada esta expresión interesa despejar la matriz  $A$ , por contener en su definición a las matrices de rigidez y amortiguamiento buscadas (Ec. (5)), para ello es necesario recurrir a la operación de pseudoinversa de Moore-Penrose de una matriz, denotada por ' $\dagger$ '. Posmultiplicando ambos miembros de la Ec. (10) por  $Q^T$  y posteriormente posmultiplicando por la inversa del producto  $[Q Q^T]$  podemos expresar a la matriz  $A$  en función de la pseudoinversa de la matriz de estados  $Q$ , denominada  $Q^\dagger$ , su derivada  $\dot{Q}$  y la matriz de cargas  $\bar{U}$ :

$$A = [\dot{Q} - B \bar{U}] Q^\dagger, \quad (11)$$

donde

$$Q^\dagger = Q^T [Q Q^T]^{-1}. \quad (12)$$

Notar que el planteo anterior es válido si la matriz  $[Q Q^T]$  es no singular. Adicionalmente y a los fines prácticos esa matriz debe estar bien condicionada para que se pueda calcular correctamente su inversa.

Partiendo de la Ec. (10) y recordando la definición de  $A$  dada en la Ec. (5) se tiene:

$$A = [\dot{Q} - B \bar{U}] Q^\dagger = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{donde } A_{11} = -M^{-1} C \quad \text{y} \quad A_{12} = -M^{-1} K. \quad (13)$$

Finalmente se obtienen las matrices de rigidez y amortiguamiento. Nótese que para ello es necesario conocer la matriz de masas  $M$ , lo que no representa un obstáculo ya que en cálculo estructural la distribución de masas puede ser estimada con precisión aceptable. Se tiene entonces:

$$\text{Matriz de rigidez} \quad \bar{K} = -M A_{12}, \quad (14)$$

$$\text{Matriz de amortiguamiento} \quad \bar{C} = -M A_{11}, \quad (15)$$

donde se denominan  $\bar{K}$  y  $\bar{C}$  a las matrices calculadas a partir de las mediciones.

El conocimiento de la submatriz  $A_{12}$  abre las puertas al cálculo de las frecuencias y modos normales de vibración del sistema dinámico. En efecto, volviendo a la Ec. (1), omitiendo las

fuerzas de amortiguamiento y suponiendo una respuesta armónica, queda planteado el clásico problema de autovalores:

$$(M^{-1} \bar{K} - \omega^2 I) \bar{x} = 0, \quad (16)$$

lo que equivale a decir que  $(-A_{12} - \omega^2 I) \bar{x} = 0$ . (17)

Definiendo la matriz  $\Phi$  que contiene en sus columnas los modos de vibración  $\bar{x}$ , se determina la matriz  $\Gamma$  de amortiguamiento generalizado del sistema,

$$\Gamma = \Phi^T \bar{C} \Phi = -\Phi M A_{11} \Phi. \quad (18)$$

Así se pueden conocer los factores de amortiguamiento  $\xi_i$  correspondientes a cada modo de vibración:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 2\xi_n \omega_n \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Dada la importancia que reviste la pseudoinversa de la matriz  $Q$  en el método propuesto, resulta conveniente profundizar un poco más este tema. La pseudoinversa de una matriz  $B$ , representada por  $B^\dagger$ , es una generalización de la matriz inversa, es decir que si  $B$  es una matriz cuadrada, entonces  $B^\dagger = B^{-1}$ .

Usando el concepto de pseudoinversa es posible determinar la mejor solución de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que carece de una solución única al estar sobredefinido por tener mayor cantidad de ecuaciones que de incógnitas. La solución que brinda la pseudoinversa equivale a la del método de mínimos cuadrados.

La matriz pseudoinversa  $B^\dagger$  de la matriz  $B$  existe y es única si se cumplen las siguientes cuatro condiciones, denominadas de Moore–Penrose (notación:  $H$  por hermítica y  $T$  por transpuesta):

$$B B^\dagger B = B, \quad B^\dagger B B^\dagger = B^\dagger, \quad (B B^\dagger)^H = B B^\dagger \quad \text{y} \quad (B^\dagger B)^H = B^\dagger B. \quad (20)$$

Además, otras importantes propiedades son las siguientes:

$$\begin{aligned} (B^\dagger)^\dagger &= B, \\ (B^\dagger)^T &= (B^T)^\dagger, \\ (\alpha B)^\dagger &= \alpha^{-1} B^\dagger \quad \text{para todo } \alpha \neq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

En lo que respecta al problema aquí tratado, cuya solución propuesta se apoya en la pseudoinversa de la matriz  $Q$  (Ec. (11)), como ya se mencionó es necesario que  $Q$  además de ser no singular y de rango completo, también esté bien condicionada. Para responder a esta exigencia habría que evaluar anticipadamente indicadores de consistencia temporal y espacial, tales como los propuestos por [Encio y Abe \(2002\)](#), pero por la forma en que está planteado el problema se carece de información suficiente para hacerlo. En este trabajo se busca establecer recomendaciones que conduzcan a que  $Q$  cumpla las condiciones exigidas a través de la excitación y registros de respuesta apropiados.

### 3. CASO DE ESTUDIO

#### 3.1 Modelo dinámico

Para evaluar el método propuesto se seleccionó un caso de estudio que puede ser representado por modelos con diferente número de grados de libertad y cuya solución exacta es conocida. Se estudia una columna de acero, empotrada en la base y libre en el extremo superior, de altura  $L = 530$  cm cuya sección transversal es constante: perfil normal 10 (doble T), área de  $10,6$  cm<sup>2</sup>, momentos de inercia respecto de los ejes principales  $I_x = 171$  cm<sup>4</sup> e  $I_y = 12,2$  cm<sup>4</sup> y peso por unidad de longitud  $\gamma = 0,0832$  Kg/cm. El módulo de elasticidad es  $E = 2,1 \times 10^6$  Kg/cm<sup>2</sup>.

Se trata de un problema de vibraciones de un medio continuo, cuyos modos y frecuencias naturales de vibración  $\omega$  se determinan analíticamente. En particular, para la condición de apoyos prevista, las frecuencias naturales son los valores que verifican la Ec. (22):

$$\cos \varphi + \frac{1}{\cosh \varphi} = 0 \quad \text{donde: } \varphi = \sqrt[4]{\frac{\gamma \omega^2}{gEI}} L . \quad (22)$$

En la Tabla 1 se muestran las primeras 10 frecuencias y períodos de vibración asumiendo que la viga flexiona sobre el eje del menor momento de inercia y considerando  $g = 981$  cm/s<sup>2</sup>.

Número del modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia [rad/seg]	6,880	43,11	120,72	236,56	391,05	584,17	815,90	1086,3	1395,2	1742,8
Período [segundos]	0,913	0,146	0,0520	0,0266	0,0161	0,0108	0,0077	0,0058	0,0045	0,0036

Tabla 1: Frecuencias naturales y períodos de vibración de la columna (modelo continuo)

Los resultados del modelo continuo sólo se muestran como una referencia, ya que los resultados que se presentan más adelante corresponden a modelos discretos de la columna que tienen una determinada cantidad de grados de libertad.

En esos modelos la matriz de rigidez de la columna es armada con elementos de viga de idéntico largo que vinculan nodos de dos grados de libertad (desplazamiento transversal y rotación), y luego la matriz de rigidez es condensada para eliminar del planteo las rotaciones de los nodos. Se obtienen así los modelos elásticos utilizados en el trabajo, con entre cinco y diez grados de libertad ( $n = 5 \dots 10$ ) asociados únicamente a desplazamientos transversales. Por su parte, la masa de cada segmento de viga es concentrada en sus extremos, con lo que se obtienen masas concentradas iguales en todos los nodos excepto en el último, al que se le asigna  $\frac{1}{3}$  de la masa del último elemento. Se tiene así:

$$m_k = \frac{L\gamma}{ng} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{y} \quad m_n = \frac{1}{3} \frac{L\gamma}{ng} . \quad (23)$$

La asignación al nodo del extremo de la columna de una masa menor permite aproximar mejor las propiedades del modelo discreto a las del modelo continuo. Se podrían obtener aún mejores resultados con un modelo de masas consistente que incluya la inercia rotatoria, que debería ser luego condensada al igual que lo fue la matriz de rigidez, pero el desarrollo de un modelo másico que reproduzca mejor los resultados del modelo continuo no es objetivo de este trabajo.

Para definir la matriz de amortiguamiento se asume que  $C = \alpha M + \beta K$  (amortiguamiento viscoso y proporcional) con  $\alpha = 0$  y valores de  $\beta$  variables.

Llegado a este punto es necesario destacar que para una correcta identificación de los parámetros del sistema dinámico, que son los elementos de las matrices  $\bar{K}$  y  $\bar{C}$ , los vectores

de la respuesta del sistema  $x$  deben contener la presencia de tantos modos de vibración como grados de libertad tengan los modelos. Es decir que:

$$x = \Phi p(t), \quad (24)$$

donde la matriz  $\Phi$  contiene en sus columnas los primeros  $n$  modos de vibración y  $p(t)$  representa el vector de los factores de participación de cada modo, que naturalmente son funciones del tiempo, por ahora desconocidos. La correlación entre grados de libertad y modos de vibración constituye una limitación a la cantidad de grados de libertad a ser utilizados, ya que los modos de frecuencias elevadas son en general de escasa amplitud y ésta decae muy rápidamente en los sistemas más amortiguados, lo que los hace más sensible a los errores.

Es necesario aquí reconocer que, naturalmente, la identificación de parámetros requiere partir de datos obtenidos en mediciones experimentales. Sin embargo, como el objetivo de este trabajo es el de evaluar el método y los indicadores utilizados para validar sus resultados, se usaron mediciones “virtuales” obtenidas a partir de un modelo numérico “exacto” para obtener valores de comparación. Esto además permitió contar con registros de datos que incluyen errores aleatorios de características prefijadas, tanto en la carga como en la respuesta. Estas mediciones virtuales son utilizadas para identificar los parámetros dinámicos de la estructura, los que pueden a su vez ser contrastados con los valores conocidos de las matrices de masa y de amortiguamiento del sistema estudiado. Obviamente, el modelo numérico debe reproducir fielmente el comportamiento de la estructura real.

### 3.2 Excitación del modelo numérico y su respuesta en el dominio del tiempo

En este trabajo se utiliza en todos los casos una condición de carga impulsiva de amplitud  $P = 10$  Kg aplicada durante 0,07 seg. La carga es aplicada en el nodo superior de la columna en dirección perpendicular al eje vertical de la misma y excitando la dirección del menor momento de inercia. Las cargas impulsivas, juntamente con la carga en escalón, son las más convenientes para asegurar la excitación de todos los modos de vibración de los sistemas mecánicos. Debemos recordar que la aplicación del método propuesto está supeditado a que pueda determinarse la pseudoinversa de la matriz  $Q$ , lo que, según se mencionó anteriormente, no solo implica que sea de rango completo sino también que esté bien condicionada. Para ello, más que un diagnóstico sobre el buen condicionamiento de  $Q$ , lo que se busca es asegurar las condiciones requeridas a través de una apropiada excitación de la estructura.

En los casos estudiados, las respuestas de los sistemas para la condición adoptada de excitación fueron calculadas por integración numérica de la Ec. (1). Esto se debe a la necesidad de obtener valores precisos de la respuesta para poder cuantificar los errores cometidos y para ello se utilizaron dos implementaciones del método de Houbolt (Bathe y Wilson, 1976). Una primera implementación responde a la concepción original de Houbolt, donde la Ec. (1) es replanteada con una formación regresiva a partir de las siguientes fórmulas de derivación numérica:

$$\dot{x}_t = (11x_t - 18x_{t-\Delta t} + 9x_{t-2\Delta t} - 2x_{t-3\Delta t}) / (6\Delta t), \quad (25)$$

$$\ddot{x}_t = (2x_t - 5x_{t-\Delta t} + 4x_{t-2\Delta t} - x_{t-3\Delta t}) / (\Delta t^2). \quad (26)$$

La segunda implementación sigue el mismo lineamiento de Houbolt, pero se utilizan fórmulas de derivación numérica de mayor orden:

$$\dot{x}_t = (25x_t - 48x_{t-\Delta t} + 36x_{t-2\Delta t} - 16x_{t-3\Delta t} + 3x_{t-4\Delta t}) / (12\Delta t), \quad (27)$$

$$\ddot{x}_t = (35x_t - 104x_{t-\Delta t} + 114x_{t-2\Delta t} - 56x_{t-3\Delta t} + 11x_{t-4\Delta t}) / (12\Delta t^2). \quad (28)$$

Las respuestas fueron obtenidas en un intervalo de 2 seg con un  $\Delta t = 0,0005$  seg, lo que permitió conocer el vector desplazamientos 'x' en 4000 puntos del intervalo estudiado. En las Figuras 1 y 2 se presentan las curvas de respuesta que corresponden a modelos de 5 y 10 Grados de Libertad Dinámicos (GLD). En ambos casos las curvas representan la evolución de los desplazamientos de los nodos de los modelos en función del tiempo durante el intervalo analizado de 2 seg. Cabe aclarar que las diferencias entre los resultados obtenidos con las dos implementaciones del método de Houbolt no alcanzan a ser percibidos dada la escala de los gráficos.

En el ángulo inferior izquierdo de las Figuras 1 y 2 se muestra un esquema de la columna en la que se indican los nodos del modelo y la carga aplicada. Los nodos están igualmente espaciados, tienen masas concentradas y están conectados entre sí por elementos prismáticos que representan la rigidez de la columna.

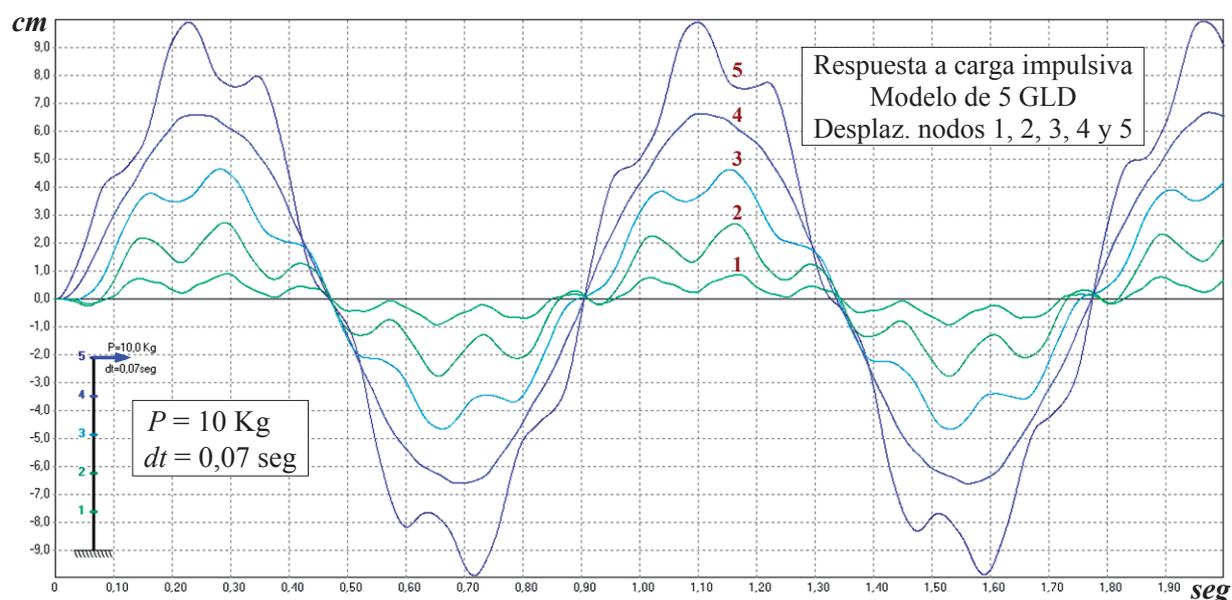


Figura 1: Respuesta del modelo de 5 GLD a una carga impulsiva en un intervalo de 2 segundos

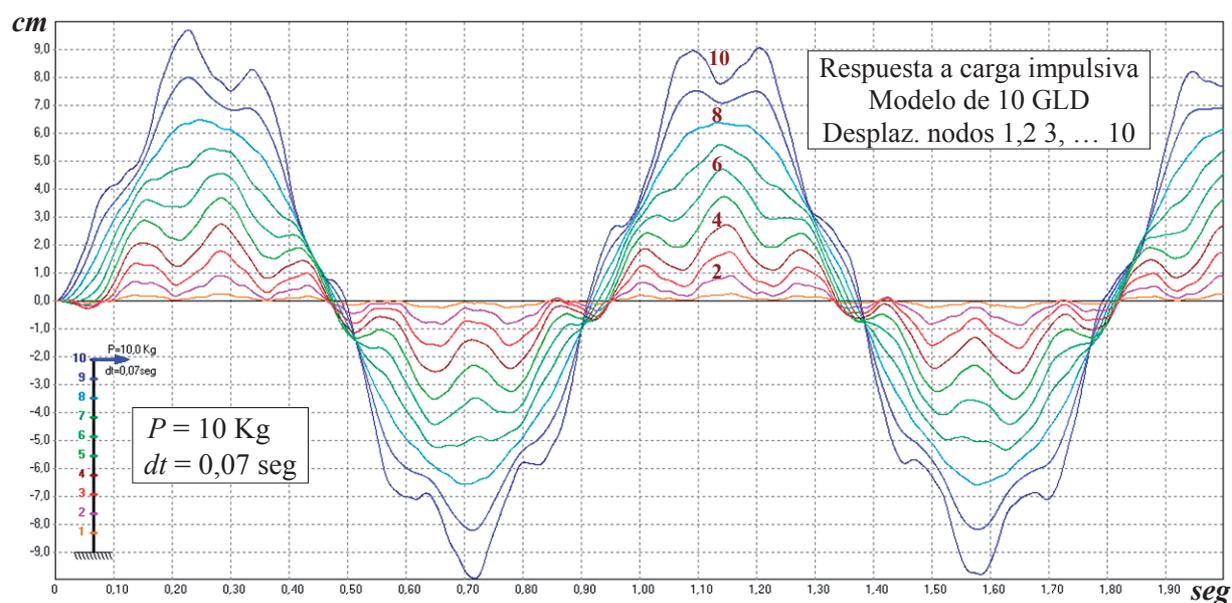


Figura 2: Respuesta del modelo de 10 GLD a una carga impulsiva en un intervalo de 2 segundos

Se observa que las respuestas de los dos modelos son similares, pero los desplazamientos de los puntos que están presentes en ambos modelos muestran diferencias que, aunque relativamente pequeñas, son notorias. Esto es a raíz de que en cada caso los desplazamientos incluyen diferente cantidad de componentes armónicas.

La importancia de la presencia de un aporte significativo de todas las armónicas en la respuesta del sistema es un tema central en la identificación de parámetros, lo que justifica ser tratado con más detalle. Con este fin se presentan en la Figura 3 los desplazamientos superpuestos del extremo y del punto medio de la columna, correspondientes a cuatro modelos de 6, 8, 10 y 12 GLD.

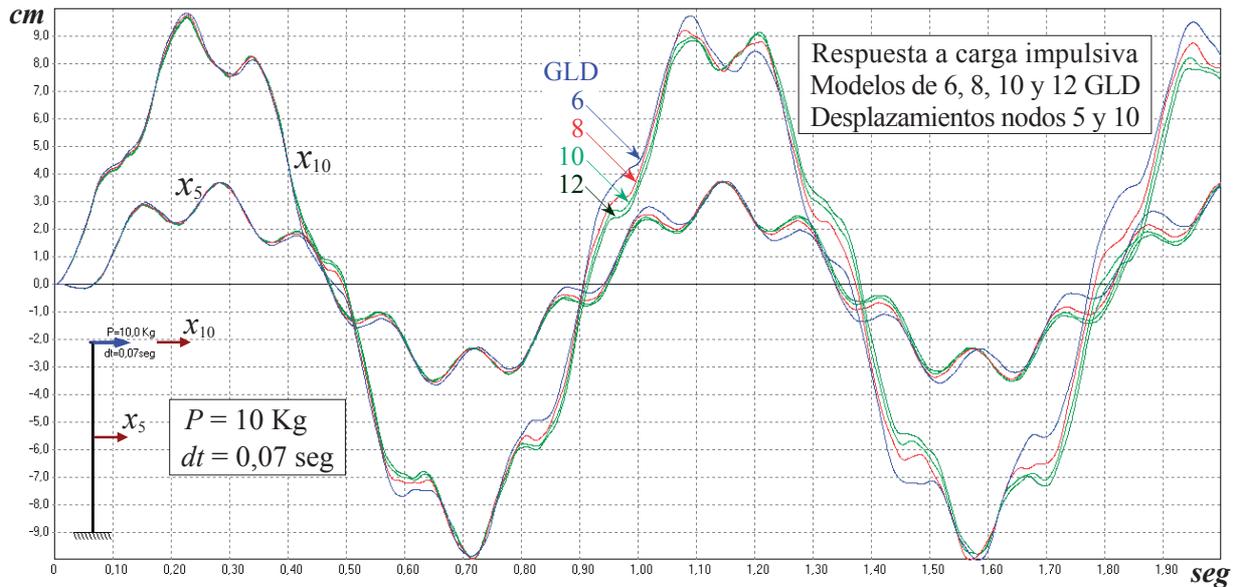


Figura 3: Respuesta del extremo y punto medio de la columnas de modelos de 6, 8, 10 y 12 GLD

Como puede observarse en las curvas que corresponden al movimiento del punto extremo ( $x_{10}$ ) y medio ( $x_5$ ) de la columna, la presencia de los primeros dos modos de vibración es claramente dominante (períodos  $T_1 = 0,913 \text{ seg}$  y  $T_2 = 0,146 \text{ seg}$  para el modelo continuo con  $\infty$  GLD de la Tabla 1). Tanto es así que en el primer medio segundo las respuestas de los modelos de 6, 8, 10 y 12 GLD son prácticamente coincidentes, lo que significa que el aporte de los modos de frecuencias más elevadas a la respuesta global del sistema tiene una importancia relativa muy escasa.

En la Tabla 2 donde se presentan las frecuencias naturales de los distintos modelos, se observa que en todos los casos las frecuencias más bajas son prácticamente las mismas, lo que confirma también la coincidencia ya comentada en las respuestas mostradas en la Figura 3.

Grados de Libertad del modelo (GLD)	Frecuencia de los modos de vibración [rad/seg]									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\infty$	6,880	43,11	120,72	236,56	391,05	584,17	815,90	1086,3	1395,2	1742,8
10	7,087	43,93	121,67	235,32	382,89	560,63	762,00	973,37	1167,8	1306,0
9	7,106	43,93	121,32	233,75	378,39	549,94	737,65	917,65	1050,0	
8	7,130	43,91	120,73	231,28	371,49	533,03	696,12	821,30		
7	7,159	43,84	119,73	227,32	360,39	503,62	620,10			
6	7,195	43,65	117,94	220,64	340,80	446,47				
5	7,239	43,23	114,62	208,57	300,61					

Tabla 2: Frecuencias naturales y períodos de vibración de la columna (modelos discretos)

El escaso aporte de los modos de frecuencias más elevadas a la respuesta global del sistema es un aspecto muy importante a considerar ya que, como fue anticipado, el buen condicionamiento de las matrices involucradas en el proceso algebraico de identificación está supeditado a la presencia efectiva de un número de modos de vibración similar a la cantidad de GLD considerados. En otras palabras, esto impone un límite a la cantidad de GLD de los modelos que pueden ser identificados con un margen de error aceptable.

### 3.3 Condiciones en la que se identifican los parámetros

En todos los casos para la identificación de parámetros fueron utilizados  $m$  registros de respuesta del sistema, que se seleccionaron con un intervalo de tiempo constante  $\Delta t'$  a partir del instante en que se inicia la aplicación de la carga. Esto con el fin de asegurar que una parte de la respuesta corresponde al intervalo de aplicación de la carga y el resto corresponde al sistema vibrando libremente. Esto es posible en los ensayos reales ya que la utilización de martillos dotados de una celda de carga permite registrar la magnitud de la carga aplicada y su evolución en el tiempo.

Simulaciones realizadas, que no son reproducidas aquí, han demostrado la conveniencia de incluir registros que estén dentro del intervalo de aplicación de la carga. Este tema merece seguir siendo estudiado en el futuro, ya que la utilización de registros que sólo contengan datos de la estructura vibrando libremente independizaría los resultados de la precisión con puede ser determinada la carga aplicada, eliminando la necesidad de la medición precisa de la carga aplicada y una posible fuente de error.

Por último, para completar las pruebas y con el fin de simular perturbaciones en las lecturas de las mediciones se introdujeron niveles conocidos de errores a los registros usados como datos. Para ello se incorporaron diversos niveles de ruido a las respuestas obtenidas numéricamente, considerando errores aleatorios con distribución Gaussiana, media nula y amplitud máxima especificada.

### 3.4 Indicadores de la calidad de los resultados

La necesidad de evaluar la calidad de los parámetros identificados llevó a adoptar distintos indicadores y definir las correspondientes métricas para la determinación de cada uno.

Los primeros apuntan a evaluar directamente la calidad de las dos principales matrices identificadas, rigidez y amortiguamiento, proponiéndose los indicadores  $E_K^{\%}$  y  $E_C^{\%}$ . El primero representa el error porcentual de la matriz de rigidez identificada ( $\bar{K}$ ) con respecto a la matriz de rigidez conocida ( $K$ ), para lo cual se calculó la diferencia media cuadrática ( $D_K$ ) entre los elementos de  $\bar{K}$  y  $K$ , se la multiplicó por 100 y se la dividió por el valor promedio de los elementos de  $K$  (Ec. (29)):

$$E_K^{\%} = \frac{100 D_K}{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |K_{ik}|} \quad \text{donde} \quad D_K = \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (\bar{K}_{ik} - K_{ik})^2} . \quad (29)$$

El segundo indicador  $E_C^{\%}$  representa el error porcentual de la matriz de amortiguamiento identificada ( $\bar{C}$ ) con respecto a la matriz conocida ( $C$ ), y se calcula como muestra la Ec. (30) de manera similar al error de la matriz de rigidez:

$$E_C^{\%} = \frac{100 D_C}{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |C_{ik}|} \quad \text{donde} \quad D_C = \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (\bar{C}_{ik} - C_{ik})^2} . \quad (30)$$

En segunda instancia, se buscaron indicadores que representan las consecuencias de la calidad de los parámetros identificados en los resultados del análisis dinámico de la estructura estudiada y no directamente la calidad de las matrices obtenidas. En otras palabras, se buscaron indicadores del impacto de los errores presentes en los elementos identificados de la matriz de rigidez  $\bar{K}$  sobre los modos de vibración determinados a partir del planteo de autovalores (Ec. (17)). Con este fin se adoptaron tres indicadores utilizados en la literatura para evaluar la similitud entre modos de vibración, que son calculados a partir de la matriz modal  $\Phi$  que es obtenida a partir de  $K$  y los calculados usando la matriz modal  $\bar{\Phi}$  que es obtenida a partir de  $\bar{K}$ . Estos son:

a) **Factor de escala modal (MSF, Modal Scale Factor)** (Li *et al.*, 2004)

$$MSF = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\Phi}_k^T \bar{\Phi}_k}{\Phi_k^T \Phi_k} \quad (31)$$

b) **Criterio de garantía modal (MAC, Modal Assurance Criterion)** (Brownjohn *et al.*, 2000)

$$MAC = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(\bar{\Phi}_k^T \Phi_k)^2}{(\Phi_k^T \Phi_k)(\bar{\Phi}_k^T \bar{\Phi}_k)} \quad (32)$$

c) **Similitud de modos de vibración (SVM, Similarity of Vibration Modes)** (Li *et al.*, 2004)

$$SVM = \sum_{k=1}^n \frac{(\bar{\Phi}_k - \Phi_k)^T (\bar{\Phi}_k - \Phi_k)}{\bar{\Phi}_k^T \Phi_k} \quad (33)$$

Notar que tanto *MSF* como *MAC* tienden a uno a medida que los modos son más similares entre sí, mientras que *SVM* tiende a cero en la misma circunstancia.

Finalmente, se consideró necesario usar un indicador de la calidad de los parámetros identificados cuya evaluación se apoye exclusivamente en los resultados obtenidos. Esto debido a que en muchos casos no son conocidas las matrices de rigidez y de amortiguamiento originales de estructuras reales, o lo son en forma aproximada, no resultando referencias válidas para el cálculo de errores. Con este fin se propone un indicador que refleja la calidad de las cuatro particiones de la matriz 'A' a partir de las cualidades que se espera de las mismas. Esto es  $\bar{K}$  y  $\bar{C}$  deben ser simétricas y las particiones de  $A_{21}$  y  $A_{22}$  deben tener sus elementos extradiagonales nulos por tratarse de la matriz identidad ( $I$ ) y una matriz nula ( $0$ ). Proponemos para ello un indicador de la calidad de la matriz  $A$  que denotamos *CMA* y que definimos a continuación.

d) **Calidad de la Matriz A (CMA)**

$$CMA = \frac{2}{n^2 - n} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n |\bar{K}_{ik} - \bar{K}_{ki}| + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n |\bar{C}_{ik} - \bar{C}_{ki}| \right) + \frac{1}{n^2 - n} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n |\bar{I}_{ik}| + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n |\bar{0}_{ik}| \right) \quad (34)$$

#### 4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Como fue anticipado, las pruebas que se presentan en este trabajo tuvieron dos objetivos:

- 1) confirmar que los indicadores de calidad propuestos son aptos para validar los procesos de identificación y
- 2) continuar estudiando el proceso de identificación, esta vez con modelos de numerosos grados de libertad.

#### 4.1 Evaluación de los indicadores de calidad

**Caso 1:** Estudio del comportamiento de los indicadores  $E_K^{\%}$ ,  $E_C^{\%}$  y  $CMA$  con un número elevado de grados de libertad y en ausencia de amortiguamiento.

La finalidad de este estudio fue corroborar la correlación entre  $E_K^{\%}$ , que se calcula a partir de las diferencias entre los elementos de matrices conocidas y las identificadas, y el nuevo indicador  $CMA$  (Ec. (34)) que se apoya exclusivamente en el análisis de la matriz principal 'A' (Ec. (13)). Para ello se utilizó un modelo de 10 GLD con el fin de exponer al proceso a una condición extrema por la presencia de modos de alta frecuencia. En efecto, la mayor frecuencia natural es 185 veces mayor que la frecuencia fundamental. Para el estudio se utilizaron 30 y 60 registros ( $m$ ) con intervalos  $\Delta t'$  variables entre 0,005 y 0,23 seg, de modo que la totalidad de los registros empleados en la identificación estaban igualmente distribuidos en "ventanas de tiempo" de hasta 0,69 y 1,38 segundos. Los resultados son mostrados en la Figura 4.

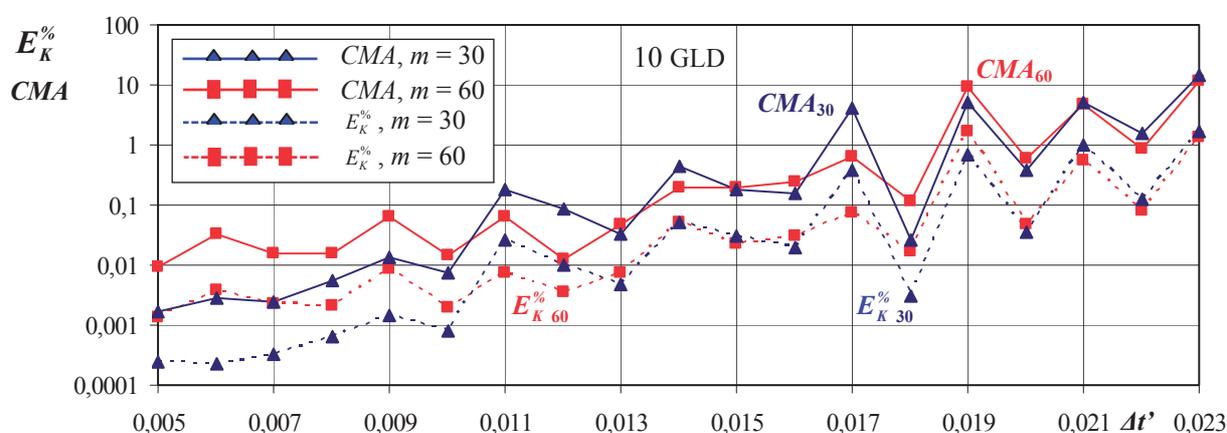


Figura 4: Evolución de los indicadores  $E_K^{\%}$  y  $CMA$  al variar el intervalo  $\Delta t'$  en un modelo de 10 GLD

Observando el gráfico se comprueba que:

- 1) Todos los indicadores muestran una tendencia creciente a medida que aumenta el intervalo  $\Delta t'$ .
- 2) Hay una estrecha correlación entre los indicadores  $E_K^{\%}$  y  $CMA$  cuando  $m$  es igual a 30 y 60.
- 3) La magnitud del error es sensible al intervalo entre registros  $\Delta t'$ , y lo es en una medida mucho mayor a la sensibilidad al tamaño de las ventanas de tiempo utilizadas (0,69 y 1,38 seg).
- 4) Una conclusión muy valiosa es que se ha comprobado que el indicador  $CMA$ , que no requiere conocer  $K$  y  $C$ , es apto para calificar los resultados obtenidos del proceso de identificación.

**Caso 2:** Estudio del comportamiento del indicador  $MSF$  (Ec. (31)) con un número elevado de grados de libertad y en ausencia de amortiguamiento.

Se utiliza el mismo modelo del caso anterior en las mismas condiciones y los resultados son representados en la Figura 5. Aquí cabe recordar que  $MSF$  representa el impacto de la calidad de los parámetros identificados en los modos de vibración de la estructura, que son obtenidos a partir de la matriz de rigidez identificada. Es decir, mide indirectamente la calidad de la matriz  $\bar{K}$  obtenida. Observando los gráficos para  $m = 30$  y 60 registros se concluye que:

- 1) Hasta intervalos del orden de  $\Delta t' = 0,01$  seg el indicador está próximo a la unidad, lo que significa que los modos de vibración son correctos.
- 2) En el intervalo  $0,010 < \Delta t' < 0,016$  el indicador muestra mayor dispersión, dentro de un margen de  $1 \pm 0,05$ , lo que también puede ser asociado a modos de vibración de calidad aceptable.
- 3) Cuando  $\Delta t' > 0,016$  el indicador muestra una gran dispersión.

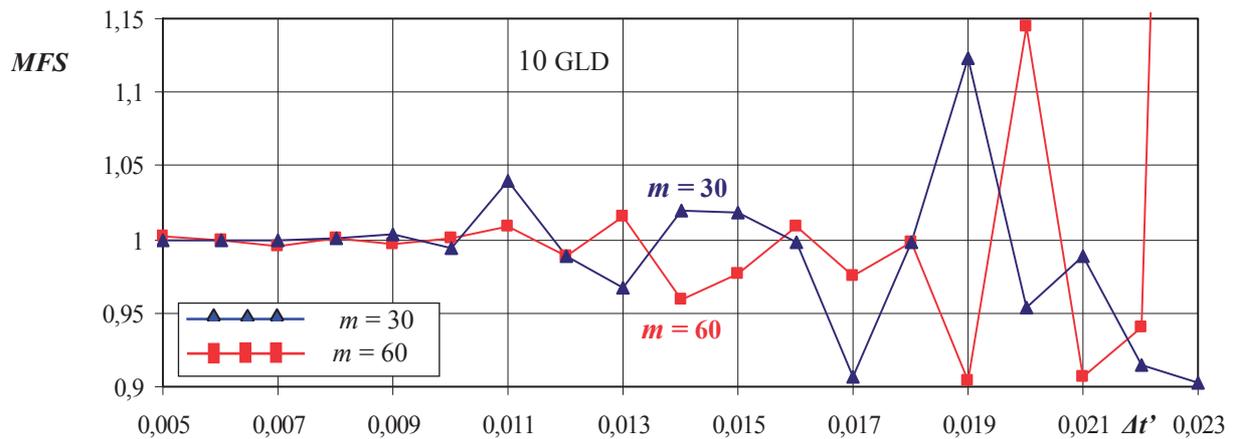


Figura 5: Evolución del indicador  $MSF$  al variar el intervalo  $\Delta t'$  en un modelo de 10 GLD

**Caso 3:** Estudio de la evolución de la mayor frecuencia natural de vibración en un modelo con un número elevado de grados de libertad y en ausencia de amortiguamiento.

En lo anterior se comprobó la evolución de los diversos indicadores al aumentar el intervalo  $\Delta t'$  que separa los registros de datos, pero existe la necesidad de relacionarlos con la calidad de los resultados. Para esto se tomó como referencia la mayor frecuencia natural de vibración del modelo, en este caso de 10 GLD, y se la representó en la Figura 6 para el caso  $m$  igual a 30 y 60. Al comparar las Figuras 4, 5 y 6 se desprende que:

- 1) La frecuencia (1306 rad/seg) permanece inalterada hasta que  $\Delta t' = 0,016$ , intervalo que corresponde a  $E_K^{\%} < 0,03$ ,  $CMA < 0,3$  y  $0,95 \leq MSF \leq 1,05$ .
- 2) Al salir los indicadores de esos límites las frecuencias muestran mucha dispersión, lo que está delatando serios problemas en el proceso de identificación de la matriz de rigidez.

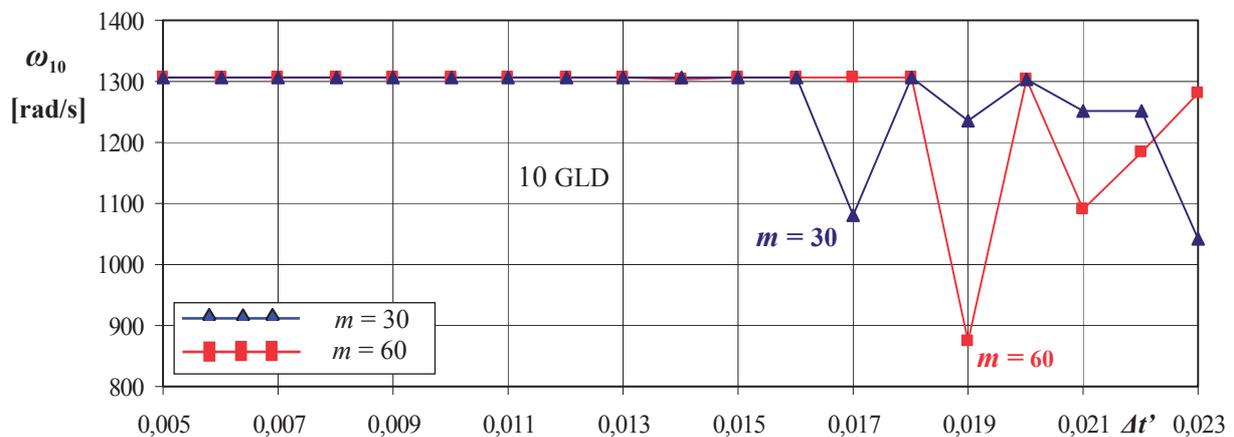


Figura 6: Evolución de la frecuencia más elevada al variar el intervalo  $\Delta t'$  en un modelo de 10 GLD

**Caso 4:** Estudio del comportamiento de los indicadores  $E_K^{\%}$  y  $CMA$  con un número moderado de grados de libertad y en ausencia de amortiguamiento.

Ya fue anticipada la sensibilidad que tiene el procedimiento de identificación a la presencia de todos los modos de vibración en los registros de datos utilizados, lo que se hace crítico en los casos de modos de frecuencias muy elevadas. Por este motivo se repitió el estudio anterior en un caso más favorable, adoptándose un modelo con la mitad de los grados de libertad, es decir cinco. Se mantuvieron las cantidades de registros de datos ( $m = 30$  y  $60$ ) y el intervalo entre registros a partir de  $\Delta t' = 0,005$ , con la salvedad que al comprobarse un mejor desempeño se llegó hasta un intervalo  $\Delta t' = 0,03$ , lo que significa ventanas de tiempo de mayor amplitud (0,9 y 1,8 seg). Los resultados son mostrados en la Figura 7.

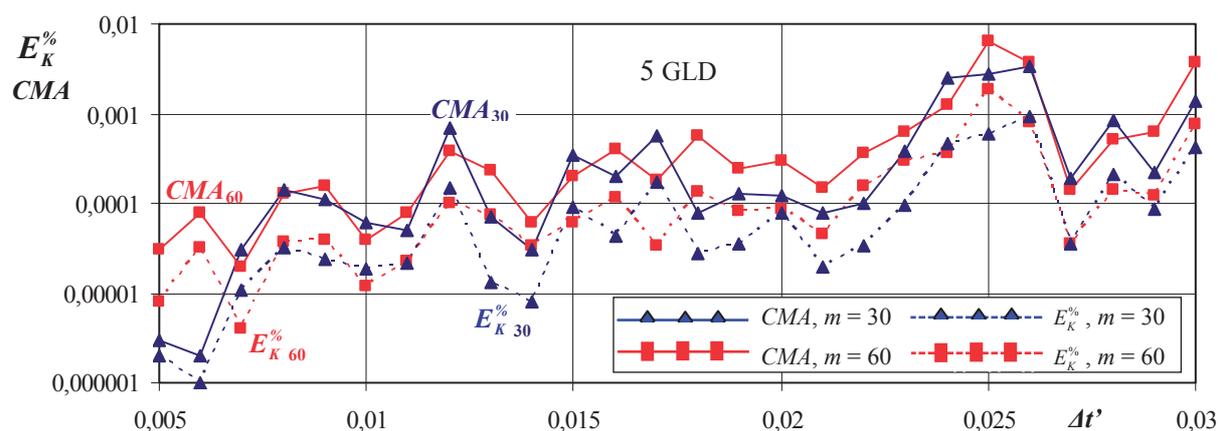


Figura 7: Evolución de los indicadores  $E_K\%$  y  $CMA$  al variar el intervalo  $\Delta t'$  en un modelo de 5 GLD

Comparando estas curvas con las de la Figura 4 se comprueba que:

- 1) Todos los indicadores siguen mostrando una tendencia creciente a medida que aumenta  $\Delta t'$ .
- 2) Se mantiene la estrecha correlación entre los indicadores  $E_K\%$  y  $CMA$  para  $m$  igual a 30 y 60.
- 3) La magnitud del error es sensible al intervalo  $\Delta t'$  entre registros, y aquí lo es en una medida mucho mayor a la sensibilidad al tamaño de las ventanas de tiempo utilizadas (0,9 y 1,8 seg).
- 4) La reducción de los grados de libertad a la mitad, que llevó a una relación del orden de 40 entre la mayor frecuencia y la fundamental, tuvo un muy fuerte impacto en los indicadores de error, que resultaron de amplitud 1000 veces menor.

Como se puede comprobar, al haber menos grados de libertad los modos elevados tienen mayor presencia en los registros de respuesta del sistema y la calidad de los parámetros identificados crece significativamente. Este estudio muestra nuevamente que el indicador  $CMA$  es completamente apto para calificar los resultados obtenidos del proceso de identificación.

**Caso 5:** Estudio del comportamiento del indicador  $MSF$  (Ec. (31)) cuando se usa un número moderado de grados de libertad y en ausencia de amortiguamiento.

Aquí se utiliza el indicador  $MSF$  al evaluar el modelo del caso anterior y en las mismas condiciones. Los resultados son presentados en el gráfico de la Figura 8.

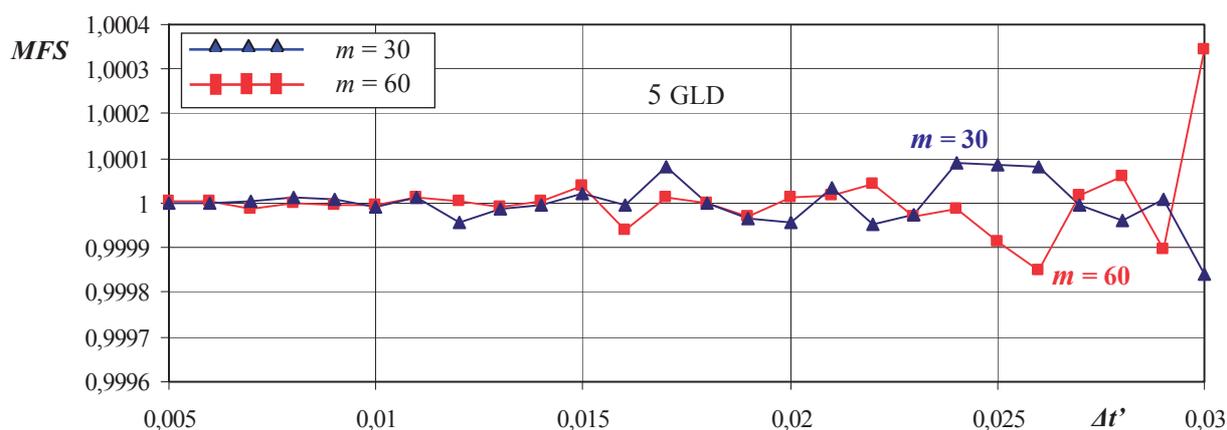


Figura 8: Evolución del indicador  $MSF$  al variar el intervalo  $\Delta t'$  en un modelo de 5 GLD

Comparando las curvas obtenidas con 30 y 60 registros mostradas en las Figuras 7 y 8 puede observarse que el indicador  $MSF$  está siempre próximo a la unidad, ya que la mayor desviación (para  $\Delta t' = 0,03$  seg) es de tan solo 0,0004, lo que garantiza que los modos de vibración son correctos. Con respecto a la mayor frecuencia, su valor fue en todos los casos  $\omega_5 = 300,61$  rad/seg, lo que no justificó su representación gráfica.

**Caso 6:** Estudio del comportamiento de los indicadores  $E_K^{\%}$ ,  $E_C^{\%}$  y  $CMA$  al variar el factor de amortiguamiento  $\beta$ .

Este estudio tuvo la finalidad de corroborar la correlación entre  $E_K^{\%}$ ,  $E_C^{\%}$  y  $CMA$  en sistemas amortiguados. Para ello se utilizó un modelo de 8 GLD, evitándose así la condición extrema que ocasiona la presencia de modos de vibración de muy alta frecuencia. En este caso la mayor frecuencia natural es 115 veces mayor que la frecuencia fundamental del sistema, lo que representa un caso intermedio entre los modelos de 10 GLD ( $\omega_{10}/\omega_1 = 185$ ) y 5 GLD ( $\omega_5/\omega_1 = 40$ ) estudiados anteriormente. Aquí se utilizaron treinta registros de datos ( $m = 30$ ) con un intervalo entre ellos  $\Delta t' = 0,01$  seg, donde las muestras estaban igualmente distribuidas en una ventana de tiempo de 0,30 segundos. Los resultados son presentados en la Figura 9.

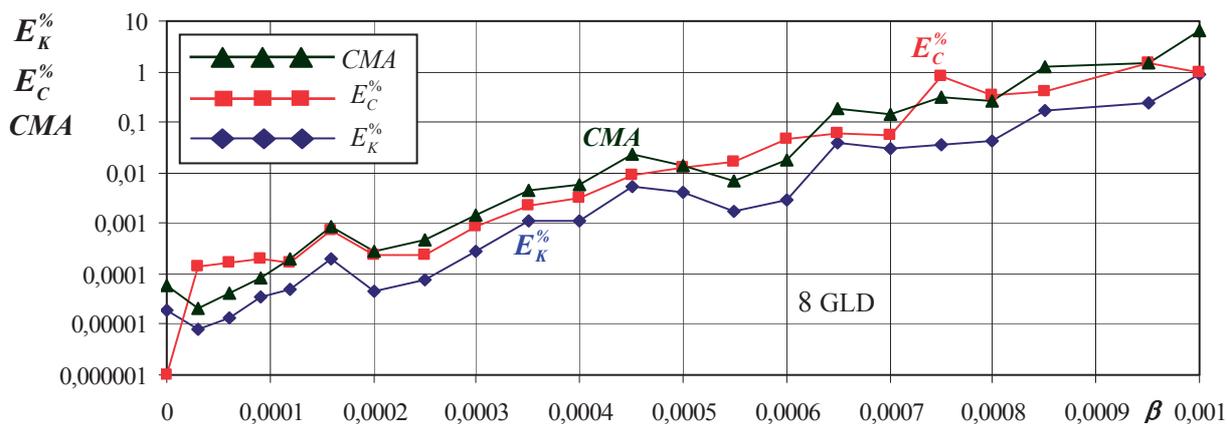


Figura 9: Evolución de los indicadores  $E_K^{\%}$ ,  $E_C^{\%}$  y  $CMA$  al variar el factor  $\beta$  en un modelo de 8 GLD

Al igual que lo ocurrido en los casos 1 y 4, se comprueba que todos los indicadores siguen mostrando una tendencia general creciente, en este caso a medida que aumenta el factor de amortiguamiento  $\beta$ , y se mantiene la estrecha correlación entre los indicadores  $E_K^{\%}$ ,  $E_C^{\%}$  y  $CMA$ . Además, la magnitud del error  $E_K^{\%}$  de la matriz de rigidez es siempre menor que el error  $E_C^{\%}$  de la matriz de amortiguamiento, y además este último se cruza repetidas veces con el indicador  $CMA$  a medida que crece  $\beta$ . Se confirma la aptitud de  $CMA$  como indicador característico de la calidad de la solución obtenida.

**Caso 7:** Estudio del comportamiento de los indicadores  $MSF$ ,  $MAC$  y  $\omega_8$  al variar el factor de amortiguamiento  $\beta$ .

Se utiliza el mismo modelo del caso anterior y en las mismas condiciones se determinan  $MSF$ ,  $MAC$  y  $\omega_8$  que son representados en el gráfico de la Figura 10.

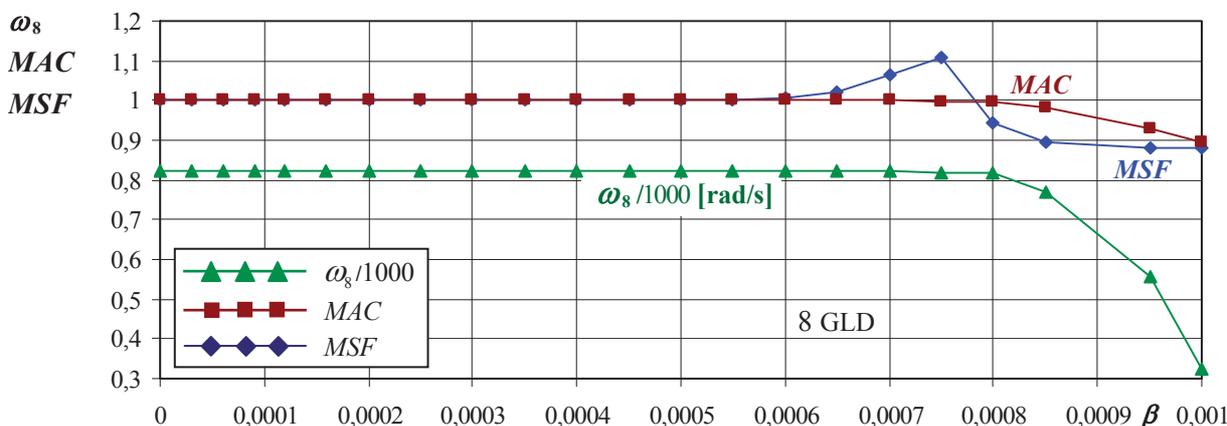


Figura 10: Evolución de los indicadores  $MSF$ ,  $MAC$  y  $\omega_8$  al variar el factor  $\beta$  en un modelo de 8 GLD

Al estudiarse el gráfico se advierte que *MSF* comienza a mostrar un comportamiento irregular a partir de  $\beta = 0,0006$ , que es el punto a partir del cual la mayor frecuencia manifiesta las primeras, casi imperceptibles variaciones. Por el contrario, el indicador *MAC* se mantiene estacionario hasta que la frecuencia  $\omega_8$  presenta una variación significativa, lo que ocurre para  $\beta = 0,0008$ . Esto muestra que, si bien necesitan ser correctamente interpretados, ambos indicadores cumplen con la finalidad de advertir que el proceso de identificación ha entrado en una zona que conducirá a resultados inciertos.

**Caso 8:** Estudio de la evolución de los factores de amortiguamiento  $\xi_7$  y  $\xi_8$  al variar el factor de amortiguamiento  $\beta$ .

Una vez conocidos los modos de vibración, la matriz modal  $\Phi$  permite desacoplar al sistema de ecuaciones y determinar la matriz de amortiguamiento generalizado (Ec. (18)), que por ser diagonal permite a su vez conocer con facilidad los factores de amortiguamiento  $\xi$  de cada modo de vibración (Ec. (19)). Se presentó así la inquietud por conocer la evolución de estos factores al aumentar  $\beta$ , en particular de los más altos, lo que es representado en la Figura 11.

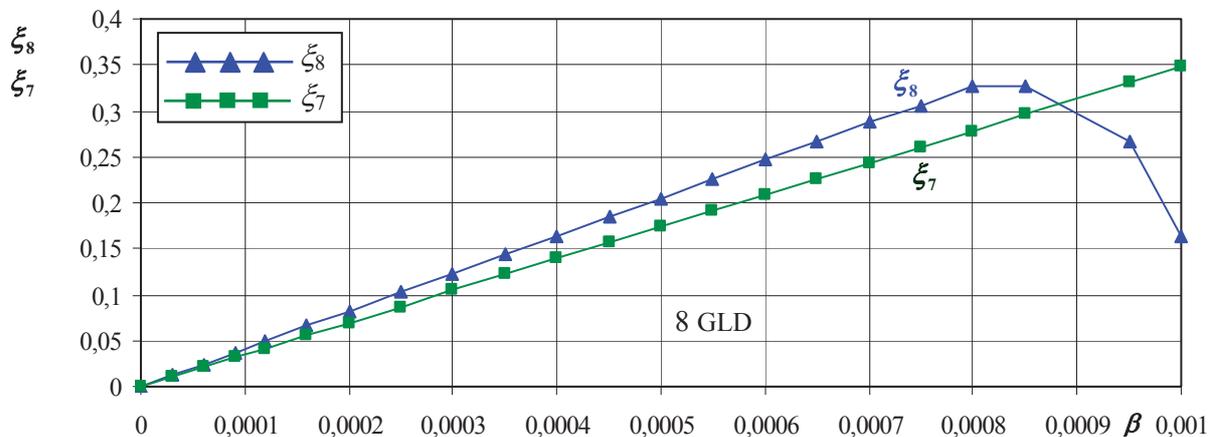


Figura 11: Evolución de los factores de amortiguamiento  $\xi_7$  y  $\xi_8$  al variar  $\beta$  en un modelo de 8 GLD

Como puede comprobarse, los factores  $\xi_7$  y  $\xi_8$  crecen linealmente con  $\beta$  hasta que este último alcanza el valor  $\beta = 0,0008$  y a partir de allí  $\xi_8$  comienza a caer.  $\beta = 0,0008$  es el punto donde el indicador *MAC* se aleja de uno y la frecuencia natural deja de permanecer estacionaria. En la Tabla 3 se muestran las frecuencias calculadas a partir de la matriz de rigidez  $K$  de la viga, las frecuencias calculadas con la matriz de rigidez  $\bar{K}$  obtenida del proceso de identificación y los valores de  $\xi$  que corresponden a los ocho modos de vibración cuando  $\beta$  alcanzó el valor crítico ya señalado.

Tal como ocurre en el caso recién presentado, el máximo nivel de amortiguamiento soportado por el procedimiento de identificación es aquél que lleva el factor  $\xi$  correspondiente a la frecuencia más alta a valores del orden de 0,3.

Número del modo	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencias [rad/s] calculadas con $K$	7,130	43,91	120,73	231,28	371,49	533,03	696,12	821,30
Frecuencias [rad/s] calculadas con $\bar{K}$	7,130	43,91	120,73	231,28	371,49	533,03	696,09	818,99
Factores de amortiguamiento $\xi$	0,00283	0,0176	0,0483	0,0925	0,1486	0,2132	0,2784	0,3276

Tabla 3: Factores de amortiguamiento  $\xi$  de los ocho modos de vibración para  $\beta = 0,0008$

**Caso 9:** Estudio de la evolución de los de los indicadores  $E_K^%$ ,  $E_C^%$  y  $CMA$  ante la presencia de ruido en los registros de datos

Para evaluar la incidencia del ruido en los resultados se lo representa por un valor aleatorio que es incorporado en los elementos de los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración, cuya magnitud es un porcentaje de la máxima amplitud que corresponde a cada uno. Como ya fue anticipado, estos “errores” aleatorios tienen una distribución Gaussiana y media nula. En la Figura 12 se muestran en escala logarítmica los resultados obtenidos con el modelo de 8 GLD para el caso en que se utilizan  $m = 30$  registros con un  $\Delta t' = 0,01$  y un factor de amortiguamiento  $\beta = 0,0001$ . Como ocurre en éste y en los demás casos estudiados, el error de la matriz de rigidez es siempre menor que el de la matriz de amortiguamiento, con los valores del índice  $CMA$  entre ambos. Los tres indicadores crecen en forma sostenida al aumentar el ruido, hasta llegar, en este caso, el error en el amortiguamiento al 3 % cuando la amplitud máxima del ruido ‘ $r$ ’ es del 1 %.

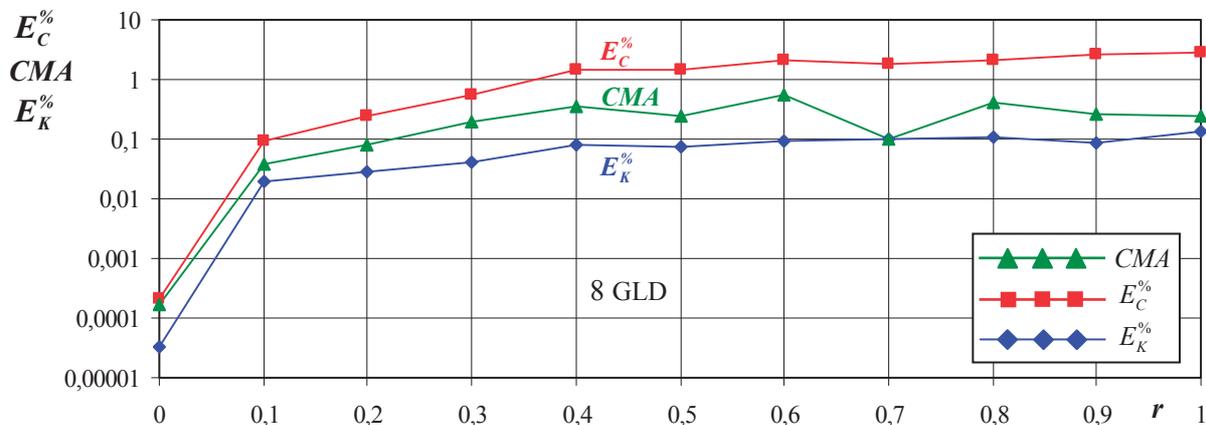


Figura 12: Evolución de los indicadores  $E_K^%$ ,  $E_C^%$  y  $CMA$  al variar la presencia de ruido,  $r$ , en un modelo de 8 GLD

En todos los casos hay un límite en el ruido tolerado, a partir del cual el error crece en forma muy violenta, inutilizando los resultados que brinda el proceso de identificación. Este límite depende de múltiples factores, como son la cantidad de grados de libertad GLD, cantidad de registros  $m$ , intervalo de tiempo  $\Delta t'$  entre ellos y en especial el factor de amortiguamiento  $\beta$ .

#### 4.2 Enseñanzas de los resultados obtenidos

Los resultados obtenidos hasta el momento, tanto con sistemas simples como relativamente complejos, han brindado varias enseñanzas, entre las que se destacan:

- i) Tomando algunas precauciones con respecto a las condiciones de la excitación aplicada, los intervalos de muestreo y la calidad de los registros de mediciones, puede obtenerse una muy buena aproximación de los parámetros de las matrices de rigidez y amortiguamiento.
- ii) Los indicadores del error  $E_K^%$  y  $E_C^%$ , que para su evaluación requieren del conocimiento de las matrices de rigidez y amortiguamiento, pueden ser reemplazados muy bien por el indicador  $CMA$ . De esta manera se dispone de un indicador de la calidad del proceso de identificación que no requiere de ningún conocimiento previo sobre la estructura estudiada, salvo sus propiedades másicas que son relativamente fáciles de evaluar.
- iii) Si bien los indicadores  $MSF$  y  $MAC$  demostraron también ser eficaces para reconocer las condiciones límites en el proceso de identificación, su aplicación práctica se ve muy limitada porque se necesita conocer los modos de vibración “exactos”.

- iv) El error de los resultados se mantiene en valores aceptables aún en presencia de ruido. El nivel máximo aceptable de ruido depende de varios factores, entre ellos el amortiguamiento. Cuando las perturbaciones son de amplitud mayor al límite aceptable el método no conduce a resultados satisfactorios.
- v) En todos los casos la matriz de rigidez es determinada con menor error que la de matriz de amortiguamiento.
- vi) El error de la matriz de amortiguamiento muestra mayor sensibilidad al ruido que la matriz de rigidez, y además presenta un comportamiento más irregular.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se continuó evaluando un procedimiento para obtener los parámetros característicos de sistemas mecánicos lineales a partir su matriz de masa y los registros de su respuesta en el dominio del tiempo. Los parámetros evaluados son los elementos de las matrices de rigidez y amortiguamiento.

Las experiencias realizadas confirmaron la posibilidad de obtener resultados de muy buena calidad aplicando condiciones de excitación de tipo impulsivas. Los resultados obtenidos con sistemas de regular cantidad de grados de libertad permitieron confirmar las ventajas del procedimiento presentado, y también su robustez tanto ante intervalos de tiempo relativamente grandes como ante señales de entrada ruidosas. Esto genera la expectativa de que el método sea efectivo en la predicción de daños estructurales y en la linealización e identificación de parámetros de mecanismos complejos en el área de la robótica.

Se continuará trabajando con casos de mayor dimensión y complejidad, para luego reemplazar los registros de respuesta obtenidos a través de simulaciones numéricas por valores experimentales. El objetivo final es la predicción de daños estructurales en sistemas mecánicos reales. Un aspecto que merece destacarse es que el procedimiento presentado es formulado en su totalidad a través del álgebra matricial, lo que lo independiza de la complejidad o dimensión del sistema estudiado, facilitándose su implementación sistemática.

## REFERENCIAS

- Aguado A. y Martínez M., *Identificación y control adaptativo*, Prentice Hall, 2003.
- Alvin K., Roberston A., Reich G. and Park K., Structural system identification: from reality to models, *Computers and Structures*, 81:1149–1176, 2003.
- Bathe K. and Wilson E., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- Bin X., Ansu G., Jia H. and Sami F., A novel time-domain structural parametric identification methodology based on the equivalency of neural networks and ARMA Model, *ICIC, LNCS 5754*, pp. 888–897, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- Brownjohn J., Pan T. and Deng X, Correlating dynamic characteristics from field measurements and numerical analysis of high-rise building. *Earthquake Eng. Struc.*, 29:523–543, 2000.
- Encio G. and Abe M., Structural damage detection for bolted connection between two steel plates using laser doppler vibrometry, *Research Report*, pp. 162–193, *University of San Carlos*, 2002.

- Giró J., García A. y Stuardi J., Identificación de parámetros de sistemas dinámicos a través de redes neuronales artificiales, *Mecánica Computacional*, 26:2585–2599, 2007.
- Giró J., García A. y Stuardi J., Sensibilidad de modelos neuronales usados para evaluar propiedades dinámicas de estructuras a partir de mediciones de su respuesta en el tiempo, *Mecánica Computacional*, 27:1983–1997, 2008.
- Giró J., Stuardi J. y Matusевич A., Evaluación de un procedimiento para identificar parámetros estructurales de sistemas dinámicos, *III Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (III MACI)*, Bahía Blanca, Argentina, 2011.
- Jae S., Investigation and solution of problems for applying identification methods to real systems, PhD Thesis, Mechanical Engineering, University of Washington, 2009.
- Jeon H., Choi Y., Parj J.H. and Park J.W., Multi-point measurement of structural vibration using pattern recognition from camera image, *Technical Note*, Korea Atomic Energy Research Institute (KAERI), 2010.
- Li Z., Tang J. and Li Q., Optimal sensor locations for structural vibration measurements, *Applied Acoustics* 65: 807–818, Elsevier, 2004.