

DESARROLLO DE UN ALGORITMO GENERAL PARA EL ESTUDIO DE LA VIBRACIÓN LIBRE DE VIGAS USANDO TEORÍAS DE ORDEN SUPERIOR

Mario W. E. Toledo^a; , Liz Graciela Nallim^{a,b}; Susana B. Gea^a

^aInstituto de Ingeniería Civil y Medio Ambiente Salta, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avda. Bolivia 5.150, 4400 Salta, Argentina. mwtoledo@unsa.edu.ar, <http://www.ing.unsa.edu.ar/>

^bINIQUI-CONICET, lnallim@unsa.edu.ar

Keywords: Vibración de vigas gruesas, método de Ritz, Teoría de tercer orden.

Resumen. En este trabajo se presenta la formulación, desarrollo e implementación computacional de un modelo para el análisis dinámico de vigas de sección transversal variable. El modelo utilizado se desarrolla partiendo de una teoría de vigas que considera la deformación por corte en las expresiones cinemáticas. En particular, se aplica una teoría de tercer orden, evitando realizar correcciones para obtener tensiones tangenciales nulas en las fibras superiores e inferiores de la viga.

El algoritmo, obtenido a partir del Método de Ritz, ha sido implementado en un programa Fortran. Su utilización permite obtener las frecuencias naturales de vibración de vigas con distintas características geométricas y mecánicas (relaciones de aspecto, sección variable continua o escalonada, vínculos elásticos).

Paralelamente y con el objetivo de verificar la capacidad del modelo, en lo que respecta a la verificación de las hipótesis cinemáticas planteadas, se realizaron modelaciones con elementos finitos sólidos 3D. Finalmente, se presenta un contraste de los resultados numéricos con mediciones experimentales sobre prototipos de hormigón.

1 INTRODUCCION

En el campo de la ingeniería civil, varias estructuras típicas pueden representarse como vigas y por lo tanto es importante el desarrollo de herramientas computacionales para el estudio dinámica de estos elementos estructurales. El método de elementos finitos (MEF) permite representar con gran detalle las dimensiones, rigidez y distribución de masas, pero a un costo computacional alto, como es el caso de vigas con secciones transversales variables o de sección escalonada.

Existen varias teorías utilizadas para describir la cinemática de deformación de vigas (Wang et al., 2000) y se han desarrollado varios métodos para estudiar la respuesta en vibración libre de vigas. Entre las teorías que incluyen la deformación por corte pueden mencionarse la teoría de vigas de Timoshenko (Timoshenko, 1921), la cual requiere de factores de corrección de corte para compensar el error producido al suponer un estado de tensión tangencial constante. Estos factores de corrección no sólo dependen de los parámetros geométricos y materiales, sino también de las condiciones de carga y de contorno. Existen varias propuestas en las que no es necesario emplear factores de corrección, entre estas teorías las más comunes son las de segundo orden y de tercer orden (Reddy, 1984a, b; Heyliger and Reddy, 1988). Teorías mayores que tercer orden raramente se utilizan ya que la precisión obtenida es pequeña frente al esfuerzo requerido para resolver las ecuaciones gobernantes.

El presente trabajo está orientado al desarrollo de una herramienta computacional para analizar el comportamiento dinámico de vigas. A tal fin, se utiliza un algoritmo general para determinar el comportamiento dinámico de vigas gruesas con espesor variable, basado en el método de Ritz, generalizando y extendiendo la metodología propuesta por Nallim y Grossi (1999). Esta formulación analítica utiliza polinomios ortogonales característicos como funciones de aproximación (Bhat, 1985) y permite el estudio de vigas con varios parámetros geométricos y mecánicos, efectos tales como alturas variables, escalonadas y diferentes condiciones de apoyo, incluyendo restricciones traslacionales y rotacionales. A fin de validar el algoritmo y su implementación computacional, se comparan resultados para diferentes casos presentados en la literatura y con modelos de elementos finitos tridimensionales. Se incluye también un análisis de convergencia comparado con el del MEF.

Finalmente, como parte de este trabajo, se utilizó el algoritmo propuesto para analizar diferentes elementos estructurales de hormigón simple. Se compararon los resultados experimentales obtenidos con medición de vibración ambiental, con resultados numéricos obtenidos con el método propuesto y modelos tridimensionales de elementos finitos.

2 ALGORITMO PROPUESTO PARA EL ESTUDIO DINÁMICO DE VIGAS.

El algoritmo propuesto para el estudio dinámico de las vigas se basa en el método de Rayleigh-Ritz, utilizando como funciones de forma polinomios ortogonales propuestos por Bhat (1985). En trabajos previos, Nallim y Grossi (1999) y Kohan et. al (2011) desarrollaron un algoritmo para determinar frecuencias naturales de vigas con diferentes complejidades, incluyendo secciones transversales constantes, variables y escalonadas, y diferentes condiciones de contorno incluyendo restricciones elásticas traslacionales y rotacionales. En este trabajo el algoritmo se extiende y generaliza considerando las deformaciones por corte a través de una teoría de tercer orden para vigas gruesas. Para ello se considera la viga de la Figura 1, de longitud l , altura variable desde h_1 hasta h_2 , ancho variable desde b_1 hasta b_2 , y se considera el eje x en la dirección longitudinal de la viga coincidente con los ejes principales de inercia.

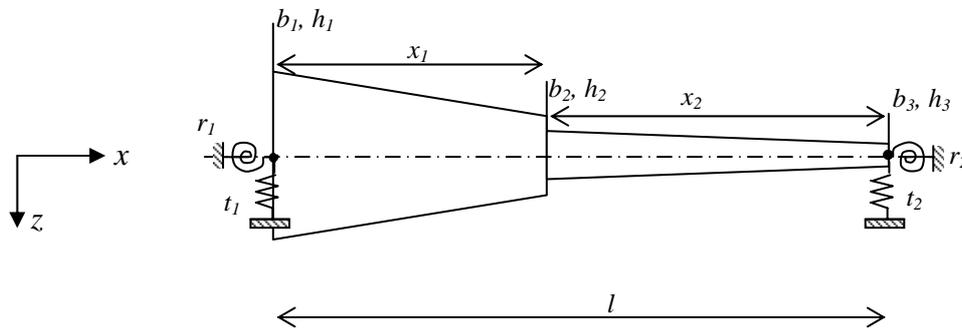


Figura 1: Viga escalonada con dos tramos de altura variable

El campo de desplazamientos, basado en una teoría de tercer orden (Jemielita, 1975; Reddy, 1984a,b), está dado por:

$$u(x, z) = z\phi(x) - \alpha z^3 \left(\phi + \frac{dw_0(x)}{dx} \right) \tag{1}$$

$$w(x, z) = w_0(x)$$

donde w_0 es el desplazamiento transversal de un punto ubicado sobre el plano medio de la viga, $\alpha = 4/(3h^2)$ asegura que se satisface la condición de contorno para las tensiones tangenciales en las fibras superiores, ϕ denota la rotación de la sección transversal.

El campo de desplazamientos se adapta a una variación cuadrática de la deformación de corte transversal y anula las deformaciones de corte transversal (y por lo tanto las tensiones de corte) sobre los planos superior e inferior de la viga. Por lo tanto, no es necesario utilizar factores de corrección de corte en la teoría de tercer orden.

Los extremos de la viga pueden ser libres, articulados o empotrados, haciendo posible todas las combinaciones clásicas de condiciones de apoyo, y además se pueden considerar vínculos rotacionales y traslacionales. La altura y el ancho variable de la viga se expresa en función de la longitud:

$$h = \frac{(h_2 - h_1)}{l} x + h_1 \quad b = \frac{(b_2 - b_1)}{l} x + b_1 \tag{2}$$

Definiendo $C_h = \frac{h_2}{h_1} - 1$ $C_b = \frac{b_2}{b_1} - 1$ y resulta $h = (C_h \left(\frac{x}{l}\right) + 1)h_1$ y $b = (C_b \left(\frac{x}{l}\right) + 1)b_1$

La energía de deformación y cinética de la viga están dadas respectivamente por:

$$U = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \iint \left\{ E \left[z \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - 2\alpha z^4 \frac{d\phi}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{d^2 w_0}{dx} \right) + \alpha^2 z^6 \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + 2 \frac{d\phi}{dx} \frac{d^2 w_0}{dx} + \left(\frac{d^2 w_0}{dx} \right)^2 \right] \right] \right. \tag{3}$$

$$\left. + G \left[(1 - 6\alpha z^2 + 9\alpha^2 z^4) \left[\phi^2 + 2\phi \frac{dw_0}{dx} + \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] \right] \right\} dA dx$$

$$T = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \iint \left\{ \rho \left[z \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \alpha z^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right) \right]^2 + \rho \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dA$$

donde $x_0 = 0; x_n = l$, siendo n el número de tramos de secciones transversales con variación continua de la sección transversal, E y G son los módulos elásticos longitudinal y transversal respectivamente, ρ es la densidad del material, A la sección transversal y l la longitud total de la viga.

Además, las energías de deformación de los vínculos rotacionales y traslacionales están dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{1}{2} r_1 [\phi(0)]^2 + \frac{1}{2} r_2 [\phi(l)]^2 \\ U_t &= \frac{1}{2} t_1 [w_0(0)]^2 + \frac{1}{2} t_2 [w_0(l)]^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Donde r_1 y r_2 son las constantes de los resortes rotacionales en x_0 y x_n ; t_1 y t_2 las constantes de los resortes traslacionales en x_0 y x_n respectivamente.

Cuando se analizan problemas de vibraciones naturales libres, es posible aplicar separación de variables y considerar un campo de desplazamiento de la forma:

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi(x) e^{i\omega t} \\ w_0 &= W(x) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (5)$$

donde ω es la frecuencia angular

El funcional de energía se obtiene reemplazando el campo de desplazamiento dado por las ecs. (5) en las expresiones (3) y (4):

$$L = U_{MAX} - T_{MAX} \quad (6)$$

Para simplificar el marco teórico se trabaja con la variable adimensional $\bar{x} = \frac{x}{l}$

Basado en el trabajo de Bath (1985) y Nallim y Grossi (1999) las funciones de aproximación están definidas como una combinación lineal de polinomios ortogonales:

$$\begin{aligned} W(\bar{x}) &= \sum_{m=1}^r c_m p_m(\bar{x}) \\ \Phi(\bar{x}) &= \frac{1}{l} \sum_{m=1}^r d_m \varphi_m(\bar{x}) \end{aligned} \quad (7)$$

Donde c_m y d_m son los coeficientes a determinar por el método de Ritz y $p_m(\bar{x})$ y $\varphi_m(\bar{x})$ son los r polinomios ortogonales. El proceso para generar los polinomios ortogonales se detalla en Nallim y Grossi (1999).

La aplicación del método de Ritz requiere la minimización del funcional definido en la ec. (6) respecto de los coeficientes c_m y d_m de las funciones de aproximación (7). La condición necesaria correspondiente se expresa de la siguiente manera

$$\frac{\partial L}{\partial c_i} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial d_i} = 0, \quad (8)$$

La aplicación de las expresiones (8) conduce al siguiente problema de autovalores algebraico, expresado matricialmente:

$$\left\{ \begin{bmatrix} K^{ww} & K^{w\varphi} \\ K^{\varphi w} & K^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} - \Omega^2 \begin{bmatrix} M^{ww} & M^{w\varphi} \\ M^{\varphi w} & M^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \{c\} \\ \{d\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde $\Omega^2 = \frac{\rho A_l \omega^2 l^4}{EI_1}$, A_l es el área e I_l el momento de inercia en x_0 .

La solución del problema de autovalores resultante de la ec. (9) permite determinar las frecuencias naturales y las formas modales de vibración.

Las expresiones de la matriz de rigidez y de masas contenidos en las expresiones (9) están dados por:

$$\begin{aligned} K^{ww} &= \int_0^{\bar{x}_1} \left(\frac{1}{21} P_m'' P_n'' + \frac{8}{15} \gamma P_m' P_n' \right) d\bar{x} + \int_{\bar{x}_1}^1 \left(\frac{1}{21} C_b C_h^3 P_m'' P_n'' + \frac{8}{15} C_b C_h \gamma P_m' P_n' \right) d\bar{x} \\ &\quad + T_1 P_m(0) P_n(0) + T_2 P_m(1) P_n(1) \\ K^{w\varphi} &= \int_0^{\bar{x}_1} \left(-\frac{32}{210} \varphi_m' P_n'' + \frac{8}{15} \gamma \varphi_m P_n' \right) d\bar{x} + \int_{\bar{x}_1}^1 \left(-\frac{32}{210} C_b C_h^3 \varphi_m' P_n'' + \frac{8}{15} C_b C_h \gamma \varphi_m P_n' \right) d\bar{x} \\ K^{\varphi w} &= \int_0^{\bar{x}_1} \left(-\frac{32}{210} P_m'' \varphi_n' + \frac{8}{15} \gamma P_m' \varphi_n \right) d\bar{x} + \int_{\bar{x}_1}^1 \left(-\frac{32}{210} C_b C_h^3 P_m'' \varphi_n' + \frac{8}{15} C_b C_h \gamma P_m' \varphi_n \right) d\bar{x} \\ K^{\varphi\varphi} &= \int_0^{\bar{x}_1} \left(\frac{136}{210} \varphi_m' \varphi_n' + \frac{8}{15} \gamma \varphi_m \varphi_n \right) d\bar{x} + \int_{\bar{x}_1}^1 \left(\frac{136}{210} C_b C_h^3 \varphi_m' \varphi_n' + \frac{8}{15} C_b C_h \gamma \varphi_m \varphi_n \right) d\bar{x} \\ &\quad + R_1 \varphi_m(0) \varphi_n(0) + R_2 \varphi_m(1) \varphi_n(1) \\ M^{ww} &= \int_0^{\bar{x}_1} \left(\frac{1}{21} \eta P_m' P_n' + P_m P_n \right) d\bar{x} + \int_{\bar{x}_1}^1 \left(\frac{1}{21} C_b C_h^3 \eta P_m' P_n' + C_b C_h P_m P_n \right) d\bar{x} \\ M^{w\varphi} &= \int_0^{\bar{x}_1} \left(-\frac{32}{210} \eta \varphi_m P_n' \right) d\bar{x} + \int_{\bar{x}_1}^1 \left(-\frac{32}{210} C_b C_h^3 \eta \varphi_m P_n' \right) d\bar{x} \\ M^{\varphi w} &= \int_0^{\bar{x}_1} \left(-\frac{32}{210} \eta P_m' \varphi_m \right) d\bar{x} + \int_{\bar{x}_1}^1 \left(-\frac{32}{210} C_b C_h^3 \eta P_m' \varphi_m \right) d\bar{x} \\ M^{\varphi\varphi} &= \int_0^{\bar{x}_1} \left(\frac{136}{210} \eta \varphi_m \varphi_n \right) d\bar{x} + \int_{\bar{x}_1}^1 \left(\frac{136}{210} C_b C_h^3 \eta \varphi_m \varphi_n \right) d\bar{x} \end{aligned} \quad (10)$$

donde $\gamma = \frac{GA_l l^2}{EI_1}$, $\eta = \frac{I_1}{A_l l^2}$, $R_1 = \frac{l}{EI_1} r_1$, $R_2 = \frac{l}{EI_2} r_2$, $T_1 = \frac{l^3}{EI_1} t_1$, $T_2 = \frac{l^3}{EI_2} t_2$

3 ANÁLISIS DE CONVERGENCIA

Los resultados obtenidos para el análisis de convergencia del algoritmo general propuesto se muestran en las Tablas 1 a 7. El análisis se realizó tomando un número creciente de polinomios de aproximación usados como funciones coordenadas en la aproximación del campo de desplazamientos. Los resultados presentados corresponden a los parámetros

adimensionales de frecuencias naturales de vigas de sección rectangular constante, considerando tres condiciones de apoyos diferentes. En todos los casos se consideró un coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$.

En las Tablas 1 a 4 se muestran los análisis de convergencia para vigas de altura constante y relación $h/l=0,1$ (Tabla 1 a 3) y $h/l=0,4$ (Tabla 4), para diferentes condiciones de apoyo.

Nº polinomios	5	6	7	8	9	10
Ω_1	3,1197	3,1192	3,1192	3,1192	3,1192	3,1192
Ω_2	6,1266	6,1253	6,1150	6,1150	6,1150	6,1150
Ω_3	10,0947	8,9688	8,9581	8,9084	8,9082	8,9076

Tabla 1: Parámetro adimensional de frecuencia Ω_i , para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método para una viga de sección constante; $h/l=0,1$; condición de apoyo biarticulada.

Nº polinomios	5	6	7	8	9	10
Ω_1	4,6009	4,6007	4,5989	4,5988	4,5981	4,5979
Ω_2	7,4215	7,4089	7,4088	7,4039	7,4031	7,4007
Ω_3	10,2345	10,0442	10,0187	10,0184	10,0108	10,0089

Tabla 2: Parámetro adimensional de frecuencia Ω_i , para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método para una viga de sección constante; $h/l=0,1$; condición de apoyo biempotrada

Nº polinomios	5	6	7	8	9	10
Ω_1	1,8683	1,8683	1,8683	1,8683	1,8683	1,8683
Ω_2	4,5922	4,5905	4,5894	4,5886	4,5880	4,5877
Ω_3	7,5574	7,4791	7,4750	7,4709	7,4689	7,4675

Tabla 3: Parámetro adimensional de frecuencia Ω_i , para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método para una viga de sección constante; $h/l=0,1$; condición de apoyo empotrado-libre

Nº polinomios	5	6	7	8	9
Ω_1	2,8704	2,8702	2,8702	2,8702	2,8702
Ω_2	4,9453	4,9423	4,9411	4,9411	4,9411
Ω_3	6,4372	6,4358	6,4190	6,4187	6,4178

Tabla 4: Parámetro adimensional de frecuencia Ω_i , para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método para una viga de sección constante; $h/l=0,4$; condición de apoyo biarticulada

En las Tablas 5 a 7 se muestra el análisis de convergencia para vigas de altura variable con $h_2/h_1=0,375$ y diferentes condiciones de apoyos.

En general se observa que la convergencia del parámetro adimensional de frecuencia fundamental se puede lograr con un número bajo de polinomios ortogonales ($r=5$), en tanto que para los modos más altos se requieren por lo menos 7 polinomios para conseguir una precisión razonable.

A fin de demostrar que el método presentado converge más rápidamente y con un costo computacional menor, en la Tabla 8 se muestra un análisis de convergencia basado en un modelo de elementos finitos utilizando elementos sólidos 3D en el programa SAP 2000 (SAP2000, 2010). Si se compara la convergencia mostrada en Tabla 4 (método presente) con los de la Tabla 8 (MEF), se observa que en el caso de los modos superiores para lograr una

precisión razonable es necesario realizar una discretización importante (61.440 elementos sólidos).

Nº polinomios	5	6	7	8	9	10
Ω_1	2,3922	2,3898	2,3896	2,3896	2,3896	2,3896
Ω_2	4,4834	4,4431	4,4404	4,4297	4,4404	4,4404
Ω_3	6,1499	6,0693	6,0200	6,0171	6,0166	6,0165

Tabla 5: Parámetro adimensional de frecuencia Ω_i , para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método para una viga de sección variable; $h_2/h_1=0,375$; condición de apoyo simple-simple

Nº polinomios	5	6	7	8	9	10
Ω_1	3,3070	3,3046	3,3020	3,3003	3,3000	3,2998
Ω_2	4,9648	4,9538	4,9464	4,9425	4,9391	4,9376
Ω_3	6,3957	6,3907	6,3805	6,3700	6,3663	6,3626

Tabla 6: Parámetro adimensional de frecuencia Ω_i , para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método para una viga de sección variable; $h_2/h_1=0,375$; condición de apoyo empotrado-empotrado

Nº polinomios	5	6	7	8	9	10
Ω_1	1,9128	1,9124	1,9122	1,9119	1,9119	1,9119
Ω_2	3,6285	3,6227	3,6200	3,6186	3,6179	3,6177
Ω_3	5,2275	5,2210	5,2087	5,2047	5,2030	5,2022

Tabla 7: Parámetro adimensional de frecuencia Ω_i , para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método para una viga de sección variable; $h_2/h_1=0,375$; condición de apoyo empotrado-libre

Nº elementos sólidos	960	2100	8400	61440
Ω_1	2,78	2,71	2,70	2,70
Ω_2	4,51	4,23	4,22	4,22
Ω_3	5,58	5,22	5,22	5,21

Tabla 8: Parámetro adimensional de frecuencia Ω_i , para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el MEF para una viga de sección constante; $h/l=0,4$; condición de apoyo simple-simple

4 RESULTADOS OBTENIDOS

Con el propósito de evaluar los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto, se resolvieron ejemplos similares con el método de los elementos finitos.

Por otra parte, se desarrolló un programa experimental de prototipos en hormigón simple, cuyas frecuencias naturales se compararon con las obtenidas para modelos resueltos con el presente método.

Se comparan a continuación resultados con ejemplos típicos de la literatura.

Finalmente se analiza la variación de Ω_i para diferentes parámetros de restricción traslacional y rotacional.

4.1 Comparación con resultados de modelos resueltos con el MEF

Se analizaron los siguientes modelos de vigas:

Espesor constante $h/l=0,12$, para condiciones de apoyo: biarticulada (S-S), empotrada-

empotrada (E-E) y empotrada-libre (E-L).

Espesor constante $h/l=0,40$, para condiciones de apoyo S-S, E-E y E-L.

Espesor variable con $h_2/h_1=0,375$, para condiciones de apoyo S-S, E-E y E-L.

Sección escalonada de dos tramos de espesor constante $h_2/h_1=0,75$; $l_1=l_2$; condiciones de apoyo S-S, E-E y E-L.

Se empleó el algoritmo propuesto con 7 polinomios y el MEF con 8200 elementos sólidos.

Las Tablas 9 a 20 muestran los resultados de los primeros tres parámetros adimensionales de frecuencias Ω_i y la comparación entre los dos métodos.

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
Ω_1	3,1096	3,1080	0,05%
Ω_2	6,0496	6,0643	0,24%
Ω_3	8,7712	8,6369	1,55%

Tabla 9: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y por el MEF – Sección constante; $h/l=0,12$; S-S

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
Ω_1	4,5474	4,5368	0,23%
Ω_2	7,2522	7,2655	0,18%
Ω_3	9,7158	9,6282	0,91%

Tabla 10: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el Presente método y por el MEF – Sección constante $h/l=0,12$; E-E

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
Ω_1	1,8656	1,8802	0,78%
Ω_2	4,5472	4,5428	0,10%
Ω_3	7,3385	7,3601	0,29%

Tabla 11: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y por el MEF – Sección constante; $h/l=0,12$; E-L

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
Ω_1	2,8702	2,7095	5,93%
Ω_2	4,9411	5,2170	5,29%
Ω_3	6,4190	5,8900	8,98%

Tabla 12: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y por el MEF – Sección constante; $h/l=0,4$; S-S

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
------------	--------------------------	--------------------	--------------

Ω_1	2,3896	2,3602	1,24%
Ω_2	4,4404	4,1588	6,77%
Ω_3	6,0200	5,2544	14,57%

Tabla 13: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y por el MEF – Sección variable; $h_2/h_1=0,375$; S-S

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
Ω_1	3,6634	3,6394	0,66%
Ω_2	5,3119	5,1850	2,45%
Ω_3	6,7174	6,5587	2,42%

Tabla 14: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y por el MEF – Sección constante; $h/l=0,4$; E-E

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
Ω_1	1,7830	1,7981	0,84%
Ω_2	3,7571	3,7142	1,15%
Ω_3	5,5541	5,4466	1,97%

Tabla 15: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y por el MEF – Sección constante; $h/l=0,4$; E-L

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
Ω_1	2,6895	2,5402	5,87%
Ω_2	4,7996	4,2363	13,30%
Ω_3	6,3262	5,2218	21,15%

Tabla 16: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y por el MEF – Sección escalonada; $h_2/h_1=0,75$; $l_1=l_2$; S-S

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
Ω_1	3,3020	3,3074	0,16%
Ω_2	4,9464	4,8740	1,49%
Ω_3	6,3805	6,2310	2,40%

Tabla 17: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y por el MEF – Sección variable; $h_2/h_1=0,375$; E-E

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
Ω_1	1,9122	1,9417	1,52%
Ω_2	3,6200	3,6327	0,35%

Ω_3	5,2087	5,1709	0,73%
------------	--------	--------	-------

Tabla 18: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y por el MEF – Sección variable $h_2/h_1=0,375$; E-L

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
Ω_1	3,5466	3,5006	1,31%
Ω_2	5,2163	5,1096	2,09%
Ω_3	6,6203	6,3403	4,42%

Tabla 19: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y por el MEF – Sección escalonada; $h_2/h_1=0,75$; $l_1=l_2$; E-E.

Ω_i	Presente método $r=7$	MEF 8200 elementos	Diferencia %
Ω_1	1,8838	1,8883	0,24%
Ω_2	3,6877	3,5947	2,59%
Ω_3	5,3752	5,2735	1,93%

Tabla 20: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los tres primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y por el MEF – Sección escalonada $h_2/h_1=0,75$; $l_1=l_2$; E-L

En general se observa que los resultados numéricos obtenidos con el presente método aproximan razonablemente a los obtenidos con el MEF. Las mayores diferencias se obtuvieron para el caso de condiciones de apoyo biarticulado. Esto se debe a la forma de simular los apoyos biarticulados en el MEF.

4.2 Resultados obtenidos en forma experimental y con el algoritmo propuesto

El programa experimental consistió en la medición de aceleraciones en cuatro modelos de hormigón simple, cuya geometría se observa en la Figura 2.

Se efectuaron registros de vibración ambiental utilizando una registradora digital de doce canales, modelo K2 marca Kinometrics (Kinometrics Inc., 2002), y cuatro acelerómetros triaxiales de balance de fuerzas. Se analizó la densidad espectral de potencias (DEP) obtenidas utilizando el programa PSD versión 2.3.2 (Kinometrics Inc., 2004). Las frecuencias naturales se determinan a partir de los picos de resonancia en dicha función.

Los prototipos de hormigón fueron modelados con elementos finitos y los resultados se comparan con los obtenidos por el algoritmo propuesto y experimentalmente.

Se observa que los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto aproximan razonablemente con los resultados experimentales (Tablas 21 a 24).

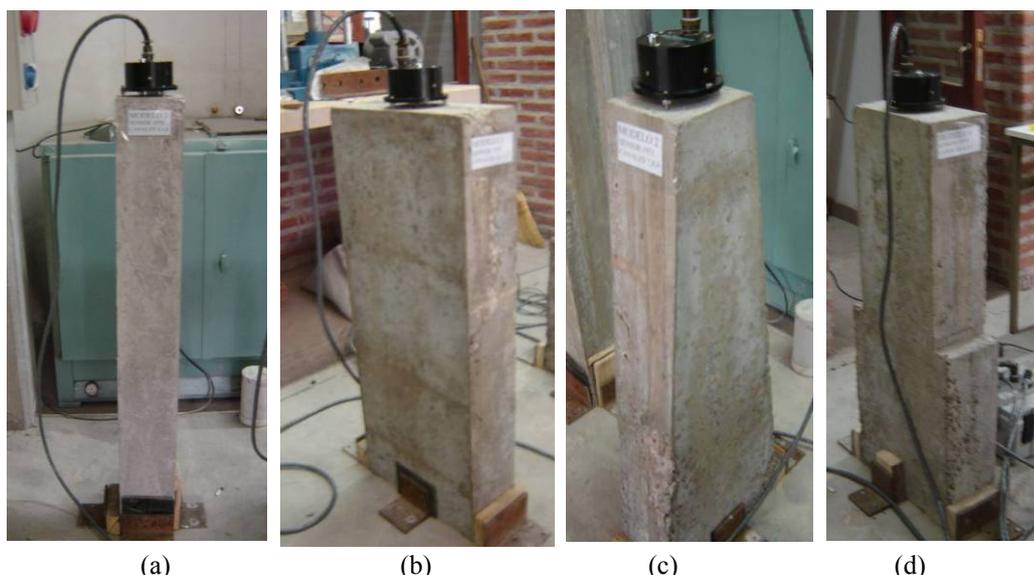


Figura 2: Modelos en hormigón simple. (a) Sección constante $h/l = 0.12$; (b) sección constante $h/l = 0.4$; (c) sección de altura variable $h_2/h_1 = 0.375$; (d) Sección escalonada: $h_2/h_1 = 0.75$

Ω_i	Presente método $r=7$	Experimental	Diferencia % Presente método-experimental
Ω_1	1,8656	1,8558	0,53%
Ω_2	4,5472	4,5312	0,35%

Tabla 21: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los dos primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y en forma experimental – Sección constante; $h/l = 0.12$; E-L

Ω_i	Presente método $r=7$	Experimental	Diferencia % Presente método-experimental
Ω_1	1,1392	1,0928	4,25%
Ω_2	1,7830	1,7941	0,62%

Tabla 22: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los dos primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y en forma experimental – Sección constante; $h/l = 0.4$; E-L

Ω_i	Presente método $r=7$	Experimental	Diferencia % Presente método-experimental
Ω_1	1,3095	1,2919	1,36%
Ω_2	1,9122	1,9934	4,08%

Tabla 23: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los dos primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y en forma experimental – Sección variable $h_2/h_1 = 0.375$; E-L

Ω_i	Presente método $r=7$	Experimental	Diferencia % Presente método-experimental
Ω_1	1,2135	1,0919	11,15%
Ω_2	1,8838	1,7264	9,12%

Tabla 24: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i para los dos primeros modos de vibración obtenidos por el presente método y en forma experimental – Sección escalonada $h_2/h_1 = 0.75$; E-L

4.3 Comparación de resultados con los obtenidos por otros autores

Se compararon los resultados para vigas con sección constante con los producidos por el método pseudoespectral (Lee y Schultz, 2004) (Tablas 25 y 26).

$\sqrt{\Omega_i}$	Teoría clásica	Presente método $r=8$			Lee y Schultz (2004) N=35		
		$h/l=0,002$	$h/l=0,01$	$h/l=0,02$	$h/l=0,002$	$h/l=0,01$	$h/l=0,02$
$\sqrt{\Omega_1}$	3,142	3,142	3,141	3,141	3,142	3,141	3,141
$\sqrt{\Omega_2}$	6,283	6,283	6,281	6,275	6,283	6,281	6,275
$\sqrt{\Omega_3}$	9,425	9,426	9,419	9,400	9,425	9,418	9,396
$\sqrt{\Omega_4}$	12,566	12,828	12,811	12,757	12,566	12,549	12,499
$\sqrt{\Omega_5}$	15,708	16,335	16,300	16,194	15,707	15,675	15,578

$\sqrt{\Omega_i}$	Teoría clásica	Presente método $r=8$			Lee y Schultz (2004) N=35		
		$h/l=0,05$	$h/l=0,1$	$h/l=0,2$	$h/l=0,05$	$h/l=0,1$	$h/l=0,2$
$\sqrt{\Omega_1}$	3,142	4,690	4,693	4,580	3,135	3,111	3,045
$\sqrt{\Omega_2}$	6,283	7,704	7,716	7,331	6,231	5,910	5,672
$\sqrt{\Omega_3}$	9,425	10,640	10,676	9,856	9,253	7,977	7,840
$\sqrt{\Omega_4}$	12,566	13,461	13,551	12,145	12,168	10,010	9,657
$\sqrt{\Omega_5}$	15,708	16,159	16,377	14,232	14,948	12,182	11,222

Tabla 25: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i – Sección constante; $\nu=0,3$; S-S

$\sqrt{\Omega_i}$	Teoría clásica	Presente método $r=8$			Lee y Schultz (2004) N=35		
		$h/l=0,002$	$h/l=0,01$	$h/l=0,02$	$h/l=0,002$	$h/l=0,01$	$h/l=0,02$
$\sqrt{\Omega_1}$	4,73	4,730	4,730	4,730	4,730	4,728	4,724
$\sqrt{\Omega_2}$	7,8532	7,853	7,852	7,852	7,853	7,847	7,828
$\sqrt{\Omega_3}$	10,9956	10,995	10,992	1,992	10,995	10,980	10,934
$\sqrt{\Omega_4}$	14,1372	14,137	14,129	14,175	14,136	14,106	14,015
$\sqrt{\Omega_5}$	17,2788	17,282	17,265	17,401	17,277	17,225	17,068

$\sqrt{\Omega_i}$	Teoría clásica	Presente método $r=8$			Lee y Schultz (2004) N=35		
		$h/l=0,05$	$h/l=0,1$	$h/l=0,2$	$h/l=0,05$	$h/l=0,1$	$h/l=0,2$
$\sqrt{\Omega_1}$	4,73	4,690	4,693	4,580	4,690	4,580	4,242
$\sqrt{\Omega_2}$	7,8532	7,704	7,716	7,331	7,704	7,331	6,418
$\sqrt{\Omega_3}$	10,9956	10,640	10,676	9,856	10,640	9,856	8,285
$\sqrt{\Omega_4}$	14,1372	13,461	13,551	12,145	13,461	12,145	9,904
$\sqrt{\Omega_5}$	17,2788	16,159	16,377	14,232	16,159	14,232	11,349

Tabla 26: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i – Sección constante; $\nu=0,3$; E-E

Para viga de sección variable con $h_2/h_1=0.8$, se compara con los resultados obtenidos utilizando el método de reducción presentado en Tong et al. (1995) y el método de Ritz propuesto en Kohan et al. (2011) basado en la teoría de viga de Timoshenko (Tabla 27).

Ω_i	Kohan et al. (2011)	MEF	Tong et al. (1995)	Presente método ($r=7$)
Ω_1	15,65	16,06	15,64	15,80
Ω_2	41,07	42,36	40,92	41,92
Ω_3	76,07	78,90	75,54	78,50
Ω_4	118,22	123,21	116,96	125,31

Tabla 27: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i Sección variable $h_2/h_1=0,8$; $\nu=0,3$; E-E

La Tabla 28 presenta resultados para viga escalonada con $h_2/h_1=0,8$ con la solución exacta (Rossi et al., 1990) y con los obtenidos por Kohan et al. (2011).

h_1/l	Ω_i	Solución exacta (Rossi et al 1990)	Kohan et al. (2011)	Presente método ($r=7$)
0,0925	Ω_1	3,8	3,8000	3,8100
	Ω_2	20,72	20,8600	20,9600
	Ω_3	51,68	52,0400	52,5400
	Ω_4	96,39	96,4400	97,8700
0,1386	Ω_1	3,77	3,7700	3,7700
	Ω_2	19,8	19,9000	20,0800
	Ω_3	47,35	47,6200	48,4500
	Ω_4	84,14	84,2100	86,2300

Tabla 28: Comparación del parámetro adimensional de frecuencia Ω_i – Sección escalonada $h_2/h_1=0,8$;
 $l_1/l_2=2$; $\nu=0,3$; E-E

En todos los casos se observa que el método propuesto aproxima bien, tanto para vigas esbeltas como para vigas gruesas. En particular, para vigas gruesas logra una buena aproximación a un bajo costo computacional.

4.4 Vigas con restricciones elásticas traslacionales y rotacionales.

En la Figura 3 se muestra la variación del coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 para diferentes combinaciones de parámetros de restricción elástica rotacional y trasnacional. Los casos presentados son: i) $R_1=R_2=0$, $T_1=T_2=S$, ii) $R_1=R_2=S$, $T_1=T_2=\infty$, iii) $R_1=R_2=T_1=T_2=S$. Se consideraron dos espesores de vigas diferentes: a) $h/l = 0,1$ y b) $h/l = 0,4$. Las curvas obtenidas ilustran los intervalos de variación de las restricción para los cuales el coeficiente de frecuencia Ω_1 es sensible a los valores de r o t .

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un algoritmo general simple y eficiente para la determinación de frecuencias naturales de vigas gruesas. El enfoque está basado en la aplicación de una teoría de vigas de tercer orden y el método de Rayleigh-Ritz con el empleo de polinomios ortogonales característicos como funciones de aproximación.

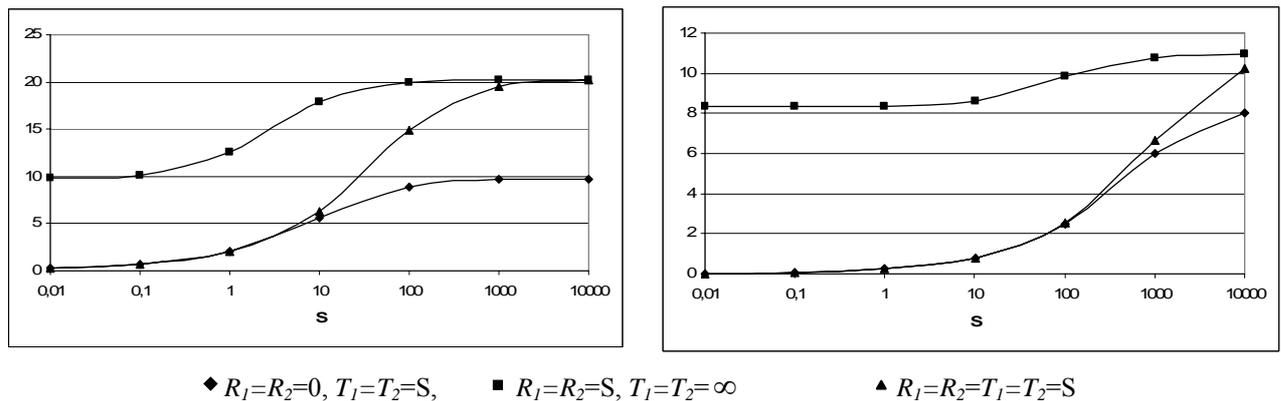


Figura 3: Variación del parámetro adimensional de frecuencia λ_i con los parámetros de restricción traslacional T y rotacional R. Viga de sección constante con restricciones iguales en ambos extremos y (a) $h/l=0,1$; (b); $h/l=0,4$

El algoritmo obtenido permite el estudio de vigas con varios efectos de complicación, tales como sección transversal variable, secciones escalonadas y diferentes condiciones de apoyo, incluyendo restricciones traslacionales y rotacionales.

Se demuestra una buena concordancia con los resultados obtenidos por el método de elementos finitos (y con un esfuerzo computacional mucho menor), como también con resultados presentados por otros investigadores.

REFERENCIAS

- Bhat, R.B., Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh–Ritz method. *Journal of Sound and Vibrations*; 102:493–9, 1985.
- Ferreira, A.J.M., Fasshauer, G.E., Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an RBF-pseudospectral method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196: 134-146, 2006.
- Kinematics Inc., *Altus Digital Recorder User's Manual*, Kinematics Inc. USA, 2002.
- Kinematics Inc., *KMI Power Spectral Density*, Kinematics Inc., USA, 2004.
- Maple 7. *Technical Computing Software for Engineers*, Maplesoft, Maple Inc. Canada, 2001.
- Heyliger, P.N. and Reddy, J.N., A higher order beam finite element for bending and vibration problems. *Journal of Sound and Vibrations*, 126, 309-326, 1988.
- Jemielita, G., Techniczna Teoria Płyty Średniej Grubości (Technical Theory of Plates with Moderate Thickness), *Rozprawy Inżynierskie (Engineering Transactions)*, Polska Akademia Nauk., 23(3), 483-499, 1975.
- Kohan, P., Nallim, L. and Gea, S., Dynamic characterization of beam type structures: Analytical, numerical and experimental applications. *Applied Acoustics* 72, 975–981, 2011.
- Lee, J., Schultz, W.W., Eigenvalue analysis of Timoshenko beams and axisymmetric Mindlin plates by the pseudospectral method, *Journal of Sound and Vibrations*. 269, 609–621, 2004.
- Nallim, L.G. and Grossi, R.O., A general algorithm for the study of the dynamical behaviour of beams. *Appl Acoust*; 57:345–56, 1999.
- Reddy, J.N., A simple higher order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics* 51, 745-752, 1984a.
- Reddy, J.N., *Energy variational methods in applied mechanics*. John Wiley, 1984b.
- SAP2000, *User's Manual*, Computers and Structures, USA, 2010.

- Rossi, R.E., Laura, P.A.A. and Gutiérrez, R.H., A note on transverse vibrations of a Timoshenko beam of non-uniform thickness clamped at one end and carrying a concentrated mass at the other, *Journal of Sound and Vibration*, 143, 491-502, 1990.
- Timoshenko, S.P., On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philosophical Magazine*, 41, 774-746, 1921.
- Tong, X., Tabarrok, B., Yeh K.Y., Vibration analysis of Timoshenko beams with nonhomogeneity and varying cross-section. *Journal of Sound and Vibration*; 186:821–35, 1995.
- Wang, C.M., Reddy, J.N. and Lee, K.H., *Shear deformable beams and plates. Relationships with classical solutions*. Elsevier Science Ltd., 2000.