

# VIBRACIONES EN PÓRTICOS CON CONEXIONES INTERMEDIAS ELÁSTICAS

**Alejandro R. Ratazzi<sup>a</sup>, Diana V. Bambill<sup>a,b</sup>, Carlos A. Rossit<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> *Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, (IMA), Universidad Nacional del Sur, (UNS), Bahía Blanca, Argentina.*

<sup>b</sup> *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Bahía Blanca, Argentina. alejandro.ratazzi@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar, carossit@criba.edu.ar*

**Palabras-clave:** vibración, pórtico, rótula elástica, Euler-Bernoulli, cálculo variacional.

**Resumen.** El estudio de las propiedades dinámicas de estructuras aporricadas tiene mucha importancia para un adecuado diseño estructural. En el presente trabajo se estudian las vibraciones libres en el plano de un pórtico de dos tramos (L-frame). El pórtico está empotrado en uno de sus extremos y elásticamente vinculado en el otro. En el tramo horizontal hay una rótula con características elásticas. Se analizan las vibraciones para diversas condiciones de borde en el extremo del pórtico: las condiciones clásicas como empotrada, simplemente apoyada y libre y las restricciones elásticas. Para la rótula se consideran distintas constantes elásticas y se supone ubicada en diferentes posiciones en el dintel. Como caso particular se modela la continuidad de la viga (viga sin rótula). Se presentan las primeras tres frecuencias naturales de vibración en el plano y en algunos casos, las formas modales correspondientes. Se estudia la influencia de la rótula elástica sobre las frecuencias naturales y formas modales. Con la formulación propuesta, basada en el cálculo variacional y la teoría de Euler-Bernoulli, es posible resolver vibraciones de pórticos y lograr el diseño de elementos estructurales más eficientes. En particular esto resulta relevante en estructuras en las que el peso propio debe ser minimizado, tales como las grandes construcciones de ingeniería civil, las estructuras off-shore y estructuras aeronáuticas. Los resultados numéricos se comparan con los calculados con el método de elementos finitos y con casos particulares disponibles en la literatura técnica calificada.

## 1 INTRODUCCIÓN

El problema en análisis es de importancia en prácticamente todos los campos de la ingeniería, ya que la utilización de entramados resistentes abarca desde grandes construcciones como puentes y edificios ubicados en zonas sísmicas a micromarcos utilizados en modernos equipos electrónicos en entornos vibratorios. Excelentes libros ya clásicos han tratado el tema de vibraciones de pórticos: [Timoshenko y Young \(1956\)](#), [Clough y Penzien \(1975\)](#), [Warburton \(1976\)](#), [Blevins \(1993\)](#) y más recientemente [Karnovsky y Lebed \(2004\)](#).

Entre los trabajos de investigación referidos al tema pueden mencionarse los trabajos de [Laura y colaboradores \(1987a, 1987b\)](#), que analizaron vibraciones de pórticos planos con masas adosadas o vínculos elásticos, obteniendo soluciones aproximadas mediante métodos variacionales. [Lin y Ro \(2003\)](#) propusieron un método híbrido, analítico-numérico, para analizar entramados planos. [Wu \(2011\)](#) presentó una combinación de elementos viga, elásticos y rígidos, para determinar las características dinámicas de un pórtico bidimensional. [Mei \(2011\)](#) analizó las vibraciones de un pórtico plano de varios pisos desde el punto de vista de la vibración de ondas.

En lo que respecta a pórticos de dos tramos (“L-frames”), se destacan entre otros los trabajos de [Lee y Ng \(1994\)](#) y [Albarracín y Grossi \(2005\)](#). En el primero de ellos se utilizó la formulación de Rayleigh-Ritz en conjunto con la introducción de resortes lineales artificiales a traslación y a rotación para evaluar las frecuencias naturales de pórticos de complejidad diversa. En el segundo trabajo se determinan frecuencias y modos normales de vibración de un pórtico de dos tramos con vinculación externa elástica. Aplican el clásico método de separación de variables en combinación con la técnica del cálculo variacional para la determinación exacta de autovalores (frecuencias) y autovectores (formas modales).

La presencia de una articulación interna en la viga ha sido tratada en distintos trabajos por [Wang y Wang \(2001\)](#), [Lee et al. \(2003\)](#), [Chang et al. \(2006\)](#), [Grossi y Quintana \(2008\)](#), [Quintana et al. \(2010\)](#) y [Ratazzi et al. \(2011\)](#).

En esta presentación se analiza el comportamiento dinámico de un pórtico formado por una columna y un dintel vinculados rígidamente entre sí, con vinculaciones extremas elástica una y la otra rígida y una rótula elástica intermedia en el dintel, que a su vez tiene vinculación externa elástica. Ver [Figura 1](#).

Las condiciones de borde y compatibilidad entre barras fueron obtenidas mediante la técnica del cálculo de variaciones. El método de separación de variables fue utilizado para hallar las frecuencias y las formas modales. Los resultados numéricos obtenidos son comparados con resultados calculados mediante el método de elementos finitos ([Algor, 2009](#)). Se presentan varios ejemplos numéricos para distintas relaciones de los parámetros mecánicos y geométricos del sistema estructural, como distintas relaciones de rigidez y ubicación de la rótula.

## 2 FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA

El pórtico de la [Figura 1](#) está formado por un tramo vertical de longitud  $l_1$  y otro horizontal (dintel) de longitud  $(l_2 + l_3)$ . En el tramo horizontal y a una distancia  $l_3$  del extremo empotrado, se considera una rótula elástica de rigidez  $rm$  que vincula las vigas indicadas con 2 y 3. La rótula está vinculada externamente con un resorte traslacional, transversal a las vigas, de rigidez  $tr$  y un resorte rotacional de rigidez  $r$ . La viga vertical 1 tiene su borde externo elásticamente vinculado mediante tres resortes, dos a traslación  $tu$ ,  $tw$  y uno rotacional

$r_z$ . Las vigas fueron modeladas utilizando la teoría de Euler-Bernoulli, sin tener en cuenta la deformación axial.

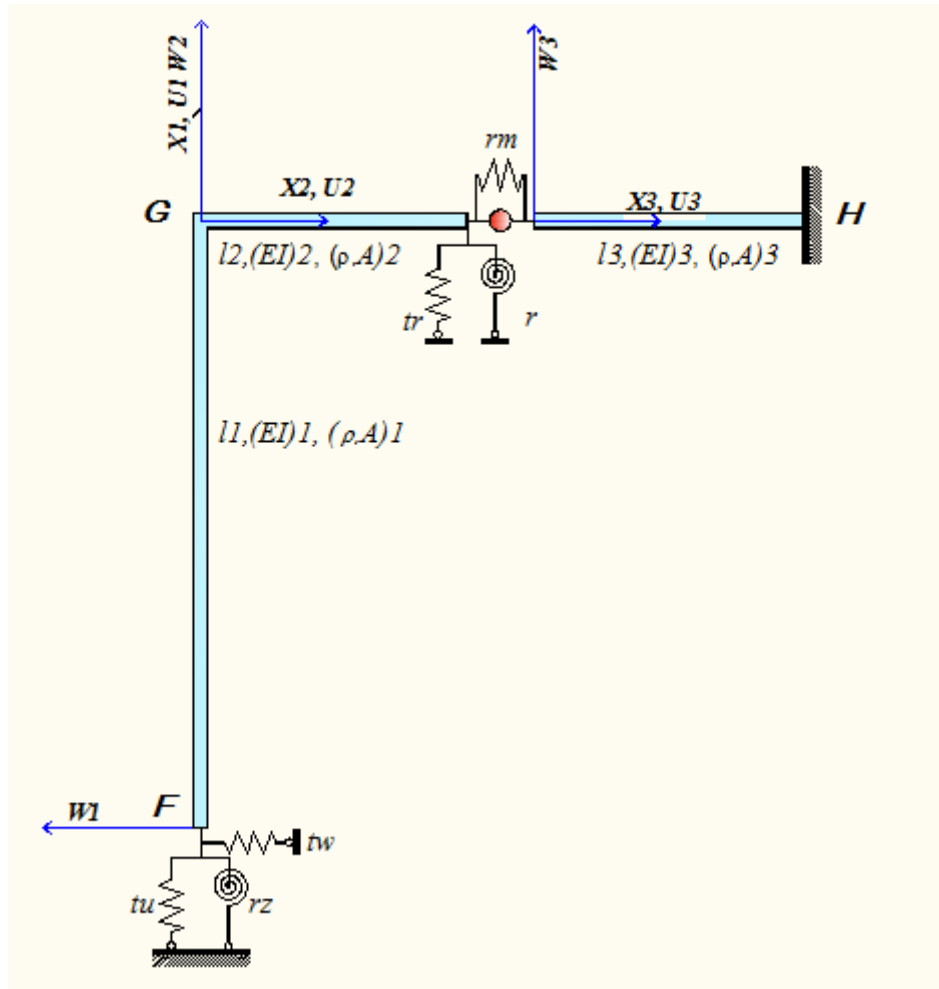


Figura 1: Modelo de pórtico

Consideraremos, según muestra la [Figura 1](#), un entramado de tres elementos  $i=1, 2, 3$ . Los desplazamientos transversales de cada tramo  $i$  en función del tiempo  $t$  y la posición  $X_i$  vienen dados por la función:

$$W_i = W_i(X_i, t); \quad i = 1, 2, 3.$$

Con las hipótesis planteadas, la energía cinética del modelo de pórtico en estudio puede ser escrita como sigue:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (\rho A)_1 \left[ \left( \frac{\partial W_1}{\partial t}(X_1, t) \right)^2 \right] dX + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} (\rho A)_2 \left[ \left( \frac{\partial W_2}{\partial t}(X_2, t) \right)^2 \right] dX + \frac{1}{2} \int_0^{l_3} (\rho A)_3 \left[ \left( \frac{\partial W_3}{\partial t}(X_3, t) \right)^2 \right] dX; \quad (1)$$

donde  $l_i$ , es la longitud y  $(\rho A)_i$  es la masa por unidad de longitud de cada tramo.

En tanto que la energía potencial del sistema tiene la expresión:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \left[ (EI)_1 \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial X_1^2} (X_1, t) \right)^2 \right] dX_1 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left[ (EI)_2 \left( \frac{\partial^2 W_2}{\partial X_2^2} (X_2, t) \right)^2 \right] dX_2 + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{l_3} \left[ (EI)_3 \left( \frac{\partial^2 W_3}{\partial X_3^2} (X_3, t) \right)^2 \right] dX_3 + \frac{r}{2} \left( \frac{\partial W_2}{\partial X_2} (l_2, t) \right)^2 + \frac{tr}{2} W_2 (l_2, t)^2 \\
 & + rm \left( \frac{\partial W_2}{\partial X_2} (l_2, t) - \frac{\partial W_3}{\partial X_3} (0, t) \right)^2 + \frac{rz}{2} \left( \frac{\partial W_1}{\partial X_1} (l_1, t) \right)^2 + \frac{tw}{2} \left( \frac{\partial W_2}{\partial X_2} (l_2, t) \right)^2 + \frac{tu}{2} \left( \frac{\partial W_3}{\partial X_3} (0, t) \right)^2
 \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $(EI)_i$  es la rigidez a flexión de la viga, con  $E$  e  $I$  el módulo de elasticidad del material y el momento de inercia de la sección transversal, respectivamente. En la evaluación del trabajo elástico del resorte traslacional  $tu$ , se ha tenido en cuenta la hipótesis sobre deformaciones axiales.

Para el desarrollo del modelo las variables  $X_i$  se adimensionalizan convenientemente con respecto a la longitud del tramo respectivo:

$$x_i = \frac{X_i}{l_i}; \quad i = 1, 2, 3; \quad \text{con } x_i \in [0, 1] \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

En consecuencia, los desplazamientos transversales se expresan:

$$w_i = \frac{W_i(x_i, t)}{l_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_i \in [0, 1],$$

También es convenientemente definir otros parámetros adimensionales refiriéndolos a las características de la viga  $i=1$  como se indica a continuación:

$$v_{li} = \frac{l_i}{l}, \quad v_{Ei} = \frac{EI_i}{EI}, \quad v_{\rho Ai} = \frac{\rho A_i}{\rho A}, \quad i = 1, 2, 3;$$

y también:

$$R = \frac{r \times l}{EI}; \quad Rm = \frac{rm \times l}{EI}; \quad Tr = \frac{tr \times l^3}{EI};$$

$$Rz = \frac{rz \times l}{EI}; \quad Tw = \frac{tw \times l^3}{EI}; \quad Tu = \frac{tu \times l^3}{EI};$$

en donde  $l = l_1; E = E_1; \rho = \rho_1; A = A_1; I = I_1$ .

## 2.1 Expresión del funcional

El principio de Hamilton requiere que entre dos instantes para los cuales las posiciones del sistema son conocidas, el mismo ejecute un movimiento que haga estacionario al funcional:

$$J \mathbf{w} = \int_{t_a}^{t_b} T - U \, dt$$

donde  $\mathbf{w} = (w_i)$ .

La condición estacionaria requerida por el principio de Hamilton se expresa como:

$$\delta J \mathbf{w}, v = 0, \forall v \in D_0 \quad (3)$$

donde  $D_0$  es el espacio admisible de las direcciones para  $\mathbf{w}$  en el dominio  $D$  de la función.

Luego, el funcional queda expresado como:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}) = & \frac{1}{2} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} B_1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial w_1}{\partial t}(x_1, t) \right)^2 \right] dx_1 + B_2 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial w_2}{\partial t}(x_2, t) \right)^2 \right] dx_2 + B_3 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial w_3}{\partial t}(x_3, t) \right)^2 \right] dx_3 \right\} dt - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} C_1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(x_1, t) \right)^2 \right] dx_1 + C_2 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(x_2, t) \right)^2 \right] dx_2 + C_3 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2}(x_3, t) \right)^2 \right] dx_3 \right\} dt - \\ & - \frac{1}{2} \left[ C_2 R \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(1, t) \right)^2 dt + D_2 Tr \int_{t_0}^{t_1} w_2^2(1, t) dt + C_2 Rm \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(1, t) - \frac{\partial w_3}{\partial x_3}(0, t) \right)^2 dt + \right. \\ & \left. + C_1 Rz \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(0, t) \right)^2 dt + D_1 Tw \int_{t_0}^{t_1} w_1(0, t) dt + C_1 Tu \int_{t_0}^{t_1} w_2(0, t) dt \right]; \end{aligned} \quad (4)$$

donde:  $B_i = \rho A l \times v_{\rho A i} \times v_{li}$ ;  $C_i = \frac{EI}{l^3} \times \frac{v_{Eli}}{v_{li}}$ ;  $i = 1, 2, 3$ .

Planteando las condiciones de borde en los extremos, y de compatibilidad y de equilibrio en las uniones entre las vigas 1 con 2, y 2 con 3 y aplicando el procedimiento del cálculo de variaciones en la Ecuación (4), se obtiene el siguiente problema de contorno y de autovalores:

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4}(x_1, t) + k_1^4 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}(x_1, t) = 0, \quad k_1^4 = a^4 \frac{\rho A_1}{\rho A l} \frac{EI}{EI_1} \left( \frac{l_1}{l} \right)^4; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4}(x_2, t) + k_2^4 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}(x_2, t) = 0, \quad k_2^4 = a^4 \frac{\rho A_2}{\rho A l} \frac{EI}{EI_2} \left( \frac{l_2}{l} \right)^4; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^4 w_3}{\partial x_3^4}(x_3, t) + k_3^4 \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2}(x_3, t) = 0, \quad k_3^4 = a^4 \frac{\rho A_3}{\rho A l} \frac{EI}{EI_3} \left( \frac{l_3}{l} \right)^4; \quad (7)$$

con  $a^4 = (\rho A/EI)l^4$ .

Condiciones de borde

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(0,t) + Tw \times w_1(0,t) = 0; \quad (8)$$

$$Rz \times \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(0,t) - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(0,t) = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial x_3}(1,t) = 0; \quad (10)$$

$$w_3(1,t) = 0; \quad (11)$$

$$w_1(1,t) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(0,t) + Tu w_2(0,t) = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(1,t) - \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(0,t) = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1}(1,t) - \frac{v_{EI2}}{v_{EI1}} \times \frac{v_{I2}}{v_{I1}} \times \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2}(0,t) = 0; \quad (15)$$

$$w_2(1,t) - \frac{v_{I3}}{v_{I2}} w_3(0,t) = 0; \quad (16)$$

$$R \times \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(1,t) - Rm \left( \frac{\partial w_3}{\partial x_3}(0,t) - \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(1,t) \right) + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(1,t) = 0; \quad (17)$$

$$Rm \left( \frac{\partial w_3}{\partial x_3}(0,t) - \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(1,t) \right) - \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2}(0,t) = 0; \quad (18)$$

$$\frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(1,t) - \frac{v_{EI3}}{v_{EI2}} \times \left( \frac{v_{I2}}{v_{I3}} \right)^2 \times \frac{\partial^3 w_3}{\partial x_3^3}(0,t) - Tr \times w_2(1,t) = 0; \quad (19)$$

en las que se han tenido en cuenta las relaciones entre corrimientos y esfuerzos:

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} = N;$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M;$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = Q$$

## 2.2 Solución exacta

Utilizando el método de separación de variables, la solución de las Ecuaciones (5) a (7)

viene dada por las expresiones:

$$w_1(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(x_1) T_n(t); \quad (20)$$

$$w_2(x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{2n}(x_2) T_n(t); \quad (21)$$

$$w_3(x_3, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{3n}(x_3) T_n(t); \quad (22)$$

Las funciones  $w_{1n}$ ,  $w_{2n}$ ,  $w_{3n}$  son los modos naturales de vibración transversal de las vigas, y se expresan como:

$$w_{1n}(x_1) = c_1 \cosh \lambda \alpha_1 x_1 + c_2 \sinh \lambda \alpha_1 x_1 + c_3 \cos \lambda \alpha_1 x_1 + c_4 \sin \lambda \alpha_1 x_1; \quad (23)$$

$$w_{2n}(x_2) = c_5 \cosh \lambda \alpha_2 x_2 + c_6 \sinh \lambda \alpha_2 x_2 + c_7 \cos \lambda \alpha_2 x_2 + c_8 \sin \lambda \alpha_2 x_2; \quad (24)$$

$$w_{3n}(x_3) = c_9 \cosh \lambda \alpha_3 x_3 + c_{10} \sinh \lambda \alpha_3 x_3 + c_{11} \cos \lambda \alpha_3 x_3 + c_{12} \sin \lambda \alpha_3 x_3 \quad (25)$$

$$\text{Con } \alpha_i = \sqrt[4]{\frac{v_{\rho A i}}{v_{EI}}} v_{ii}; \quad i=1, 2, 3; \quad \lambda = \lambda_n = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} l^4 \omega_n^2$$

Remplazando las ecuaciones (23) a (25) en las (20) a (22) y luego en las condiciones de borde (8) a (19), se llega a un sistema de 12 ecuaciones lineales homogéneas en las constantes  $c_1$  a  $c_{12}$ . La solución no trivial del problema requiere que el determinante ecuación del problema sea cero. De allí se obtienen los coeficientes de frecuencia  $\lambda_n$  y la relación entre las constantes  $c_i$  para cada valor de  $\lambda_n$  que conducen a los modos normales de vibración.

### 2.3 Solución por el método de elementos finitos

Algunos de los problemas resueltos, fueron también calculados por el método de elementos finitos. Se utilizó el software ALGOR 23.1, (2009).

Los tramos horizontal y vertical del pórtico fueron modelados cada uno, con 100 elementos viga de 3 grados de libertad.

Para considerar la rótula elástica en el dintel, se utilizó un elemento viga muy pequeño, aproximadamente 300 veces menor que la longitud del tramo. Se fue variando el momento de inercia de la sección, para que de esa manera se obtuvieran valores de rigidez que resultaran equivalentes a las constantes de rigidez  $Rm$  del resorte que conecta ambos tramos del dintel.

## 3 RESULTADOS

### 3.1 Pórtico en L sin rótula intermedia

El modelo desarrollado permite resolver una gran diversidad de casos particulares. En la primera tabla se muestran los resultados obtenidos en el presente trabajo y se comparan con

los presentados por [Lin et al., 2003](#), para un modelo libre-empotrado (L-E). También se comparan con los presentados por [Albarracín et al., 2005](#), para el modelo empotrado-empotrado (E-E). Ambos modelos fueron también cotejados con los valores obtenidos por el método de elementos finitos.

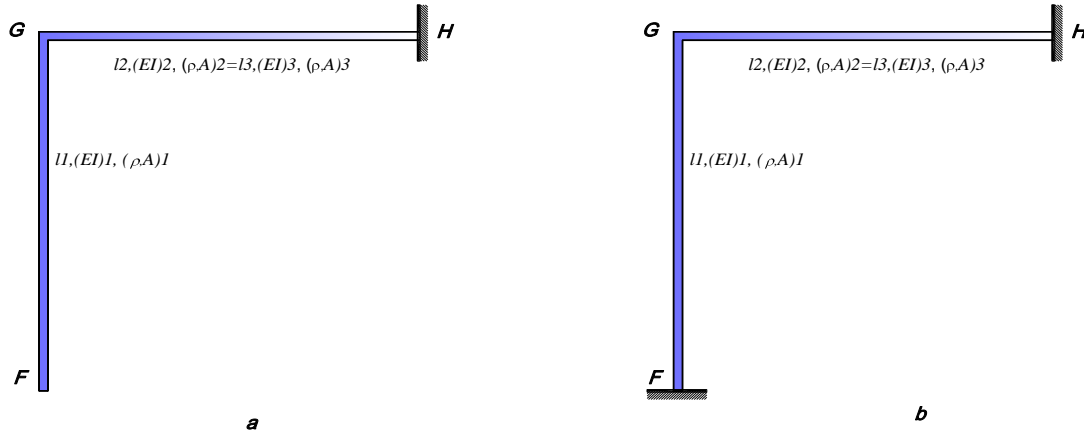


Figura 2: Pórtico en L. a) Libre-Empotrado b) Empotrado-Empotrado,

		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
<b>L-E</b>	<i>Analítico</i>	1.0725	1.7957	3.9417	4.8064	7.0565
	MEF	1.0854	1.7903	3.9753	4.8077	7.0956
	H.P Lin	1.0880	1.7869	3.9685	4.8021	7.0915
<b>E-E</b>	<i>Analítico</i>	3.9316	4.7195	7.0552	7.7561	10.0453
	MEF	3.9319	4.72952	7.0613	7.8187	10.1580
	<a href="#">Albarracín et al., 2005</a>	3.9222	4.71423	7.0376	7.7588	10.0069

Tabla 1: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales Libre-Empotrado (L-E). y Empotrado-Empotrado (E-E). Comparación con resultados de la bibliografía y cotejados con elementos finitos

Para los casos descriptos, se han tomado las magnitudes adecuadas para los vínculos elásticos ( $Rm \rightarrow \infty$ ;  $R=Tr=0$ ;  $Tu=Tw=Rz=0$  para el (L-E) y  $Rm \rightarrow \infty$ ;  $R=Tr=0$ ;  $Tu=Tw=Rz \rightarrow \infty$  para el (E-E). Como puede observarse, los valores hallados mediante el enfoque analítico y el MEF están en excelente concordancia con los disponibles en la literatura. A los pórticos de la [Figura 2](#) y [Figura 3](#) se llega con el modelo de la [Figura 1](#).

Como evidencia de la variedad de casos particulares que se pueden analizar con el modelo propuesto, en el caso siguiente se estudian los valores del pórtico en L Empotrado-Articulado (E-A) de tramos iguales ( $l_1=l_2+l_3$ ) por medio de dos caminos diferentes. En el caso 1 (A-E), se tomaron las siguientes magnitudes para los vínculos elásticos del extremo F  $Tu=Tw \rightarrow \infty$ ;  $Rz=0$  y para la rótula elástica y vínculos intermedios  $Rm \rightarrow \infty$ ;  $R=Rr=0$ . En el caso 2 (E-A), se ubica la rótula elástica junto al vínculo empotrado del extremo H con las siguientes magnitudes  $Rm=0$ ;  $R=Tr=0$ , y se tomaron los valores  $Tu=Tw=Rz \rightarrow \infty$ ; para el



extremo  $F$ . En la Tabla 2 pueden observarse los valores obtenidos también cotejados con el MEF.

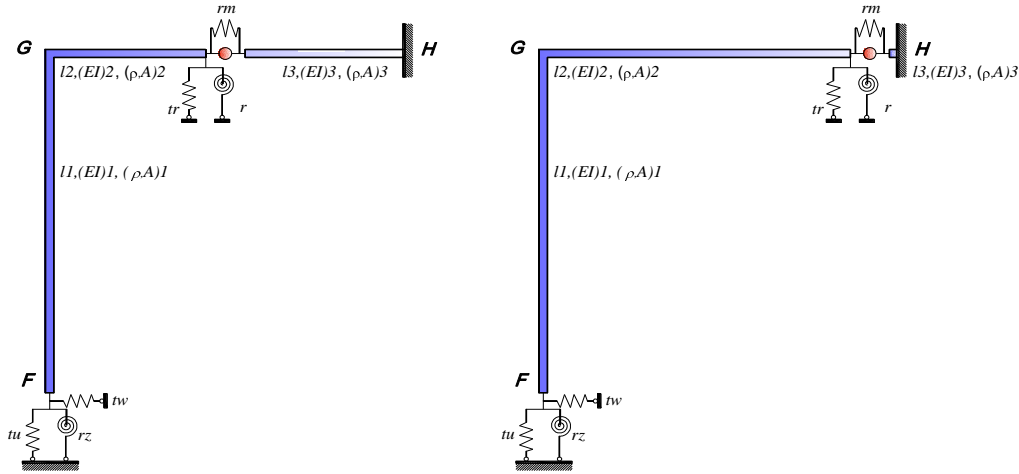


Figura 3: Pórtico en L. Empotrado-Articulado

	$T_w$	$T_u$	$R_z$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	
<b>A-E</b>	<i>Analítico(1)*</i>	$\rightarrow\infty$	$\rightarrow\infty$	0	3.3900	4.4266	6.5292	7.5608	9.6301
	<i>Analítico(2)*</i>	$\rightarrow\infty$	$\rightarrow\infty$	$\rightarrow\infty$	3.3943	4.4266	6.5798	7.5666	9.6584
	MEF	$\rightarrow\infty$	$\rightarrow\infty$	$\rightarrow\infty$	3.3991	4.4652	6.5425	7.5666	9.6439

Tabla 2: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales. Articulado-Empotrado(A-E)

$$1^* \quad l_2 = l_3, v_{l1} = v_{l2} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, R_m = \rightarrow\infty, R = 0, Tr = 0$$

$$2^* \quad l_2 = 0.99l_1, l_3 = 0.01l_1, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, R_m = 0, R = 0, Tr = 0$$

### 3.2 Pórtico con vinculaciones elásticas en el extremo F

Se estudiaron distintos modelos del pórtico, modificando las condiciones elásticas en el extremo  $F$  del tramo vertical. En los primeros casos resueltos se supuso que la rótula elástica se encontraba en el centro del dintel, con las características que se indican en la leyenda de cada tabla (Tablas 3 a 10).

En la Tabla 3 se presentan los coeficientes de frecuencia para un pórtico donde sólo se varía la rigidez del resorte a traslación en sentido vertical  $T_u$ , para la condición de rigidez absoluta del resorte a rotación  $R_z \rightarrow\infty$  y la ausencia de la restricción a traslación en sentido transversal a la viga 1  $T_w=0$ . Luego en la Tabla 4 se muestran los coeficientes de frecuencia para el caso en donde la rigidez rotacional es  $R_z=0$ , Figura 4.

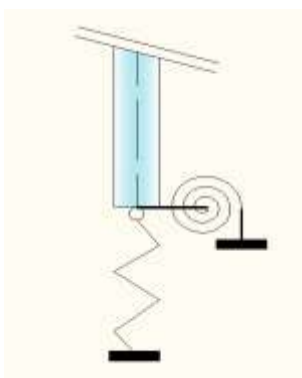


Figura 4. Caso de vinculación en el borde externo de la viga 1  $T_w=0$ , con una rótula elástica en el centro del dintel y distintas condiciones de vinculación en el borde externo de la viga

$$l_2 = l_3, v_{l1} = v_{l2} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, Tr = 0.$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	Analítico	2.0200	4.3364	5.2790	7.2549	8.3135
			MEF	2.0336	4.1981	5.2364	7.2835	8.3214
0	100000	$\rightarrow \infty$	Analítico	1.9591	2.3354	4.3249	5.2715	7.4121
			MEF	1.9552	2.3299	4.3202	5.2685	7.4002
0	10000	$\rightarrow \infty$	Analítico	1.4987	2.1115	4.3004	5.2599	7.4098
			MEF	1.5005	2.1082	4.3133	5.2676	7.3996
0	1000	$\rightarrow \infty$	Analítico	1.3683	2.0528	4.3147	5.2499	7.4098
			MEF	1.3624	2.0998	4.3126	5.2676	7.3996

Tabla 3: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales. Con  $T_w=0, R_z \rightarrow \infty$  y variando la condición  $T_u$  del extremo F

$$l_2 = l_3, v_{l1} = v_{l2} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, Tr = 0$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
0	$\rightarrow \infty$	0	Analítico	1.5735	3.9272	4.7015	7.0501	7.7782
			MEF	1.5741	3.9311	4.7072	7.0503	7.7793
0	100000	0	Analítico	1.5117	2.2915	3.9805	4.8006	7.1076
			MEF	1.5133	2.2969	3.9792	4.8122	7.0959
0	10000	0	Analítico	1.2410	1.8375	3.9801	4.8015	7.1050
			MEF	1.2464	1.8377	3.9757	4.8081	7.0957
0	1000	0	Analítico	1.1003	1.7939	3.9767	4.8060	7.1002
			MEF	1.1069	1.7947	3.9754	4.8078	7.0956

Tabla 4: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales. Con  $T_w=0, R_z=0$  y variando la condición  $T_u$  del extremo F

En la Tabla 5 se presenta el caso en que no hay restricción al desplazamiento en la dirección vertical del borde externo de la viga 1, ( $T_u=0$ ) y distintos valores de  $T_w$  y  $R_z$ . (ver Figura 5).

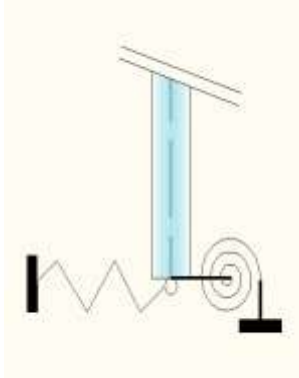


Figura 5. Caso de vinculación en el borde externo de la viga 1 ( $Tu=0$ )

$$l_2 = l_3, v_{11} = v_{12} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, T = 0$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow \infty$	Analítico	1.5511	3.9780	4.8228	7.0737	7.8723
			MEF	1.5513	3.9744	4.8178	7.0752	7.8709
100000	0	$\rightarrow \infty$	Analítico	1.4979	2.8989	4.3566	5.3205	7.3978
			MEF	1.5195	2.9100	4.3640	5.3421	7.4081
10000	0	$\rightarrow \infty$	Analítico	1.4098	2.2278	4.3110	5.2705	7.3980
			MEF	1.4140	2.2310	4.3175	5.2745	7.4004
1000	0	$\rightarrow \infty$	Analítico	1.3501	2.1098	4.3110	5.2705	7.3980
			MEF	1.3535	2.1129	4.3130	5.2682	7.3996

Tabla 5: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales. Con  $Tu=0, R_z \rightarrow \infty$  y variando la condición  $T_w$  del extremo F

La Tabla 6 contiene los coeficientes de frecuencia para distintas combinaciones de valores de las constantes de resorte en el extremo  $F$  de la viga 1 (Figura 6). En las Tabla 7 y Tabla 8 sólo se varía la rigidez del resorte a traslación en sentido vertical  $T_u$  y a traslación en sentido transversal  $T_w$  a la viga 1. Para la condición de rigidez del resorte a rotación se tomó  $R_z \rightarrow \infty$  y  $R_z = 0$  respectivamente.

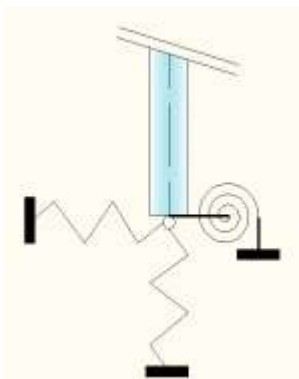


Figura 6. Caso general de vinculación elástica en el borde externo  $F$  de la viga 1.

$$l_2 = l_3, v_{I1} = v_{I2} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, T = 0.$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	3.9316	4.7195	7.0552	7.7561	10.0453
			MEF	3.9319	4.72952	7.0613	7.8187	10.1580
100000	100000	100000	<i>Analítico</i>	2.2649	2.9150	4.3492	5.3429	7.3899
			MEF	2.2719	2.9101	4.3693	5.3373	7.4017
1000	1000	1000	<i>Analítico</i>	1.2898	1.9248	4.1102	4.8962	7.0498
			MEF	1.2888	1.9241	4.0975	4.8919	7.1674
100	100	100	<i>Analítico</i>	1.1089	1.7947	3.9933	4.8140	7.1084
			MEF	1.1207	1.8005	3.9924	4.8172	7.1044
0	0	0	<i>Analítico</i>	1.0725	1.7957	3.9417	4.8064	7.0565
			MEF	1.0854	1.7903	3.9753	4.8077	7.0956

Tabla 6: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales. Variando todos los vínc

$$l_2 = l_3, v_{I1} = v_{I2} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, T = 0$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\rightarrow \infty$	100	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	1.5528	3.9562	4.7634	6.9530	7.8061
			MEF	1.5528	3.9744	4.8178	7.0752	7.8709
100000	1000	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	1.5291	2.9287	4.3246	5.3150	7.1563
			MEF	1.5346	2.9100	4.3640	5.3421	7.4081
1000	100000	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	1.9550	2.2825	4.3246	5.1949	7.3993
			MEF	1.9691	2.3318	4.3207	5.2691	7.4002
100	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	2.0200	4.3364	5.2790	7.2549	8.3135
			MEF	2.0355	4.1982	5.2364	7.2835	8.3214

Tabla 7: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales. Con  $T_u=0, R_z \rightarrow \infty$  y variando la condición  $T_w$  del extremo F

$$l_2 = l_3, v_{I1} = v_{I2} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, T = 0$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\rightarrow \infty$	100	0	<i>Analítico</i>	1.5208	3.4100	4.61064	6.30055	7.6255
			MEF	1.5191	3.4004	4.5997	6.5343	7.6642
100000	1000	0	<i>Analítico</i>	1.5206	3.3464	4.5565	6.0099	7.3980
			MEF	1.5315	3.3454	4.5662	6.0648	7.4101
1000	100000	0	<i>Analítico</i>	1.5699	2.3051	3.96517	4.80767	7.0182
			MEF	1.5762	2.2978	3.9820	4.8132	7.0964
100	$\rightarrow \infty$	0	<i>Analítico</i>	1.5868	3.9193	4.7234	7.0042	7.7355
			MEF	1.5803	3.9313	4.7073	7.0503	7.7793

Tabla 8: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales. Con  $R_z=0$  y variando las condiciones  $T_w$  y  $T_u$  del extremo F

La Tabla 9 muestra los coeficientes de frecuencia para el pórtico cuando está impedida la traslación transversal del extremo de la viga 1 y no existe restricción a rotar. (Figura 7).

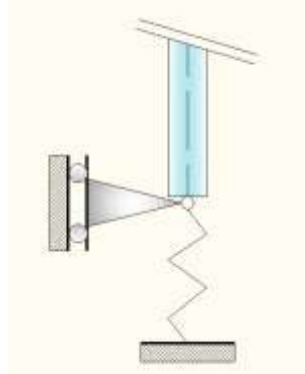


Figura 7. Caso de vinculación en el borde externo de la viga 1. ( $T_w \rightarrow \infty, R_z = 0$ ).

$$l_2 = l_3, v_{l1} = v_{l2} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, T = 0.$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	0	Analítico	3.3900	4.4266	6.5292	7.5608	9.6301
			MEF	3.3991	4.4652	6.5425	7.5666	9.6439
$\rightarrow \infty$	100000	0	Analítico	2.2695	3.4010	4.6101	6.5350	7.6700
			MEF	2.2746	3.4008	4.6071	6.5344	7.6649
$\rightarrow \infty$	10000	0	Analítico	1.6584	3.4003	4.5963	6.5349	7.6605
			MEF	1.6530	3.4004	4.6004	6.5343	7.6642
$\rightarrow \infty$	1000	0	Analítico	1.5309	3.4003	4.5964	6.5350	7.6605
			MEF	1.5328	3.4004	4.5998	6.5343	7.6642

Tabla 9: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales. Con  $T_w \rightarrow \infty, R_z = 0$  y variando la condición  $T_u$  del extremo F

La Tabla 10 muestra los coeficientes de frecuencia para el pórtico cuando está impedida la traslación longitudinal del extremo de la viga 1 y no existe restricción a rotar. (Figura 8).

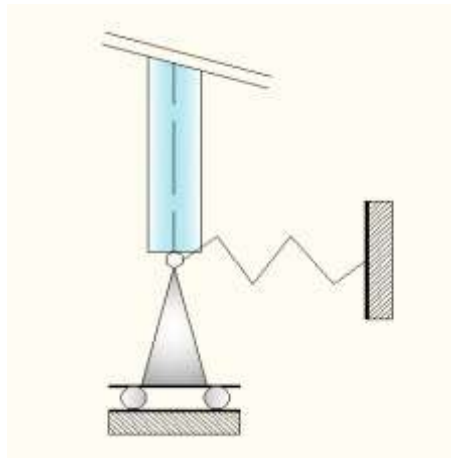


Figura 8. Caso de vinculación en el borde externo de la viga 1. ( $T_u \rightarrow \infty; R_z = 0$ ).

$$l_2 = l_3, v_{l1} = v_{l2} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, T = 0$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
100000	$\rightarrow \infty$	0	<i>Analítico</i>	2.8905	4.1495	4.8793	7.0875	7.8087
			MEF	2.8921	4.1538	4.8814	7.0881	7.8130
10000	$\rightarrow \infty$	0	<i>Analítico</i>	1.8900	3.9445	4.7190	7.0601	7.7795
			MEF	1.9848	3.9555	4.7206	7.0540	7.7825
1000	$\rightarrow \infty$	0	<i>Analítico</i>	1.6297	3.9225	4.7140	7.0605	7.7795
			MEF	1.6331	3.9335	4.7085	7.0507	7.7796

Tabla 10: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales. Con  $T_u=0, R_z=0$  y variando la condición  $T_w$  del extremo F

Del análisis de los valores de las tablas surge que el vínculo traslacional longitudinal  $T_u$  es el que más rigidez le aporta al sistema.

### 3.3 Pórtico con vinculaciones elásticas en el extremo F y una rótula elástica intermedia.

A continuación, en la Tabla 11 se presentan los coeficientes de frecuencia para el pórtico con impedimentos en las traslaciones longitudinales y transversales y en la rotación en el extremo F. Los parámetros del vínculo interno y los externos de la rótula en este caso son  $Rm \rightarrow \infty; R=0$  y  $Tr \rightarrow \infty$ , estas condiciones nos permiten modelar la viga 2 como una viga continua con un vínculo que impide el desplazamiento transversal en la mitad de la misma. En la [Figura 9](#) podemos ver las formas modales del modelo antes mencionado.

$$l_2 = l_3, v_{l1} = v_{l2} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, Tr \rightarrow \infty$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	<i>Analítico</i>	4.2214	7.1290	7.8407	9.1381	10.464

Tabla 11: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales con  $T_u=T_w=R_z \rightarrow \infty$  y  $Tr \rightarrow \infty$ , modelando un apoyo externo en el centro del dintel

$$l_2 = l_3, v_{l1} = v_{l2} = \frac{1}{2}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, Tr \rightarrow \infty$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	0	<i>Analítico</i>	3.3635	6.3815	7.3001	8.9383	9.8372

Tabla 12: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales con  $T_u=T_w \rightarrow \infty, R_z=0$  y  $Tr \rightarrow \infty$  modelando un apoyo externo en el centro del dintel

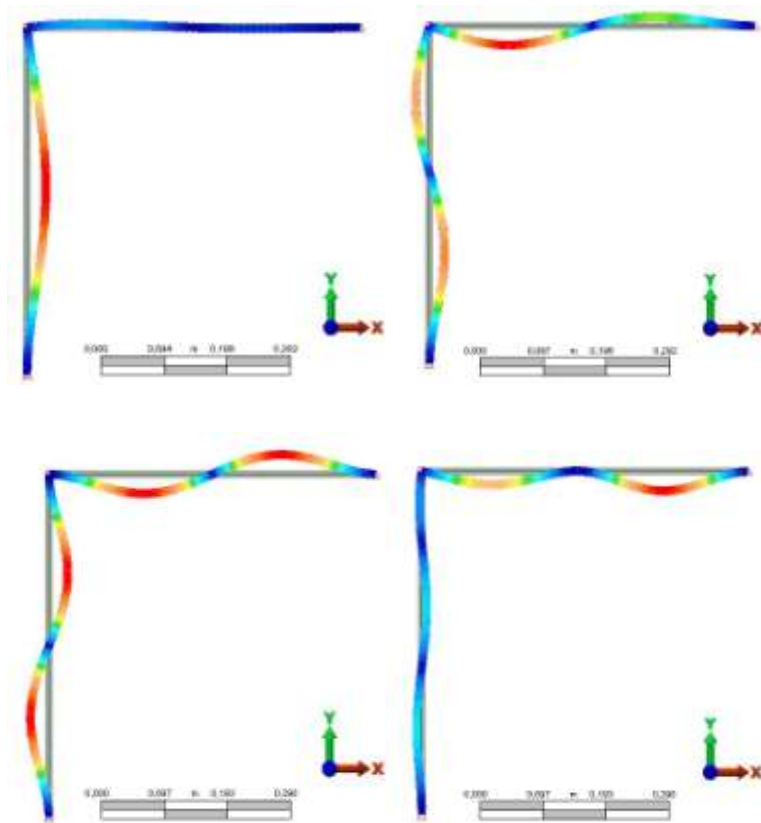


Figura 9. Formas modales.

La Tabla 12 nos muestra ahora los coeficientes de frecuencia para el pórtico con impedimentos en las traslaciones longitudinal y transversal y libre rotación en el borde extremo  $F$ . Los parámetros del vínculo interno y los externos de la rótula al igual que en el caso visto anteriormente son  $Rm \rightarrow \infty$ ;  $R=0$  y  $Tr \rightarrow \infty$ .

En la Figura 10 podemos ver las formas modales del modelo antes mencionado.

$$l_2 = 1/3l_1, v_{l2} = \frac{1}{3}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, Tr \rightarrow \infty$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	Analítico	4.0722	6.3831	7.1471	9.4247	10.2461

Tabla 13: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales. Con

$$l_2 = 1/3l_1$$

$$l_2 = 2/3l_1, v_{l2} = \frac{2}{3}, v_{EI(2)} = v_{EI(3)} = 1, v_{\rho A(2)} = v_{\rho A(3)} = 1, Rm \rightarrow \infty, R = 0, Tr \rightarrow \infty$$

$T_w$	$T_u$	$R_z$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	Analítico	4.1467	6.0531	7.5257	10.2835	11.3608

Tabla 14: Coeficientes adimensionales de frecuencia natural  $\lambda_n$  de un pórtico en L de dos tramos iguales Con

$$l_2 = 2/3l_1$$

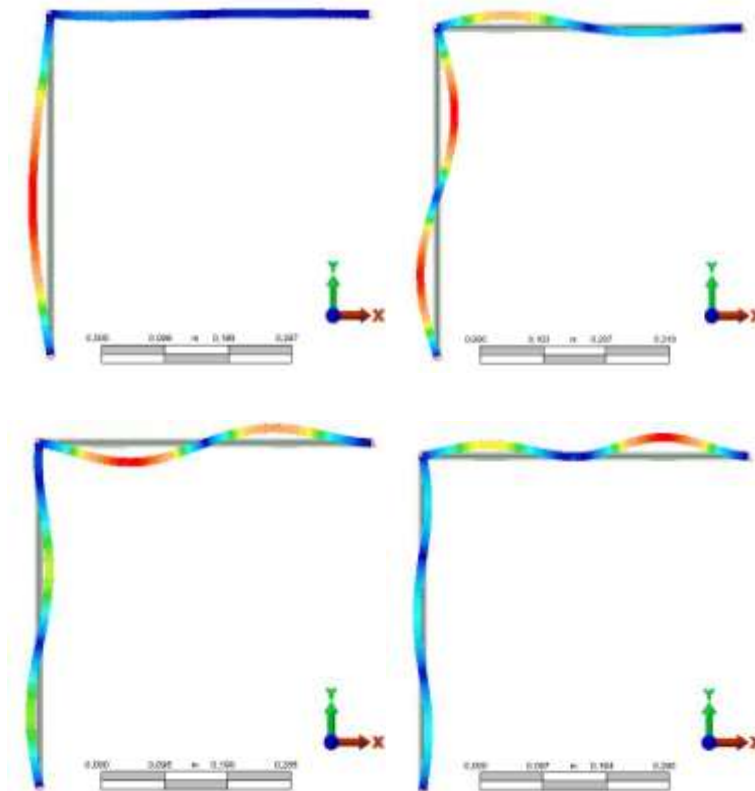


Figura 10. Formas modales.

Finalmente la Tabla 13 y la Tabla 14 contienen los coeficientes de frecuencia natural del pórtico empotrado-empotrado, para dos posiciones diferentes del apoyo intermedio en el dintel. En la Tabla 13 se ubicó el apoyo a un tercio de la luz del dintel mientras que en la Tabla 14 fue ubicada a dos tercios de la luz del dintel.

De los valores de la Tabla 11, Tabla 13 y Tabla 14 podemos inferir que al poner el vínculo en el centro de la viga dintel se obtiene la mayor rigidez del sistema.

#### 4 CONCLUSIONES

En este trabajo el método de separación de variables junto con la técnica de cálculo variacional se utiliza exitosamente para resolver en forma exacta un caso estructural complejo: el de una estructura aperticada de dos tramos con restricciones elásticas en uno de sus vínculos extremos y en un punto intermedio del dintel.

Los valores numéricos presentados demuestran estar en muy buen acuerdo con casos particulares calculados a través de un modelado con elementos finitos utilizando el código [ALGOR \(2009\)](#), así como con los disponibles en la literatura técnica.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con el auspicio de la Secretaría General de Ciencia y



Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, (CONICET), en el Departamento de Ingeniería de la UNS.

## REFERENCIAS

- Albarracín C. M., Grossi R. O., Vibrations of elastically restrained frames. *Journal of Sound and Vibration*, 285: 467-476, 2005.
- ALGOR software. Versión 23.01. (2009).
- Blevins, R. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Krieger Melbourne, FL, 1993.
- Chang, T.P., Lin, G.L. and Chang, E. Vibrations analysis of a beam with an internal hinge subjected to a random moving oscillation, *International Journal of Solid and Structures*, 43:6398-6412, 2006.
- Clough, R.W. and Penzien, J. *Dynamics of structures*. McGraw Hill. New York., 1975.
- Filipich C.P., Valerga de Grecco B., Laura P. A. A. A Note on the analysis of symmetric mode of vibration of portal frame. *Journal of Sound and Vibration*, 117n1:198-201, 1987.
- Grossi R. O., Quintana M. V., The transitions in the dynamics of elastically restrained beams, *Journal of Sound and Vibration*, 316:274-297, 2008.
- Karnovsky, I.A. and Lebed, O.I. *Free vibrations of beam and frames*. McGraw Hill. New York, 2004.
- Laura P. A. A., Valerga de Grecco Meyer B., Filipich C.P. In-plane vibration of frame carrying concentrated masses. *Journal of Sound and Vibration*, 117n3:447-458, 1987.
- Lee, H.P. and Ng, T.Y. In-plane vibrations of planar frame structures. *Journal of Sound and Vibration*, 172:420-427, 1994.
- Lee Y.Y., Wang C.M. and Kitipornchai S. Vibration of Timoshenko beams with internal hinge. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 0733-9399/293-30, 2003.
- Lin, H.P. and Ro, J. Vibration analysis of planar serial-frame structures. *Journal of Sound and Vibration*, 262:1113-1131, 2003.
- Mei, C. Wave control of vibrations in multi-story planar frame structures based on classical vibration theories. *Journal of Sound and Vibration*, 330:5530-5544, 2011.
- Quintana V., Raffo J. L., Grossi R. O. Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beam with an internal hinge. *Mecánica Computacional*, XXIX: 2499-2516, 2010.
- Ratazzi R. A., Grossi R. O., Bambill D. V. Vibraciones de una estructura aperturada con una rótula intermedia elásticamente restringida contra rotación y traslación. *Mecánica Computacional*, XXX:1351-1364, 2011.
- Timoshenko S., Young D.H. *Vibration Problems in Engineering*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1956.
- Wang, C.Y. and Wang, C.M, Vibrations of a beam with an internal hinge. *Internacional Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1:163-167, 2001.
- Warburton, G.B. *The dynamical behaviour of structures*. (2<sup>nd</sup>. edition). Pergamon Press Ltd., Oxford, 1976.
- Wolfram MATHEMATICA 8 software. Version 8000, Copyright 1988-2010.
- Wu, J.J, Use of the elastic-and-rigid-combined beam element for dynamic analysis of a two-dimensional frame with arbitrarily distributed rigid beam segments. *Applied Mathematical Modelling*, 35:1240-1251, 2011.