

MODELAGEM POR HELICOIDES DE RESTRIÇÕES REDUNDANTES

Andrea Piga Carboni^a, Henrique Simas^b e Daniel Martins^c

^aUniversidade Federal de Santa Catarina 88040-900 Florianopolis SC Brazil andrea.piga@gmail.com
<http://www.ufsc.br>

^bUniversidade Federal de Santa Catarina 88040-900 Florianopolis SC Brazil simas@emc.ufsc.br
<http://www.ufsc.br>

^cUniversidade Federal de Santa Catarina 88040-900 Florianopolis SC Brazil daniel@emc.ufsc.br
<http://www.ufsc.br>

Palavras Chave: Helicoides, Restrições redundantes, Mecanismos.

Resumo. O projeto de mecanismos que apresentam restrições redundantes pode acarretar em esforços internos, em pequenas tolerâncias e em dificuldade na montagem. O objetivo do projeto de mecanismos com restrições exatas é atingir a mobilidade desejada através da agregação do menor número de restrições. O presente artigo apresenta uma modelização baseada na teoria de helicoides dos graus de liberdades e das restrições de um mecanismo. Helicoides são uma representação sintética da posição e orientação de um corpo no espaço como coordenadas de um vetor \mathbb{R}^6 , desta forma ferramentas de álgebra linear podem ser utilizadas para análise e síntese de mecanismos. Dois conceitos fundamentais, restrição e grau de liberdade, podem ser modelados como heliforça e heligiro na teoria de helicoides. Através desta modelização, a mobilidade pode ser calculada bem como o número das restrições redundantes e um conjunto de técnicas computacionais pode ser obtido. Um caso de estudo é apresentado para ilustrar a aplicação destas técnicas.

1 INTRODUÇÃO

A análise prévia dos movimentos permitidos e das restrições que um mecanismo pode apresentar constitui uma fase muito importante do projeto, principalmente em aspectos concernentes a montagem do mecanismo, a mobilidades indesejadas ou à falta de movimentos necessários ao seu funcionamento. Neste contexto, a análise das restrições desempenha o importante papel, pois permite evidenciar se um mecanismo apresenta uma condição de mobilidade indesejada ou de restrições redundantes.

O primeiro caso, o de mobilidade indesejada, ocorre quando os elos do mecanismo apresentam graus de liberdade que permitem movimentos não conformes às especificações do projeto e que podem comprometer a execução da tarefa especificada.

O outro caso, o das restrições redundantes, ocorre quando mais de uma restrição atua no mesmo grau de liberdade. Esta condição pode induzir esforços internos no mecanismo, gerar dificuldade na fase de montagem e assim, será necessária tolerância mais acurada na produção das peças. Para contornar este problema, o projeto de mecanismos com restrições exatas, ou mecanismos auto alinhantes, foca-se em projetar mecanismos com a mobilidade desejada e o menor número de restrições, minimizando-se os problemas de tolerância e de esforços internos.

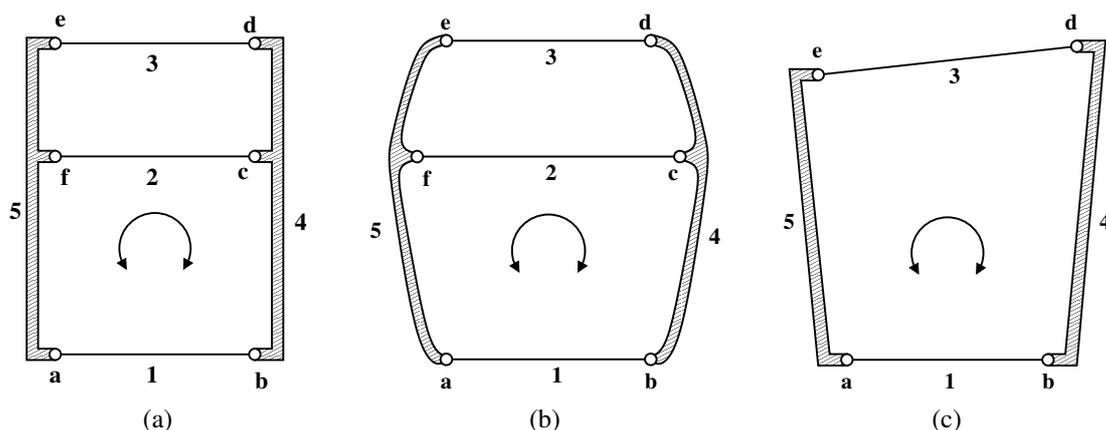


Figura 1: Mecanismos planos com restrições redundantes (1(a) e 1(b)) e sem restrições redundantes (1(c))

A figura 1(a) mostra um mecanismo plano, com cinco elos (1, 2 e 3 binários, 4 e 5 ternários) e seis juntas rotativas (a , b , c , d , e , f) que apresenta uma mobilidade rotacional em relação ao eixo que normal ao plano da figura, como ilustrado pela flecha. A montagem do mecanismo sem introduzir esforços é possível apenas se os elos 1, 2 e 3 possuem exatamente o mesmo comprimento. As juntas c e f (em conjunto com elo 2) são restrições redundantes que atuam em paralelos às juntas a , b , d e e do mecanismo sem afetar sua mobilidade. Deste modo, restrições redundantes podem ser definidas como aquelas restrições cuja eliminação não altera a mobilidade do mecanismo.

No caso em que o elo 2 apresente um comprimento maior (por exemplo um erro de manufatura, uma deformação plástica ou uma dilatação térmica) o mecanismo pode ser montado apenas a custo da deformação dos elos 4 e 5, como mostrado na figura 1(b). Assim, esforços internos serão introduzidos e poderão comprometer a vida útil do mecanismo ou até sua funcionalidade.

Se o elo 2 e as juntas c e f forem eliminadas, o mecanismo resultante, ilustrado na figura 1(c), é um mecanismo de quatro barras. Este mecanismo apresenta mobilidade idêntica ao mecanismo original da figura 1(a), mas, em contrapartida, não apresenta restrições redundantes

no plano, pois qualquer variação linear ou angular dos elos no plano da figura não irá introduzir esforços na montagem.

No presente artigo as restrições redundantes são abordadas mediante o uso de ferramentas da teoria de helicoides, os conceitos de grau de liberdade e de restrição são então modelados por heligiros e por heliforças. Além disso, a relação entre as restrições redundantes e o cálculo da mobilidade é evidenciada, pela introdução de ferramentas de álgebra linear que permitem uma tratamento rigorosa da análise das restrições redundantes. Por fim, um exemplo de cálculo das restrições redundantes e da mobilidade é apresentado.

2 MOBILIDADE

Definição 1 *A mobilidade ou número de graus de liberdade (DoF) de um mecanismo é o número de parâmetros independentes necessários para especificar completamente a configuração da cadeia cinemática no espaço, com respeito ao elo escolhido como referência, segundo a definição do IFToMM Ionescu (2003).*

Apesar de a mobilidade ser um conceito bem definido, o cálculo da mobilidade de um mecanismo é um assunto controverso na literatura. Uma revisão das diferentes abordagens para o cálculo da mobilidade pode ser encontrada em Gogu (2005), onde são apresentadas as principais fórmulas utilizadas para o cálculo da mobilidade, bem como suas limitações.

Para um mecanismo geral, o cálculo da mobilidade pode ser efetuado mediante o critério de Grübler-Kutzbach, que pode ser encontrada em Phillips (1990), e é apresentada a seguir:

$$M = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i \quad (1)$$

em que λ é a ordem do sistema de helicoides ($\lambda = 3$ no caso plano e $\lambda = 6$ no caso espacial), n é o número de elos do mecanismos, j é o número de juntas e f_i representa os graus de movimentos permitidos pela junta i .

Aplicando a equação 1 ao mecanismo apresentado na figura 1(a), a mobilidade é erroneamente determinada como:

$$M = 3(5 - 6 - 1) + 6 = 0 \quad (2)$$

Esse resultado mostra que o critério 1 falha para o cálculo da mobilidade de mecanismos que apresentam restrições redundantes. A razão do erro pode ser encontrada examinando as premissas que fundamentam tal critério, cada novo elo e junta adicionado ao mecanismo acrescenta restrições ao mesmo, mas erroneamente o critério interpreta que o acréscimo destas restrições implica sempre na diminuição dos graus de liberdade dos mecanismos, Phillips (1990).

Mas, como evidenciado no exemplo do mecanismo com restrições redundantes apresentado anteriormente, restrições redundantes não alteram a mobilidade de um mecanismo, logo na presença desse tipo de restrições a equação 1 não será verdadeira. No caso do mecanismo da figura 1(a) o elo 2 e as juntas c e f podem ser eliminadas sem afetar sua mobilidade.

Uma fórmula correta para o cálculo da mobilidade é apresentada na equação 3, vale ressaltar que sendo esta formulação correta, ela deve satisfazer à definição de mobilidade (definição 1).

$$M = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i + q \quad (3)$$

onde q representa o número de restrições que atuam em paralelo, ou seja, o número de restrições redundantes. Ressalta-se que essa formulação faz uma compensação dos graus de liberdade referentes às restrições redundantes que na fórmula anterior eram erroneamente retirados.

Esse critério encontra-se na literatura com diferentes formulações e denominações, em Huang et al. (2009) é referenciado como critério de Grübler-Kutzbach modificado e é utilizado para o cálculo da mobilidade de mecanismos com restrições redundantes. Porém, a aplicação do critério 3 requer o conhecimento prévio das restrições redundantes presentes no mecanismo.

O cálculo das restrições redundantes pode ser efetuado de forma independente do cálculo da mobilidade. Na seção seguinte são introduzidas as ferramentas matemáticas para uma abordagem do cálculo das restrições redundantes.

3 NOÇÕES BÁSICAS DE TEORÍA HELICOIDES

A teoria de helicoides pode ser considerada um fundamento da cinemática e da estática. Helicoides podem ser usados como forma de representar os movimentos de um corpo rígido ou as forças e os momentos a ele aplicados. Um helicóide que representa um movimento é chamado de *heligi* (*twist*), no enquanto um helicóide que representa um conjunto de forças e momentos é chamado de *heliforça* (*wrench*).

Helicoides são vetores de \mathbb{R}^6 expressos nas coordenadas da reta de Plücker. A reta de Plücker é dada pelo vetor do \mathbb{R}^6 :

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (4)$$

em que $u \in \mathbb{R}^3$ representa a direção da reta e $v \in \mathbb{R}^3$, $v = r \times u$ o momento desta reta em relação a um ponto qualquer P , sendo $r \in \mathbb{R}^3$ um vetor que representa a menor distância entre a reta e a origem do sistema de coordenadas, como na figura 2(a). Nesta representação, um helicóide possui a seguinte notação

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} s \\ s_0 \times s + hs \end{bmatrix} \quad (5)$$

onde s é o vetor unitário na direção do helicóide, s_0 é o vetor posição de um ponto sobre o eixo do helicóide e h é o passo do helicóide. Uma ilustração de um helicóide é mostrada na figura 2(b).

3.1 Heligi

Um heligi é um helicóide que descreve o movimento instantâneo de um corpo rígido. Pode ser representado na forma:

$$\mathcal{S}^M = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ v_x \ v_y \ v_z] \quad (6)$$

onde os primeiros três elementos representam a velocidade angular do corpo em relação ao sistema de coordenadas globais. Os outros elementos representam a velocidade, no sistema de coordenadas globais de um ponto do corpo. Cada heligi representa apenas um movimento, se um corpo é sujeito a mais de um movimento independente, o conjunto deles será representado numa matriz em que cada heligi será disposto em uma das suas linhas.

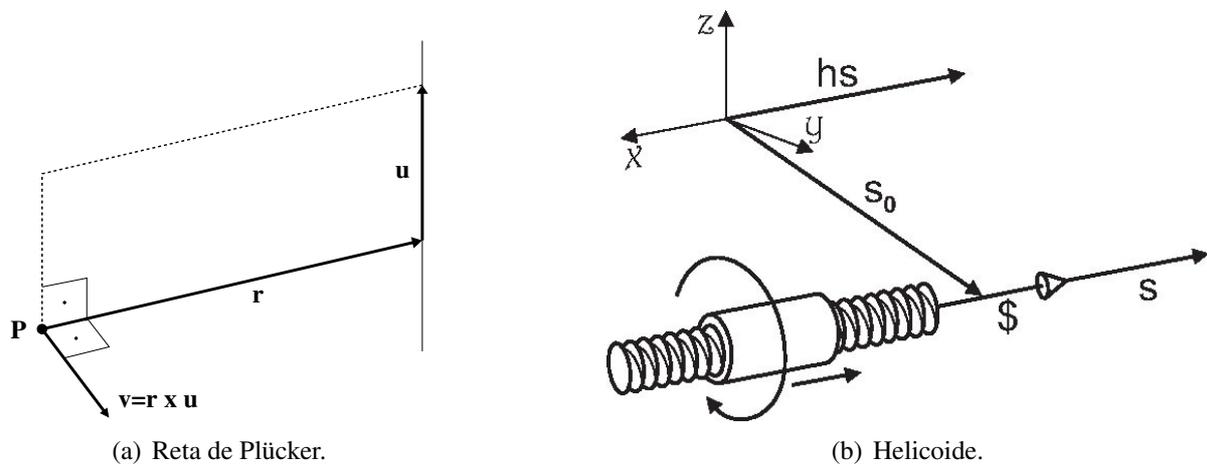


Figura 2: Reta de Plücker e Helicoide

3.2 Heliforça

Uma heliforça é um helicoide que descreve a força resultante e o momento do sistema de forças que atuam em um corpo rígido. A heliforça pode ser representada na seguinte forma:

$$\mathcal{S}^A = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z] \tag{7}$$

Os primeiros três elementos descrevem a força resultante em relação à um sistema de coordenadas globais e os outros, o momento resultante do sistema de forças em relação à origem do sistema de coordenadas. Um conjunto de restrições independentes pode ser arranjado na forma de matriz das heliforças, de forma análoga à matriz dos heligiros.

A heliforça descreve a força resultante f e o momento m aplicados a um corpo rígido em relação à origem O do sistema de coordenadas. A linha de ação da força resultante define o eixo instantâneo do helicoide que representa a heliforça. As seguintes relações podem ser utilizadas para calcular a força resultante f e o momento m de um sistema de n forças F_i e k momentos M_j aplicados ao corpo:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^n F_i \\ m &= \sum_{j=1}^k M_j \\ M_i &= r_i \times F_i \end{aligned} \tag{8}$$

onde M_i são os momentos das forças F_i em relação à origem O do sistema de coordenadas.

3.3 Reciprocidade entre heligiros e heliforças

Se uma heliforça \mathcal{S}^A atua sobre um corpo rígido de forma que o trabalho realizado é nulo quando o corpo é sujeito a um movimento descrito por um heligiro \mathcal{S}^M , essa condição é chamada de reciprocidade, e os helicoides são ditos recíprocos. A condição de reciprocidade pode ser expressa considerando que o trabalho de uma heliforça sobre um heligiro é dado pelo produto escalar entre os dois, portanto:

$$\mathcal{S}^A \cdot \mathcal{S}^M = \omega_x M_X + \omega_y M_y + \omega_z M_z + v_x F_X + v_y F_y + v_z F_z = 0 \tag{9}$$

Ressalta-se que como $\mathcal{S}^A \in R^6$ e $\mathcal{S}^M \in R^6$, $\mathcal{S}^A \cdot \mathcal{S}^M = 0$, os dois vetores, \mathcal{S}^A e \mathcal{S}^M , são ortogonais. Deste modo, a condição de reciprocidade pode ser entendida da seguinte forma:

sejam dois corpos rígidos conectados por uma junta de n graus de liberdade, o heligiro descreve as direções permitidas para o movimento de um corpo em relação ao outro em um sistema de coordenadas, no enquanto a heliforça recíproca do heligiro representa as direções ao longo das quais as forças e os momentos aplicados ao corpo são resistidos, que são as direções ortogonais.

Ainda, do fato dos vetores $\A e $\M serem ortogonais, tem-se que os conjuntos das heliforças e dos heligiros têm interseção vazia e constituem espaços complementares e assim, se o posto da matriz dos heligiros é n , o posto da matriz do recíproco (heliforças) será $6 - n$.

3.4 Combinações de heligiros e heliforças

Dado um conjunto de helicoides são definidas duas operações: a união e a interseção [Shukla e Whitney \(2005\)](#), [Gerbino e Arrichiello \(2004\)](#).

A união é expressa na forma:

$$\text{União } (\$, \$_2, \dots, \$_n) = \bigcup_{i=1}^n \$_i^A = \begin{bmatrix} \$_1 \\ \$_2 \\ \dots \\ \$_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

A interseção é expressa na forma:

$$\begin{aligned} \text{Interseção}(\$_i) &= \bigcap_{i=1}^n (\$_i) \\ &= \text{Reciprocal} \left\{ \bigcup_{i=1}^n [\text{Reciprocal}(\$_i)] \right\} \\ &= \text{Reciprocal} \begin{bmatrix} \text{Reciprocal}(\$_1) \\ \text{Reciprocal}(\$_2) \\ \vdots \\ \text{Reciprocal}(\$_n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

A interpretação das operações descritas acima pode ser feita com base nos seguintes teoremas [Konkar \(1993\)](#), [Gerbino e Arrichiello \(2004\)](#):

Teorema 1 *A heliforça resultante de um conjunto de n heliforças que atuam em paralelo sobre um corpo é o conjunto:*

$$\$_{\text{Paralelo}}^A = \bigcup_{i=1}^n \$_i^A \quad (12)$$

Teorema 2 *O heligiro resultante de um conjunto de n heligiros que atuam separadamente sobre um corpo através de restrições múltiplas é o conjunto:*

$$\$_{\text{Paralelo}}^M = \bigcap_{i=1}^n \$_i^M \quad (13)$$

Teorema 3 *O movimento resultante que o elo final de um mecanismo serial com n restrições pode fazer é o conjunto:*

$$\mathcal{S}_{Serial}^M = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{S}_i^M \quad (14)$$

Teorema 4 *A heliforça resultante transmitida ao elo final de um mecanismo serial com n restrições é o conjunto:*

$$\mathcal{S}_{Serial}^A = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{S}_i^A \quad (15)$$

A interseção de um conjunto de heliforças é uma heliforça resultante. Ela descreve as forças e os momentos resultantes que todas as heliforças podem resistir. De forma equivalente a heliforça resultante descreve as direções de movimentos que são impedidas por mais de uma restrição, ou seja, as restrições redundantes.

4 REPRESENTAÇÃO DE PARES CINEMÁTICOS POR HELICOIDES

A teoria de helicoides permite a descrição do movimento instantâneo de um corpo rígido sujeito a restrições, bem como das forças e dos momentos aplicados ao corpo. As liberdades e as restrições das juntas elementares podem ser representadas considerando a matriz dos heligiros e das heliforças.

4.1 Junta prismática

A junta prismática permite apenas uma translação ao longo de uma direção específica do espaço, permitindo um grau de liberdade. A matriz dos heligiros possui uma linha, sendo que os primeiros três elementos representam a velocidade angular e são nulos, os outros representam as componentes da direção de translação. A matriz dos heligiros de uma junta prismática pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{S}_{Prismatica}^M = [0 \ 0 \ 0 \ a \ b \ c] \quad (16)$$

A matriz das heliforças da junta pode ser calculada como o recíproco da matriz dos heligiros:

$$\mathcal{S}_{Prismatica}^A = \begin{bmatrix} d & e & f & 0 & 0 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

4.2 Junta rotativa

A junta rotativa permite apenas uma rotação em torno de um eixo específico, permitindo um grau de liberdade. Assim, a matriz dos heligiros possui uma linha, onde os primeiros três elementos representam a velocidade angular, e os outros as componentes do produto vetorial $v = r \times \omega$. Considerando um vetor $r = [p_1 \ p_2 \ p_3]$ que representa um ponto do eixo de

rotação, e o vetor $\omega = [a \ b \ c]$ que representa o vetor unitário do eixo de rotação, a matriz dos heligiros pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{M}_{Rotativa}^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

A matriz das heliforças da junta pode ser calculada como o recíproco da matriz dos heligiros:

$$\mathcal{A}_{Rotativa}^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 0 & 0 & g & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & f \end{bmatrix} \quad (19)$$

4.3 Junta cilíndrica

A junta cilíndrica permite dois movimentos independentes: uma translação e uma rotação em torno do mesmo eixo. A matriz dos heligiros possui portanto duas linhas, uma que representa o movimento de rotação, e uma que representa o movimento de translação. A matriz dos heligiros de uma junta cilíndrica orientada no eixo x e situada na origem do sistema de coordenadas pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{M}_{Cilindrica_x}^M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

A matriz das heliforças da junta pode ser calculada como o recíproco da matriz dos heligiros:

$$\mathcal{A}_{Cilindrica_x}^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

5 ANÁLISE DAS RESTRIÇÕES REDUNDANTES DE MECANISMOS

Um mecanismo pode ser modelado como um conjunto de corpos rígidos sujeitos a restrições impostas pelas juntas. Dado um mecanismo e escolhido um elo de referência como base e um elo a ser analisado, pode-se definir um caminho no mecanismo como segue.

Definição 2 *Caminho em um mecanismo: Um caminho em um mecanismo consiste em uma série acíclica de nós (elo-junta-elos....) com início no elo a ser analisado e fim no elo fixo considerado como base. Um caminho que contém elos não binários possui ramificações: uma ramificação de um caminho pode ser conectada ao elo analisado, ao elo fixo ou a um elo intermediário de outro caminho. Nesse último caso o mecanismo possui caminhos cruzados, Shukla e Whitney (2005).*

Mecanismos onde o elo a ser analisado e o elo de referência são conectados apenas por caminhos paralelos (ou seja não existem caminhos cruzados), podem ser analisados para calcular as restrições redundantes através das metodologias propostas em Shukla e Whitney (2005), Whitney (2004), Konkar (1993), Huang et al. (2009), Gerbino e Arrichiello (2004).

No caso de mecanismos que apresentam caminhos cruzados, as metodologias citadas anteriormente fornecem resultados errados. As metodologias propostas por Davies Davies (2006b),

Davies (2006a), Davies (1995b), Davies (1995a) devem ser utilizadas. Nesse artigo apenas mecanismos que não apresentam caminhos cruzados são considerados.

As ferramentas apresentadas nos teoremas da seção 3.4 foram implementadas em Octave para a resolução do exemplo apresentado a seguir.

Seja o mecanismo plano de quatro barras apresentado na figura 3: o mecanismo possui cinco elos e quatro juntas rotativas no eixo z (normal ao plano da figura).

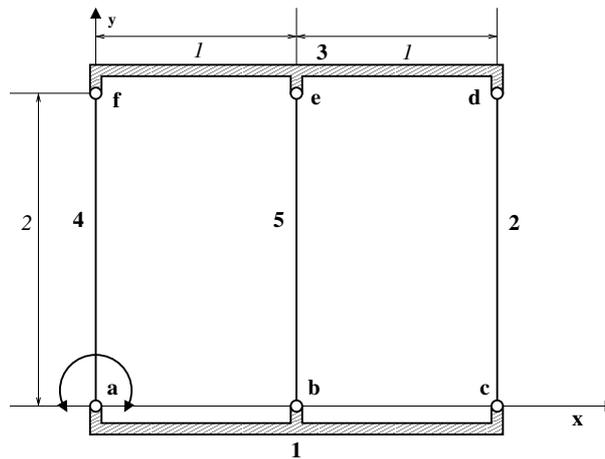


Figura 3: Mecanismo plano com restrições redundantes

O elo 1 é escolhido como fixo (referência) e o elo 3 é o elo a ser analisado. Os elos 1 e 3 são conectados por três caminhos paralelos: o caminho $a - 4 - f$ formado pela junta a , o elo 4 e a junta f , o caminho $b - 5 - e$ formado pela junta b , o elo 5 e a junta e e o caminho $c - 2 - d$ formado pela junta c , o elo 2 e a junta d . As matrizes dos heligiros das juntas rotativas no sistema de coordenadas de referência podem ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a^M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{M}_b^M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{M}_c^M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{M}_d^M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{M}_e^M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{M}_f^M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

Com base nos teoremas apresentados na seção 3.4 a matriz do heligiro resultante para o caminho $a - 4 - f$ é dada pela união dos heligiros das juntas 1 e 4:

$$\mathcal{M}_{\text{Caminho}_{a-4-f}}^M = \mathcal{M}_a^M \cup \mathcal{M}_f^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

A matriz da heliforças pelo caminho $a - 4 - f$ pode ser calculada como recíproco da matriz dos heligiros:

$$\mathcal{A}_{\text{Caminho}_{a-4-f}}^A = \text{Reciprocal}(\mathcal{M}_{\text{Caminho}_{a-4-f}}^M) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

A matriz do heligiros resultante para o caminho $b - 5 - e$ é dada pela união dos heligiros das juntas b e e :

$$\mathbb{M}_{Caminho_{b-5-e}}^M = \mathbb{M}_b^M \cup \mathbb{M}_e^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

A matriz da heliforças pelo caminho $b - 5 - e$ pode ser calculada como recíproco da matriz dos heligiros:

$$\mathbb{A}_{Caminho_{b-5-e}}^A = \text{Reciprocal}(\mathbb{M}_{Caminho_{b-5-e}}^M) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

A matriz do heligiros resultante para o caminho $c - 2 - d$ é dada pela união dos heligiros das juntas c e d :

$$\mathbb{M}_{Caminho_{c-2-d}}^M = \mathbb{M}_c^M \cup \mathbb{M}_d^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

A matriz da heliforças pelo caminho $c - 2 - d$ pode ser calculada como o recíproco da matriz dos heligiros:

$$\mathbb{A}_{Caminho_{c-2-d}}^A = \text{Reciprocal}(\mathbb{M}_{Caminho_{c-2-d}}^M) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Cada caminho impõe um conjunto de restrições entre o elo 1 e o elo 3. Para analisar se o mecanismo possui restrições redundantes as interseções das heliforças resultantes de cada caminho devem ser consideradas. A interseção das heliforças de todos os caminhos mostra se existem direções de movimentos restritas por todos os caminhos, mas se a interseção for nula ainda não é possível tirar conclusões sobre a presença de restrições redundantes.

É necessário considerar a interseção de cada par de heliforças: se existir uma interseção não nula, então isso indica a presença de restrição redundante. A verificação pode ser feita sistematicamente da seguinte forma, [Shukla e Whitney \(2005\)](#), [Gerbino e Arrichiello \(2004\)](#):

1. Considere um par de caminhos e considere a interseção das heliforças correspondentes;
2. Avalie as restrições redundantes do par de caminhos considerados, em seguida faça a combinação dos dois caminhos mediante a união das heliforças do par de caminhos;
3. Considere a interseção da nova heliforça calculada com outro caminho, repetindo os passos anteriores até que todos os caminhos sejam combinados.

Seja a interseção das heliforças dos caminhos $a - 4 - f$ e $b - 5 - e$. Aplicando a equação 11 a interseção das heliforças pode ser calculada como:

$$\mathbb{A}_{Caminho_{a-4-f}}^A \cap \mathbb{A}_{Caminho_{b-5-e}}^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Esse resultado deve ser examinado com atenção: a interseção não é vazia, porém o caso considerado é plano. Examinado as linhas da matriz das heliforças resultante da interseção dos dois caminhos, pode-se verificar que essas heliforças correspondem as restrições do plano: uma força na direção do eixo z e dois momentos respectivamente em torno dos eixos x e y . Portanto, a interseção é nula, ou seja, não existem restrições redundantes entre os caminhos $a - 4 - f$ e $b - 5 - e$.

A união dos caminhos $a - 4 - f$ e $b - 5 - e$ pode ser calculada com base na equação 10:

$$\mathcal{S}_{Caminho_{a-4-f}}^A \cup \mathcal{S}_{Caminho_{b-5-e}}^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

A interseção entre a heliforça resultante dos caminhos $a - 4 - f$ e $b - 5 - e$ e o caminho $c - 2 - d$ é calculada como:

$$\mathcal{S}_{Caminho_{a-4-f} \cup Caminho_{b-5-e}}^A \cap \mathcal{S}_{Caminho_{c-2-d}}^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

O resultado da interseção pode ser interpretado da seguinte forma: as últimas três linhas correspondem as restrições impostas pelo movimento plano e podem ser desconsideradas. A primeira linha corresponde a uma força na direção do eixo y (que gera um momento em torno do eixo z) e representa uma restrição redundante. Os três elos 4, 5 e 2 concorrem na determinação da posição ao longo do eixo y do elo 3 (com relação ao elo 1 de referência), portanto se os elos não forem do mesmo comprimento, como já evidenciado na seção 2 o mecanismo pode ser montado apenas com deformação dos elos.

Pode observar-se que o mecanismo apresentado na figura 1(c) é equivalente ao mecanismo 1(a) cuja análise da mobilidade apresentada na seção 2 tinha evidenciado a falha do cálculo da mobilidade mediante o critério de Grübler-Kutzbach devido à presença de restrições redundantes.

Aplicando o critério modificado 3, considerando $q = 1$ como calculado pela análise das restrições redundantes, o valor da mobilidade é:

$$M = 3(5 - 6 - 1) + 6 + 1 = 1 \quad (32)$$

como esperado para o mecanismo.

6 CONCLUSÕES

O presente artigo evidencia a importância da análise das restrições de um mecanismo. A presença de restrições redundantes, ou seja, daquelas restrições cuja eliminação não afeta a mobilidade do mecanismo, pode introduzir esforços internos e comprometer o funcionamento do mesmo, portanto deve ser cuidadosamente avaliada.

O critério para o cálculo de mobilidade de Grübler-Kutzbach falha quando o mecanismo apresenta restrições redundantes, fornecendo valores errados para a mobilidade. O artigo apresenta a modelagem das restrições redundantes mediante a teoria de helicoides, mostrando uma metodologia para determinação das restrições redundantes através de ferramentas de álgebra linear. Dessa forma, com o conhecimento das restrições redundantes, o cálculo da mobilidade pode ser efetuado de forma correta.

REFERÊNCIAS

- Davies T.H. Circuit actions attributable to active couplings. *Mechanism and Machine Theory*, 30(7):1001–1012, 1995a.
- Davies T.H. Couplings, coupling network and their graphs. *Mechanism and Machine Theory*, 30(7):991–1000, 1995b.
- Davies T.H. Dual coupling networks. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science.*, 220(8):1237–1247, 2006a.
- Davies T.H. Freedom and constraint in coupling networks. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science.*, 220(7):989–1010, 2006b.
- Gerbino S. e Arrichiello F. How to investigate constraints and motions in assemblies by screw theory. *Intelligent Computation in Manufacturing Engineering*, 4, 2004.
- Gogu G. Mobility of mechanisms: a critical review. *Mechanism and Machine Theory*, (40):1068–1097, 2005.
- Huang Z., Liu J., e Zeng D. A general methodology for mobility analysis of mechanisms based on constraint screw theory. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 52(5):1337–1347, 2009.
- Ionescu T.G. Contents: Standardization of terminology. *Mechanism and Machine Theory*, 38(7–10):597 – 605, 2003.
- Konkar R. *Incremental kinematic analysis and symbolic synthesis of mechanism*. Tesis de Doutorado, Stanford University, 1993.
- Phillips J. *Freedom in Machinery, Vol 2*. Cambridge University Press, Cambridgeshire, 1990.
- Shukla G. e Whitney D.E. The path method for analyzing mobility and constraint of mechanism and assemblies. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2(2):184–192, 2005.
- Whitney D.E. *Mechanical Assemblies: Their Design, Manufacture, and Role in Product Development*. Oxford, 2004.