

GRUPOS, SIMETRIAS E A ENUMERAÇÃO DE CONFIGURAÇÕES NÃO ISOMORFAS PARA ROBÔS METAMÓRFICOS PLANARES

Anelize Zomkowski Salvi^a, Daniel Martins^b, Roberto Simoni^c e Jian Dai^d

^aUniversidade Federal de Santa Catarina - POSMEC - 88040-900 Florianopolis SC Brazil
anezomkosalvi@gmail.com <http://www.posmec.ufsc.br>

^bUniversidade Federal de Santa Catarina - POSMEC - 88040-900 Florianopolis SC Brazil
daniel@emc.ufsc.br <http://www.posmec.ufsc.br>

^cUniversidade Federal de Santa Catarina - POSMEC - 88040-900 Florianopolis SC Brazil
roberto.emc@gmail.com <http://www.posmec.ufsc.br>

^d King's College London, Department of Informatics. Centre for Robotics Research, Strand, London
WC2R 2LS - London, - Inglaterra- jian.dai@kcl.ac.uk
<http://www.kcl.ac.uk>

Palavras Chave: Robôs Metamórficos, configurações, simetrias e grupos.

Resumo.

Este artigo foca-se na enumeração de configurações não isomorfas para robôs metamórficos planares. Um robô metamórfico é constituído por uma coleção de módulos mecanicamente independentes que pode autoreconfigurar de maneira dinâmica, os módulos considerados são quadrados. No entanto, diferentes arranjos dos módulos podem constituir configurações isomorfas por isometrias. Para eliminar todas as configurações não isomorfas a ação do grupo de simetrias do retângulo ou do quadrado que contém a configuração é considerada, além de algumas propriedades relevantes. A ação é interpretada numa representação matricial da configuração, sendo que um teorema para simplificar o processo, bem como uma proposição são introduzidos, além de um teste de isomorfismo. Assim, tem-se um novo método de enumeração para robôs metamórficos cujos módulos são quadrados, este método foi implementado e os resultados obtidos são apresentados.

1 INTRODUÇÃO

Um robô metamórfico é constituído por uma coleção de módulos mecanicamente independentes que pode autoreconfigurar de maneira dinâmica, (Chirikjian, 1994). Mudanças na configuração dos módulos e, conseqüentemente, na topologia do robô metamórfico, resultam da movimentação dos módulos em relação a seus vizinhos. (Chirikjian, 1994; Chirikjian e Pamecha, 1996) apresentam algumas situações onde estes robôs podem ser aplicados como, por exemplo, na construção civil, principalmente em casos de emergência, e na exploração espacial. Isto porque a capacidade de autoreconfigurar possibilita a este tipo de robô grande adaptabilidade as mais diversas tarefas.

Desta forma, para que se possa aproveitar todas as potencialidades dos robôs metamórficos é necessário que se determine que configurações um dado número de módulos pode assumir. Neste contexto, (Martins e Simoni, 2009) ressaltam três questões frequentemente encontradas na literatura da área e que estão intimamente relacionadas, são elas:

1. Como enumerar as possíveis configurações que cada conjunto de módulos pode assumir, (Chen e Burdick, 1998);
2. Como encontrar uma configuração ótima para uma determinada tarefa, (Chen e Burdick, 1995), (Bi et al., 2003);
3. Como planejar o movimento de um robô metamórfico, ou seja, como determinar uma seqüência de movimentos dos módulos, para que apartir de sua configuração atual atinja-se a desejada, (Pamecha et al., 1997; Chiang e Chirikjian, 2001).

Todas as questões apresentadas recaem de algum modo sobre a primeira, 1, por exemplo, para determinar uma configuração ótima para realização de determinada tarefa é necessário que se conheçam em que configurações o robô é capaz de exercê-la. Também, para determinar uma seqüência de movimentos de uma configuração dada a uma pretendida, deve-se estabelecer que configurações intermediárias o robô metamórfico irá assumir. Assim, o conhecimento prévio das configurações possíveis para cada conjunto de módulos pode auxiliar na resposta destes e outros questionamentos relativos aos robôs metamórficos.

Para o caso planar, os tipos de módulos frequentemente encontrados são o quadrado, como em (Pamecha et al., 1996), (Dumitrescu et al., 2002), (Chiang e Chirikjian, 2001) e o hexagonal como em (Pamecha et al., 1996; Abrams e Ghrist, 2004; Walter et al., 2004; Dumitrescu et al., 2002; Walter et al., 2002). Já para o caso espacial, tem-se os cúbicos, (Rus e Vona, 2001; Yoshida et al., 1998) e os dodecaédricos, (Yim et al., 1997, 2001).

Duas configurações de robôs metamórficos são consideradas distintas se não podem ser obtidas uma da outra por isometrias, movimentos rígidos, e serão ditas não isomorfas.

O presente artigo foca-se no problema de enumeração de configurações distintas para robôs metamórficos cujos módulos são quadrados, para tanto, são usadas ferramentas de teoria dos grupos, afim de identificar simetrias presentes numa configuração e assim, diminuir a quantidade de configurações isomorfas geradas no processo enumerativo. Sendo que para um número total de onze módulos quadrados todas as configurações não isomorfas serão enumeradas.

Uma técnica para enumeração é apresentada, bem como resultados computacionais de sua implementação, todos os resultados referentes aos passos desta técnica são contribuições dos autores.

2 GERAÇÃO RECURSIVA

Definição 1 *Geração recursiva é o processo de gerar todas as configurações de um robô metamórfico com $n + 1$ módulos a partir todas as configurações com n módulos, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Considere este processo para robôs metamórficos de módulos quadrados, começando com a configuração que consiste em apenas um módulo, tem-se na figura 1a todas as possíveis formas de se acrescentar um novo módulo ao existente, a figura 1b apresenta todas as configurações assim obtidas.



Figura 1: Colagens possíveis 1a, configurações geradas 1b.

Porém, as configurações em 1b podem ser obtidas umas das outras por meio de rotações ou translações e serão denotadas isomorfas. Formalmente, duas configurações serão ditas isomorfas se existir uma isometria que leve uma na outra, para o caso de módulos quadrados, figuras planas, uma melhor formalização do conceito de isometria é apresentado a seguir.

Definição 2 *Uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita uma isometria do plano se preserva distâncias entre os pontos do \mathbb{R}^2 , isto é, tal que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, para todos os pontos $x, y \in \mathbb{R}^2$.*

Exemplo 1 *Qualquer translação, rotação ou reflexão (numa linha ou num ponto) são isometrias do plano.*

Assim, duas configurações planares são ditas isomorfas se podem ser obtidas através de uma translação, rotação ou reflexão (numa linha ou num ponto) uma da outra, pois estas são as isometrias do plano.

Formalizado o conceito de configurações isomorfas, quer-se diminuir a geração deste tipo de configurações durante o processo recursivo, para tanto é necessário a identificação das simetrias de uma configuração, como será mostrado na figura 2.

Definição 3 *Dada uma figura F , uma simetria de F é uma aplicação $f : F \rightarrow F$ com as seguintes propriedades:*

- (i) f é uma isometria;
- (ii) f é sobrejetiva.

Segue da definição 3 que uma simetria leva uma figura em si e preserva distâncias.

A figura 2 mostra que os lados a , a' do quadrado 2b são simétricos em relação à reta vertical na figura. Ao se acrescentar um módulo ao lado a , obtém-se a configuração apresentada na figura 2b e ao se acrescentar o módulo em a' , tem-se a configuração em 2c. Nota-se que as duas configurações são a mesma a menos de rotação, ou da mesma reflexão na reta vertical que levou a em a' , o que é evidenciado na figura 2d.

Desta forma, fica evidenciado que a anexação de novo módulo a posições simétricas irá gerar configurações isomorfas, portanto é necessário que se identifique estas simetrias para diminuir o número de configurações isomorfas geradas. Assim, a próxima seção faz uma breve retomada de conceitos de teoria de grupos que irão basear o artigo.

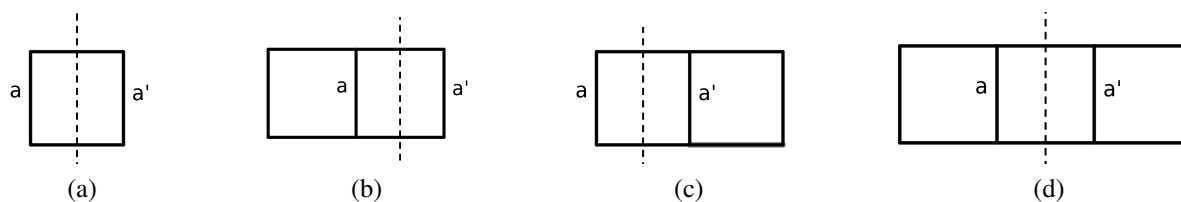


Figura 2: Geração de Isomorfismo ao acrescentar um módulo a lados simétricos do quadrado

3 GRUPOS

Como a técnica enumerativa para robôs de módulos quadrados a ser proposta baseia-se na captura das simetrias das configurações para evitar a geração de configurações isomorfas, faz-se necessária a formalização destes conceitos bem como de ferramentas da teoria dos grupos, assim conceitos básicos referentes a estes pontos são apresentados e podem ser encontrados nas literaturas (Alperin e Bell, 1995; Burrow, 1993; Rotman, 1995; Scott, 1964).

Definição 4 Um grupo é um par $(G, *)$ em que $* : G \times G \rightarrow G$ $(a, b) \rightarrow a * b$ é uma função, denominada operação do grupo, satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) *Associatividade:* Para quaisquer que sejam os elementos $a, b \in G$, tem-se $a * (b * c) = (a * b) * c$;
- ii) *Existência do Elemento Neutro:* Existe um elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, para todo $a \in G$;
- iii) *Existência de Elemento Inverso:* Para cada elemento $a \in G$, existe um elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Um fato importante a este trabalho é que dada uma figura F , o conjunto de todas as suas simetrias com a operação de composição de funções forma um grupo, chamado grupo de simetrias de F , pois o que se pretende é que dada uma configuração de robô com módulos quadrados possa-se identificar todas as suas simetrias, ou seja, todos os elementos do seu grupo de simetrias.

Exemplo 2 Sejam quadrado e um retângulo com centros geométricos coincidentes com a origem do sistema cartesiano e cujos lados (de comprimentos distintos) são paralelos aos eixos coordenados, Então, o grupo de simetrias do quadrado tem 8 elementos: a identidade, as reflexões nos eixos O_x e O_y , nas diagonais do quadrado, e a rotações de $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ radianos em torno da origem. O do retângulo tem 4 elementos: a identidade, as reflexões nos eixos O_x e O_y , e a rotação de π radianos em torno da origem (igualmente a reflexão na origem). A figura 3 evidencia os eixos de simetria de um quadrado e de um retângulo não quadrado.

A seguir é apresentado o conceito de ação de grupo, ele se refere a maneira como um grupo pode interagir com elementos de um dado conjunto.

Definição 5 Seja G um grupo e X um conjunto não vazio. Uma ação (à esquerda) de G sobre X é uma função

$$G \times X \rightarrow X$$

$$(g, x) \rightarrow g.x$$

satisfazendo as propriedades:



Figura 3: Eixos de simetrias do quadrado 3a e eixos de simetrias do retângulo 3b

- $e_G \cdot x = x$, para todo $x \in X$ e em que e_G é a identidade de G .
- $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, para todo $g, h \in G$ e para todo $x \in X$.

Exemplo 3 Seja G um grupo e X um conjunto não vazio qualquer. A função definida por

$$G \times X \rightarrow X$$

$$(g, x) \rightarrow x$$

é uma ação de G em X chamada trivial.

Ou seja, a função G age no conjunto X levando cada elemento de X em si.

4 AÇÃO DO GRUPO DE SIMETRIAS

Na seção anterior, foi mostrado que na geração recursiva são geradas configurações isomorfas e que este fato estava intimamente ligado com a presença de simetrias na configuração geradora. Nesta seção, será discutido quais simetrias pode apresentar uma configuração de um robô metamórfico planar cujos módulos são quadrados e como detectá-las. A detecção das simetrias possibilitará escolher regiões de anexação de novos módulos evitando-se a geração de configurações isomorfas.

Primeiramente, tem-se que uma configuração de um robô metamórfico cujos módulos são quadrados pode estar involta num retângulo não quadrado, ou num quadrado. Como mostram as figuras 4a e 4b, respectivamente.



Figura 4: Configuração 4a está involta num retângulo, a configuração 4b num quadrado.

Desta forma, uma configuração de um robô metamórfico cujos módulos são quadrados pode apresentar as simetrias do quadrado ou do retângulo que a contiver, dependendo da disposição dos módulos. Assim, o que segue é uma discussão de como detectar a presença dessas simetrias, porém, para tanto, alguns conceitos devem ser primeiramente introduzidos, como uma representação matricial de uma dada configuração com módulos quadrados 7 e um sistema de coordenadas associado à configuração 8.

Definição 6 Uma grade quadrada é a grade formada ao se ladrilhar o plano com quadrados.

Definição 7 Seja α uma configuração de um robô metamórfico planar de módulos quadrados. Considere a grade quadrada que a contém e seja m a quantidade de módulos na mais longa linha horizontal da grade preenchida por módulos do robô, e n a quantidade de módulos na mais longa linha vertical preenchida por módulos do robô. Chama-se matriz ID , a matriz $m \times n$ associada à configuração α , do seguinte módulo:

- $i \in \{0, 2, \dots, m - 1\}, j \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$
- A posição $0, 0$ é associada ao módulo mais a esquerda e acima na grade;
-

$$ID_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se há módulo na posição } i, j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Definição 8 Dada uma configuração α de um robô metamórfico de módulos quadrados associa-se um sistema de coordenadas do seguinte modo:

1. A origem do sistema de coordenadas deve coincidir com o centro geométrico do menor retângulo ou do quadrado que contiver a configuração;
2. O eixo O_x é paralelo a um dos pares de lados do retângulo ou quadrado envoltor e O_y é paralelo ao outro par de lados.

A figura 5 ilustra a associação do sistema de coordenadas a uma configuração. A matriz ID da configuração apresenta duas linhas e três colunas, note que O_x está representado entre a primeira e segunda linha da matriz e que O_y passa pela segunda coluna da matriz.

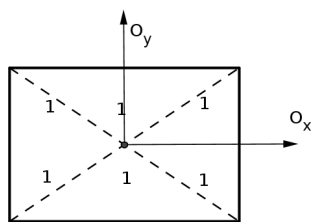


Figura 5: Associação do sistema de coordenadas a uma configuração

Definição 9 Para cada configuração dada pela matriz $ID = [a_{ij}]_{l \times c}$, com $i \in \{0, 1, 2, \dots, l - 1\}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, c - 1\}$ é associado um sistema de coordenadas cartesianos. A cada linha e coluna da ID associa-se uma reta, então os eixos O_x e O_y são tomados paralelos as linhas e colunas da matriz, respectivamente, do seguinte modo:

1. Se o número de linhas, l , for par, O_x passará entre as linhas $\frac{l}{2} - 1$ e $\frac{l}{2}$, e define-se $L_{limite} = \frac{l}{2} - 1$;
2. Se l for ímpar O_x passará sobre a linha $\frac{l-1}{2}$ e define-se $L_{limite} = \frac{l-1}{2}$;
3. Se o número de colunas, c , for par O_y passará entre as colunas $\frac{c}{2} - 1$ e $\frac{c}{2}$ e define-se $C_{limite} = \frac{c}{2} - 1$;

4. Se c for ímpar O_y passará sobre a coluna $\frac{c-1}{2}$ e define-se $C_{limite} = \frac{c-1}{2}$.

As definições de L_{limite} e C_{limite} serão usadas posteriormente e ajudam a identificar onde anexar um módulo após checadadas as simetrias.

Tendo definido a matriz ID e o sistema de coordenadas para cada configuração, pode-se então discutir como detectar a presença de simetrias numa configuração e posteriormente proceder a anexação de novos módulos.

5 SIMETRIAS DO RETÂNGULO

5.1 Reflexão no eixo O_x (Horizontal)

Observe a configuração do robô metamórfico dada na figura 6 ela apresenta simetria em relação à O_x .

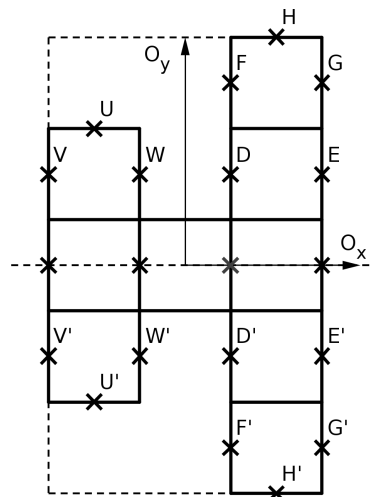


Figura 6: Configuração que apresenta simetria em relação à O_x

A configuração em 6 apresenta simetria em relação ao eixo O_x . Nela foram destacados os pares de pontos D e D', E e E', F e F', G e G', H e H', U e U', V e V', W e W' que são simétricos em relação ao eixo O_x .

Sua matriz ID é
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposição 1 Sejam $ID = [a_{ij}]l \times c$ a matriz ID de uma configuração dada e L_{limite} como na definição 9, a reflexão em O_x leva os elementos a_{ij} nos elementos $a_{(l-i-1)j}$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, L_{limite}\}$ e todo $j \in \{0, 1, \dots, c - 1\}$.

Se

$$a_{ij} = a_{(l-i-1)j} \tag{1}$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, L_{limite}\}$ e todo $j \in \{0, 1, \dots, c - 1\}$, então a configuração apresenta simetria em relação à O_x .

Demonstração da Proposição 1 Considere uma configuração dada pela matriz $ID = [a_{ij}]_{l \times c}$, um elemento a_{ij} e seu refletido em O_x , denotado por a_{ml} , devem estar numa perpendicular comum à O_x , ou seja, numa mesma coluna da ID, assim, $j = l$.

Ressalta-se que como tanto para o número par de linhas, quanto para o ímpar O_x foi definido passando no meio das linhas da ID, O_x é aqui considerado na posição $\frac{l-1}{2}$.

Os elementos a_{ij} e a_{ml} devem estar equidistantes de O_x . Como a distância entre O_x e a linha i é $\frac{l-1}{2} - i$, e a distância da linha m à O_x é $\frac{l-1}{2} - m$, tem-se $\frac{l-1}{2} - i = \frac{l-1}{2} - m$ e assim, $m = l - 1 - i$. Logo, a reflexão em O_x leva cada elemento a_{ij} da ID no elemento $a_{(l-i-1)j}$ desta forma, para que haja simetria horizontal $a_{ij} = a_{(l-i-1)j}$.

5.2 Reflexão no eixo O_y (Vertical)

A configuração do robô metamórfico dada na figura 7 apresenta simetria em relação ao eixo O_y .

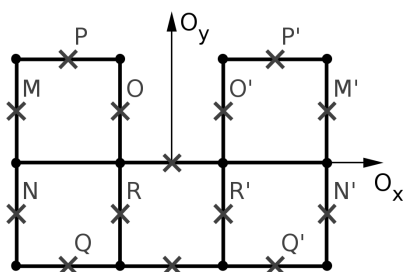


Figura 7: Configuração que apresenta simetria em relação à O_y

Proposição 2 Sejam $ID = [a_{ij}]_{l \times c}$ a matriz ID de uma configuração dada e C_{limite} como na definição 9, a reflexão em O_y leva os elementos a_{ij} nos elementos $a_{i(c-j-1)}$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, l - 1\}$ e todo $j \in \{0, 1, \dots, C_{limite}\}$.

Se

$$a_{ij} = a_{i(c-j-1)} \tag{2}$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, l - 1\}$ e todo $j \in \{0, 1, \dots, C_{limite}\}$, então a configuração apresenta simetria em relação à O_y .

Demonstração da Proposição 2 Análogo à proposição 1.

5.3 Simetria em Rotacional de π radianos

A configuração do robô metamórfico dada na figura 8 apresenta simetria rotacional de π radianos em relação à origem.

Proposição 3 Sejam $ID = [a_{ij}]_{l \times c}$ a matriz ID de uma configuração dada e L_{limite} , C_{limite} como na definição 9, a rotação de π radianos em relação à origem no sentido anti-horário leva os elementos a_{ij} nos elementos $a_{(l-i-1)(c-j-1)}$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, L_{limite}\}$ e todo $j \in \{0, 1, \dots, C_{limite}\}$.

Se

$$a_{ij} = a_{(l-i-1)(c-j-1)} \tag{3}$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, L_{limite}\}$ e todo $j \in \{0, 1, \dots, C_{limite}\}$, então a configuração apresenta simetria em relação à rotação de π radianos em relação em torno da origem no sentido anti-horário.

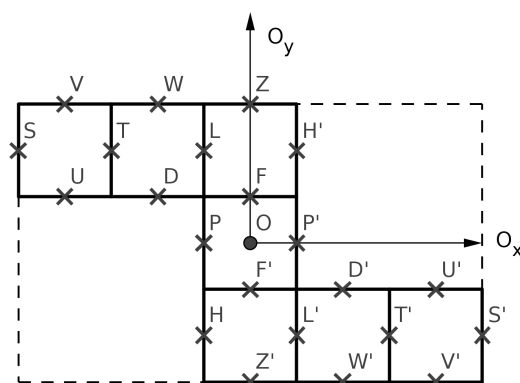


Figura 8: Configuração que apresenta simetria rotacional de π radianos

Demonstração da Proposição 3 *Segue das demonstrações anteriores, observando que rotacionar uma configuração de π radianos em relação à origem é equivalente a aplicar-se à configuração uma reflexão em O_x , seguida de uma reflexão em O_y .*

5.4 Simetrias do quadrado

Como mostrado no exemplo 2, o quadrado cujo centro geométrico coincide com a origem do sistema cartesiano possui 8 simetrias, o que segue é uma discussão de como detectar a presença destas simetrias nas configurações.

A identidade é trivial. Já a detecção das simetrias de reflexão em O_x e O_y , bem como a rotação de π radianos foram abordadas na seção simetrias do retângulo. Falta discutir como identificar as simetrias de reflexão nas duas diagonais do quadrado e as rotações de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ radianos em torno da origem.

5.4.1 Simetria de Reflexão na Diagonal Principal

Observe a figura 9, em que d_p é a diagonal principal, e os pares $P, P', Q, Q', R, R', S, S'$ e T, T' são simétricos em relação à d_p .

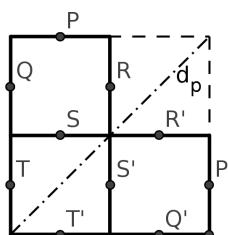


Figura 9: Configuração que apresenta simetria em relação à diagonal principal

Proposição 4 *Seja $ID = [a_{ij}]l \times l$ a matriz ID de uma configuração dada, a reflexão na diagonal principal leva os elementos a_{ij} nos elementos a_{ji} , para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, l - 1\}$.
Se*

$$a_{ij} = a_{ji} \tag{4}$$

para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, l - 1\}$ então a configuração apresenta simetria em relação à diagonal principal.

Demonstração da Proposição 4 A reflexão na diagonal principal é equivalente a operação de transposição para cada matriz ID dada.

5.4.2 Reflexão em Relação à Diagonal Secundária

Observe a figura 10, em que d_s é a diagonal secundária, e os pares $P, P', Q, Q', R, R', S, S'$ e T, T' são simétricos em relação à d_s .

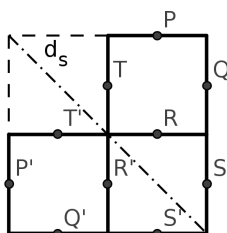


Figura 10: Configuração que apresenta simetria em relação à diagonal secundária

Proposição 5 Seja $ID = [a_{ij}]_{l \times l}$ a matriz ID de uma configuração dada, a reflexão na diagonal secundária leva os elementos a_{ij} nos elementos a_{ji} , para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, l - 1\}$.
Se

$$a_{ij} = a_{(c-j-1)(l-i-1)} \tag{5}$$

para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, l - 1\}$ então a configuração apresenta simetria em relação à diagonal secundária.

5.4.3 Simetrias Rotacionais de $\frac{\pi}{2}$, e $\frac{3\pi}{2}$ radianos em relação à origem

A figura 11 exibe configurações que apresentam simetria de rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos em relação à origem.

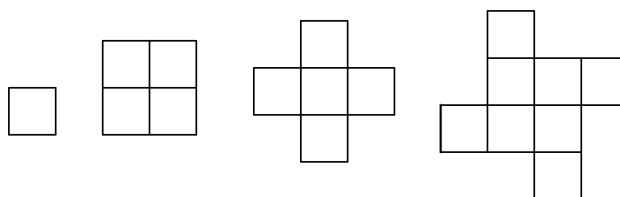


Figura 11: Configurações com simetria rotacional de $\frac{\pi}{2}$ radianos em relação à origem

Para construir as transformações que levam uma matriz ID nas matrizes $ID_{\frac{\pi}{2}}$ e $ID_{\frac{3\pi}{2}}$ que representem as configurações rotacionadas de $\frac{\pi}{2}$, e $\frac{3\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário em torno da origem, respectivamente, algumas considerações precisam ser feitas.

Primeiramente, necessita-se estabelecer como determinar genericamente o rotacionado de um ponto no \mathbb{R}^2 , isto é feito na proposição 6.

Proposição 6 A matriz que representa transformação de rotação por um ângulo θ ao redor da origem para um ponto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ por pré-multiplicação é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se:

1. A rotação de $\frac{\pi}{2}$ leva o ponto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ em $\begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\text{sen}(\frac{\pi}{2}) \\ \text{sen}(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix};$

2. A rotação de $\frac{3\pi}{2}$ leva o ponto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ em

$$\begin{bmatrix} \cos(\frac{3\pi}{2}) & -\text{sen}(\frac{3\pi}{2}) \\ \text{sen}(\frac{3\pi}{2}) & \cos(\frac{3\pi}{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}.$$

Seja $ID = [a_{ij}]l \times l$ a matriz ID de uma configuração dada, associe a cada elemento a_{ij} da ID o ponto de coordenadas $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ou seja, as linhas são associadas a coordenadas em O_x e as colunas a coordenadas em O_y .

A rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos na origem leva o ponto $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ no ponto de coordenadas $\begin{bmatrix} -j \\ i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Porém, como as colunas j da matriz ID serão associadas a coordenadas em O_y , uma coordenada $-j$ significa que o elemento está abaixo de O_x a uma distância j de O_x . Como para a matriz ID, O_x passa no meio das linhas, $-j = c - j - 1$.

Desta forma, a rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos na origem leva os elementos a_{ij} nos elementos $a_{(c-j-1)i}$. Por raciocínio análogo, mostra-se que a rotação de $\frac{3\pi}{2}$ na origem leva a_{ij} em $a_{j(l-i-1)}$.

A discussão acima é formalizada na proposição 7.

Proposição 7 Seja $ID = [a_{ij}]l \times l$ a matriz ID de uma configuração dada a rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos em relação à origem no sentido anti-horário leva os elementos a_{ij} nos elementos $a_{(c-j-1)i}$, para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$, já a rotação de $\frac{3\pi}{2}$ radianos em relação à origem no sentido anti-horário leva os elementos a_{ij} nos elementos $a_{j(l-i-1)}$.

Se

$$a_{ij} = a_{(c-j-1)i} \quad (6)$$

para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ então a configuração apresenta simetria em relação à rotação de $\frac{\pi}{2}$ e também a $\frac{3\pi}{2}$ radianos em torno da origem no sentido anti-horário.

Note que a proposição 7 diz que se uma configuração tem simetria em relação a rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos em torno da origem no sentido anti-horário, também apresentará simetria em relação à rotação de $\frac{3\pi}{2}$ nas mesmas condições. Isto porque, uma rotação de $\frac{3\pi}{2}$ no sentido anti-horário, corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ no horário e se a rotação de $\frac{\pi}{2}$ num sentido deixa a configuração invariante, a rotação no sentido oposto pelo mesmo ângulo também deixará.

6 REGIÕES DE COLAGEM

Detectadas as simetrias de uma configuração dada, deve-se anexar um novo módulo apenas a posições não simétricas, para se evitar configurações isomorfas, um conjunto formado por um representante de cada posição não simétrica será chamado região de colagem. Porém, uma configuração pode apresentar mais de uma simetria, ou apresentar somente a simetria de identidade. Assim, deve-se considerar a ação de todo o grupo de simetrias do retângulo ou do quadrado que contém a configuração.

Para melhor definir as regiões de colagem, será usada a estrutura da matriz ID da configuração e estendidos os conceitos de L_{limite} e C_{limite} apresentados na definição 9 para os conceitos de linha e coluna finais, respectivamente.

Para configuração na figura 12, que apresentava simetria em relação a O_x e a O_y , são destacadas as linhas e colunas limites.

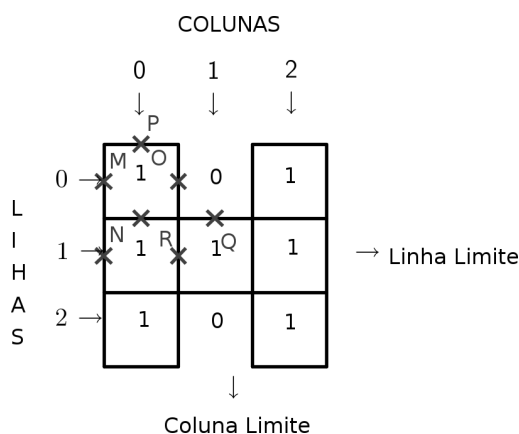


Figura 12: Linhas e Colunas Limites para a colagem

As configuração obtidas após a anexação de um novo módulo em todas as posições possíveis para as linhas e colunas de 0 até a linha e a coluna limites são apresentadas abaixo, na figura 13.

$$\begin{matrix}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} & \text{(d)}
 \end{matrix}$$

Figura 13: a) Anexação de um novo módulo ao ponto P; b) ao ponto M; c) ao ponto N; d) tanto ao ponto O, quanto ao Q.

O que segue é a extensão do conceito de linhas e colunas limites para as outras simetrias que uma configuração possa apresentar, mas como uma configuração pode apresentar mais de uma simetria, irá se denominar L_{final} e C_{final} ao efeito do conjunto dessas simetrias na determinação das últimas linhas e colunas onde deve-se proceder a anexação dos módulos.

Definição 10 *Seja a_{ij} os elementos da Matriz ID de uma configuração α dada, ID com c colunas e l linhas, com $i \in \{0, 1, \dots, l - 1\}$ e $j \in \{0, 1, \dots, c - 1\}$. Definem-se uma linha final, denotada por L_{final} , e uma coluna final, denotada por C_{final} , para anexação de novo módulo*

à configuração do robô metamórfico planar de acordo com a simetria que apresenta a configuração do seguinte modo:

1. Se α apresenta simetria somente em relação à O_x , então se o número de linhas, l , for par, $L_{final} = L_{limite} = \frac{l}{2} - 1$, se l for ímpar, $L_{final} = L_{limite} = \frac{l-1}{2}$ e $C_{final} = c - 1$ em ambos os casos;
2. Se α apresenta simetria somente em relação à O_y , então se o número de colunas, c , for par, $C_{final} = C_{limite} = \frac{c}{2} - 1$, se c for ímpar, $C_{final} = C_{limite} = \frac{c-1}{2}$ e $L_{final} = l - 1$ em ambos os casos;
3. Se α apresenta simetria em relação à diagonal principal, então a $L_{final} = l - 1$, e C_{final} é definido para cada linha i da ID, sendo $C_{final} = i$;
4. Se α apresenta simetria em relação à diagonal secundária, então a $L_{final} = l - 1$, e C_{final} é definido para cada linha i da ID, sendo $C_{final} = c - i - 1$;
5. Se α apresenta simetria rotacional de $\frac{\pi}{2}$ radianos, então L_{final} coincide com o caso da simetria em relação à O_x e C_{final} com o caso da simetria em relação à O_y ;
6. Se α apresenta simetria rotacional de π radianos, então a $L_{final} = l - 1$, e C_{final} coincide com o caso da simetria em relação à O_y ;
7. Se α apresenta mais de uma simetria, então L_{final} será a menor dentre as determinadas para cada simetria, bem como C_{final} .

A escolha das L_{final} e C_{final} para as simetrias de reflexão em O_x , e O_y já foram explicadas, a escolha para as outras simetrias segue os pontos abaixo:

1. Simetria em relação à diagonal principal: a diagonal principal passa sobre os pontos de coordenada $i = j$ e como pontos à esquerda da diagonal têm simétricos à esquerda da mesma, escolheu-se os pontos à esquerda ou sobre a diagonal, para os quais $j \leq i$, ou seja, para cada linha, $C_{final} = i$.
2. Simetria em relação à diagonal secundária: o mesmo raciocínio do item 1, levando em consideração que para pontos sobre a diagonal secundária vale a igualdade $j = c - i - 1$;
3. Simetria rotacional de $\frac{\pi}{2}$ radianos: como $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, a simetria divide o plano em quatro regiões simétricas, logo, tomou-se a região equivalente a $\frac{1}{4}$ da ID, ou seja, a metade das linhas, como na simetria em O_x , e a metade das colunas, como na simetria em O_y ;
4. Simetria rotacional de π radianos: tomou-se a região equivalente a $\frac{1}{2}$ da ID, no caso, todas as linhas e metade das colunas como na simetria em O_y .

6.1 Anexação de um novo módulo às regiões de colagem

A anexação de um novo módulo a uma configuração irá por vezes gerar aumento da dimensão da matriz ID em relação a dimensão da ID original, por outras irá ocorrer a substituição de um 0 da ID original por um 1 que representa o novo módulo.

Um novo exemplo é dado pela figura 14, ela acaba por ilustrar o item i) da definição 11 que será apresentada. Como o módulo ao qual é anexado um novo módulo está na primeira linha da

$$\begin{array}{l} \text{Nova Linha} \rightarrow 0 \quad 1 \\ \text{ID original} \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \widehat{1} \\ 1 & 1 \end{array} \right. \rightarrow \text{Módulo} \\ \hspace{15em} \text{de} \\ \hspace{15em} \text{anexação} \end{array}$$

Figura 14: Um novo módulo é anexado ao módulo marcado como módulo de anexação

configuração original é necessário acrescentar-se uma linha acima das existentes para alocar o novo módulo.

Já no caso da figura 15 como se anexa um novo módulo à posição em que previamente havia um 0 na ID, não há necessidade de se aumentar a dimensão da mesma. Este exemplo ilustra o item v) da definição 11.

Anexação de Novo Módulo

$$\text{ID original} \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right. \implies \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \left\{ \text{ID Nova} \right.$$

Figura 15: Um novo módulo é anexado a uma posição onde previamente havia um 0 na ID original

Porém, nem todos os zeros na região de colagem podem ser substituídos por 1 para gerar novas configurações pela anexação de um módulo. Observe a figura 16, nela ocorre a anexação de um novo módulo a ID original (à esquerda na figura), a configuração obtida encontra-se representada na ID à direita na figura. O módulo acrescentado aparece hachurado, porém a nova configuração assim obtida não é uma configuração válida, pois o módulo hachurado não está ligado a nenhum outro módulo.

Anexação de Novo Módulo

$$\text{ID original} \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right. \implies \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Configuração} \\ \text{não válida} \end{array} \right.$$

Figura 16: À direita, ID original, já à esquerda o acréscimo de novo módulo não gera uma configuração válida

Uma outra ressalva é o que ocorre na situação descrita a seguir. A figura 17a ilustra uma configuração e sua matriz ID, esta configuração apresenta simetria em relação à diagonal principal. A ela é acrescentado um novo módulo acima do elemento na posição $\{0, 0\}$, o que é apresentado na figura 17b, se o módulo fosse alocado à esquerda do módulo na posição $\{0, 0\}$, a figura 17c mostra que a mesma configuração seria obtida. Isto ocorre devido ao fato de que as duas posições onde o módulo foi alocado em a 17c, a 17b são simétricas em relação à diagonal principal. Desta forma para evitar geração de configurações isomorfas, se uma configuração tiver simetria em relação à diagonal principal, deve-se optar por acrescentar um módulo acima ou a esquerda do módulo na posição $\{0, 0\}$. A definição 11 irá optar por acrescentá-lo ao lado.

Por uma análise semelhante, se uma configuração apresentar simetria em relação à diagonal secundária, deve-se optar por acrescentar um novo módulo abaixo ou à direita do último módulo na diagonal secundária. A definição 11 opta por acrescentá-lo à direita.

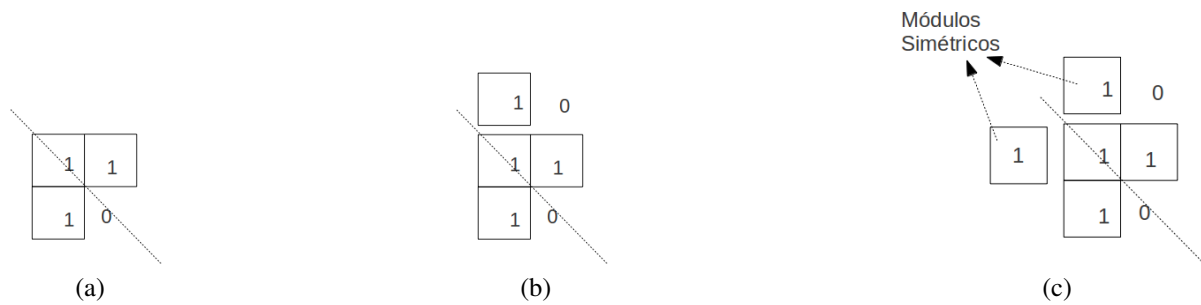


Figura 17: 17a: Simetria em relação à diagonal principal; 17b: Acréscimo de módulo; 17c: Geração de configurações isomorfas.

Assim, ao se acrescentarem módulos a módulos na primeira ou última linha ou coluna da ID poderá haver aumento na dimensão da ID gerada em relação a original. Além disso, ao se acrescentar módulos a posições previamente ocupadas por 0 na ID deve-se atentar se realmente está se gerando uma configuração válida, para tanto o novo módulo deve estar ligado a um pré-existente. Esta discussão é resumida na definição 11.

Definição 11 *Seja ID a matriz de uma configuração α dada, ID com c colunas e l linhas e sejam L_{final} e C_{final} as linha e coluna finais para anexação de um novo módulo. O acréscimo de um novo módulo, gerando uma nova matriz ID, denotada por IDnova, é feito para cada uma das posições possíveis da região de colagem da ID original, ou seja, para as posições da ID original com $i = \{0, \dots, L_{final}\}$ e $j = \{0, \dots, C_{final}\}$, anexando o novo módulo a um pré-existente, ou seja, a uma posição em que $ID_{ij} = 1$, do seguinte modo:*

Se $ID_{ij} = 1$ e:

- i) $i = 0$, j qualquer, exceto para configurações com simetria em relação à diagonal principal, então:
uma IDnova pode ser obtida da ID original pelo acréscimo de uma nova linha acima das existentes, mantendo-se o número de colunas da ID original, sendo que o elemento da nova linha cuja coluna é j será 1 e os outros 0.*
- ii) $i = l - 1$, j qualquer, exceto para configurações com simetria em relação à diagonal secundária, então:
uma IDnova pode ser obtida da ID original pelo acréscimo de uma nova linha abaixo das existentes, mantendo-se o número de colunas da ID original, sendo que o elemento da nova linha cuja coluna é j será 1 e os outros 0.*
- iii) $j = 0$, i qualquer, então:
uma IDnova pode ser obtida da ID original pelo acréscimo de uma nova coluna à esquerda das existentes, mantendo-se o número de linhas da ID original, sendo que o elemento da nova coluna cuja linha é i será 1 e os outros 0.*
- iv) $j = c - 1$, i , então:
uma IDnova pode ser obtida da ID original pelo acréscimo de uma nova coluna à direita das existentes, mantendo-se o número de linhas da ID original, sendo que o elemento da nova coluna cuja linha é i será 1 e os outros 0.*

- v) $ID_{i-1,j} = 0$, $ID_{i+1,j} = 0$, $ID_{i,j-1} = 0$, ou $ID_{i,j+1} = 0$, então:
 uma ID nova pode ser obtida ao substituir cada um destes elementos 0 por 1, mas, sem que sejam ultrapassadas a linha e a coluna finais para colagem.

Até este ponto, o que se fez foi apresentar métodos para detectar simetrias de uma dada configuração e de como acrescentar novos módulos a posições não simétricas, porém dois novos resultados também contribuem para a diminuição da quantidade de configurações isomorfas geradas no processo recursivo. Estes resultados são apresentados no teorema 1 e na proposição 8.

Teorema 1 *Na geração recursiva de configurações não isomorfas, para um número de módulos maior ou igual a três, não há perda de configurações ao se considerar a configuração com k módulos alinhados $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ como geradora apenas das configuração com $k + 1$ módulos alinhados.*

Demonstração do Teorema 1 *Primeiramente, para provar que não há perda de configurações ao se considerar a configuração com k módulos alinhados $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ como geradora apenas das configuração com $k + 1$ módulos alinhados, deve-se mostrar que as outras configurações com $k + 1$ são obtidas no processo de geração de alguma outra configuração com k módulos.*

A demonstração será feita por indução em $K \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.

Para $k = 3$ a hipótese é válida, pois as duas únicas configurações não isomorfas com três módulos são dadas por :

$$ID_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } ID_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ao se anexar um novo módulo à ID_1 são obtidas as configurações não isomorfas em ID_{11} , ID_{12} , ID_{13} .

$$ID_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, ID_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } ID_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Já ao se acrescentar um novo módulo à ID_2 são obtidas as configurações em ID_{12} , ID_{13} , além da configuração em $ID_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Logo, pode-se considerar ID_1 como geradora apenas de ID_{11} , uma vez que ID_{12} e ID_{13} são geradas de ID_2 , portanto para $k = 3$ a hipótese é válida.

Considere que a hipótese seja válida para um número n qualquer de módulos e $n > 3$, ou seja, que não há perda de configurações ao se considerar a configuração com n módulos alinhados como geradora apenas da configuração com $n + 1$ módulos alinhados, o que se denota hipótese de indução.

Irá mostrar-se que a hipótese é válida para $n + 1$ módulos.

Seja $ID_{L+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n+1 \times 1}$ a configuração com $n + 1$ módulos alinhados, a anexação de um novo módulo à ID_L pode gerar configurações com $n + 2$ módulos alinhados, como em $ID_{L+2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n+2 \times 1}$ ou configurações com um módulo desalinhado em relação aos demais como em $ID_{D+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n+1 \times 2}$.

Porém, a configuração ID_{D+1} pode ser obtida de $ID_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times 2}$.

ID_D é uma configuração com n módulos alinhados e um desalinhado e para obter-se ID_{D+1} a partir de ID_D basta que se acrescente um novo 1 ao final primeira linha da ID_D . Procedimento semelhante pode ser usado para se obter qualquer configurações com $n + 1$

módulos alinhados e um desalinhado de configurações com n módulos alinhados e um desalinhado. A única ressalva dá-se quando o desalinhamento ocorre acima do último módulo alinhado como em $ID_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n+1 \times 2}$. Para obter a configuração em ID_S de uma configuração com n módulos alinhados e um desalinhado pode-se, por exemplo, acrescentar um novo módulo antes de todos módulos alinhados na primeira linha da configuração $ID_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times 2}$.

Assim, todas as configurações com $n + 2$ em que haja algum desalinhamento podem ser obtidas de alguma configuração com $n + 1$ módulos em que há algum módulo desalinhado. Como a hipótese de indução garante que as configurações com $n + 1$ módulos em que há algum módulo desalinhado são geradas no processo enumerativo, não haverá perda de configurações ao se considerar a configuração com $n + 1$ módulos alinhados como geradora da configuração com $n + 2$ módulos alinhados. Tem-se assim, o resultado.

Na prática este teorema contribui para a diminuição da geração de configurações isomorfas e também evita checagem desnecessária de simetrias. Pois, para configurações alinhadas, como $ID_1 = (1 \ 1 \ 1)$, não há porque realizar estas checagens, uma vez que ficou provado poder-se considerar esta configuração como geradora apenas da configuração $ID_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$.

Para todas as configurações em linha, irá proceder-se da mesma forma.

Um resultado semelhante ao do teorema 1 é apresentado na proposição 8.

Proposição 8 Na geração recursiva de configurações não isomorfas não há perda de configurações ao se considerar as configurações com $ID_{m,n}$, $m, n > 1$, tais que $ID_{i,j} \neq 0$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ e para todo $j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, como impedidas de gerar novas configurações pela anexação de um módulo.

Demonstração da Proposição 5 Considere $ID_S = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{m \times n}$, $m, n > 1$

A anexação de um novo módulo pode ocorrer acima, abaixo, à esquerda ou à direita dos

pré-existentes. Considere $ID_{S+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{m+1 \times n}$, obtida de ID_S pela anexação

de um módulo acima dos existentes, tem-se que ID_{S+1} pode ser obtida por exemplo de

$ID_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{m+1 \times n}$, substituindo o 0 na última linha e coluna de ID_P por

1.

Se o novo módulo for acrescentado à direita, à esquerda, ou abaixo dos módulos em ID_S , pode-se fazer construções semelhantes para mostrar que a nova configuração pode ser obtida a partir de uma configuração distinta de ID_S . Logo, tem-se o resultado.

Assim como para o teorema 1, a proposição 8 será incorporada a técnica de geração recursiva de configurações não isomorfas para diminuir a quantidade de configurações geradas no processo, bem como para diminuir o número de configurações para o qual é necessária a checagem de simetrias antes de se proceder a anexação de novo módulo. Por exemplo, a proposição 8 mostra que configurações como $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ podem ser consideradas como não geradoras de descendentes, então para este tipo de configuração não haverá checagem de simetrias nem anexação de novos módulos.

O método de geração recursiva de configurações não isomorfas conjuntamente com os resultados do o teorema 1 é da proposição 8 é ilustrado na figura 18, em que as posições hachuradas são as não simétricas, ou seja, onde se deve proceder a anexação de novos módulos.

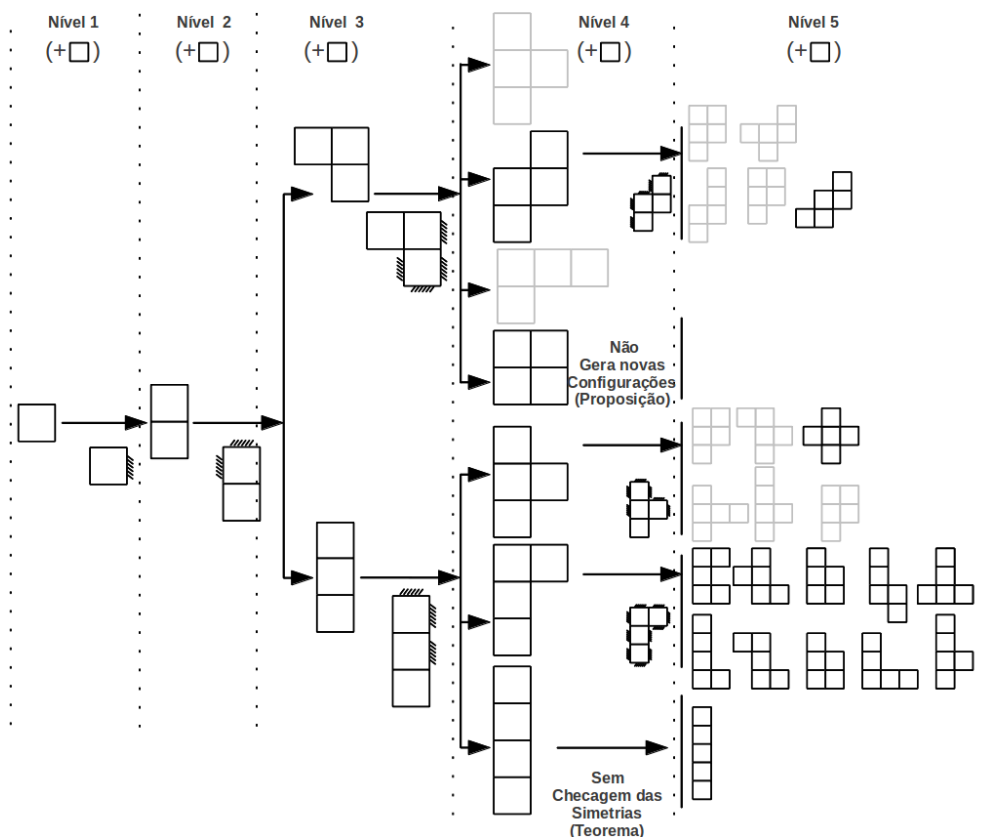


Figura 18: Geração recursiva de configurações não isomorfas conjuntamente com o teorema 1 e a proposição 8

Falta discutir como eliminar as configurações isomorfas remanescentes e que aparecem na figura 18 em cinza. Para tanto será apresentado um teste de isomorfismo que também é contribuição deste trabalho.

6.2 Teste de Isomorfismo

Foi definido que duas configurações de robôs metamórficos planares são isomorfas se existe uma simetria que leve uma na outra, ou seja, se é possível obter uma configuração da outra pela

aplicação de uma simetria.

Também, para robôs de módulos quadrados foi demonstrado que as possíveis simetrias de uma configuração são a identidade, as rotações de $\frac{\pi}{2}$, π ou $\frac{3\pi}{2}$ radianos e as reflexões em O_x , em O_y , na diagonal principal, ou na diagonal secundária. Assim, se duas configurações α , β são isomorfas é porque α pode ser obtida de β pela aplicação de uma ou mais dessas simetrias à configuração β e vice-versa.

Assim, para que duas configurações de robôs cujos módulos são quadrados sejam isomorfas alguma das condições na proposição 9 deve ocorrer.

Proposição 9 *Duas configurações α e β de robôs metamorfos cujos módulos são quadrados são isomorfas, se, e somente se, para suas matrizes ID, denotadas por ID_α , ID_β , respectivamente, algum dos itens abaixo for satisfeito:*

1. $ID_\alpha = ID_\beta$;
2. $ID_\alpha^T = ID_\beta$, em que ID_α^T representa a matriz transposta de ID_α (reflexão na diagonal principal, só válida para matrizes quadradas);
3. ID_α representar a reflexão em O_x de ID_β ;
4. ID_α representar a reflexão em O_y de ID_β ;
5. ID_α representar a composição da reflexão em O_x com a reflexão em O_y de ID_β , (rotação de π radianos em relação à origem);
6. ID_α representar a composição das operações de transposição e reflexão em O_x de ID_β , (rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos em relação à origem, só válida para matrizes quadradas);
7. ID_α representar a composição das operações de transposição e reflexão em O_y de ID_β , (rotação de $\frac{3\pi}{2}$ radianos em relação à origem, só válida para matrizes quadradas);
8. ID_α representar a composição das operações de transposição, de reflexão em O_x e de reflexão em O_y de ID_β (reflexão na diagonal secundária, só válida para matrizes quadradas).

Demonstração da Proposição 6 *Todas as possíveis simetrias estão apresentadas.*

A proposição 9 fornece regras para verificar se duas configurações são isomorfas através de operações em suas matrizes ID, o exemplo 4 ilustra o uso destas regras para verificar se duas configurações são isomorfas.

Exemplo 4 *Sejam $ID_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $ID_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*

Pois, ao se aplicar uma transposição à ID_1 , obtém-se a configuração $ID_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e ao se aplicar uma reflexão em O_y à ID_1^T obtém-se a configuração $ID_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $ID_V = ID_2$, pelo item 7 da proposição 9 as configurações em ID_1 e ID_2 são isomorfas. Ainda, vale ressaltar que o item 7 trata de casos em que uma configuração pode ser obtida da outra por uma rotação de ângulo $\frac{3\pi}{2}$ ao redor da origem no sentido anti-horário, pois facilmente verifica-se que ID_1 rotacionada um ângulo de $\frac{3\pi}{2}$ radianos na origem resulta em ID_2 .

A justificativa pela qual a proposição 9 foca-se na checagem das simetrias como composição das operações de reflexão em O_x , em O_y e de transposição é a elaboração de um algoritmo condensado, que será denominado teste comparativo.

Definição 12 *Teste Comparativo*

1. Verifique se $ID_1 = ID_2$. Se a igualdade for verdadeira, as matrizes são isomorfas e o teste é findado. Caso contrário, continue as verificações.
2. Denomine ID_2^1 a reflexão em O_y de ID_2 , faça $ID_2 = ID_2^1$ e descarte ID_2^1 , verifique se $ID_1 = ID_2$. Se a igualdade for verdadeira, as matrizes são isomorfas e o teste é findado. Caso contrário, continue as verificações.
(Este item verifica se ID_2 original é uma reflexão em O_y de ID_1)
3. Denomine ID_2^1 a reflexão em O_x de ID_2 , faça $ID_2 = ID_2^1$ e descarte ID_2^1 , verifique se $ID_1 = ID_2$. Se a igualdade for verdadeira, as matrizes são isomorfas e o teste é findado. Caso contrário, continue as verificações.
(Este item verifica se ID_2 original é uma reflexão em O_x e O_y de ID_1)
4. Denomine ID_2^1 a reflexão em O_y de ID_2 , faça $ID_2 = ID_2^1$ e descarte ID_2^1 , verifique se $ID_1 = ID_2$. Se a igualdade for verdadeira, as matrizes são isomorfas e o teste é findado. Caso contrário, continue as verificações.
(Este item verifica se ID_2 original é uma reflexão em O_x de ID_1)
5. Denomine ID_2^1 a transposta de ID_2 , faça $ID_2 = ID_2^1$ e descarte ID_2^1 , verifique se $ID_1 = ID_2$. Se a igualdade for verdadeira, as matrizes são isomorfas e o teste é findado. Caso contrário, continue as verificações.
(Este item verifica se ID_2 original é uma reflexão em O_x composta com a operação de transposição de ID_1)
6. Denomine ID_2^1 a reflexão em O_x de ID_2 , faça $ID_2 = ID_2^1$ e descarte ID_2^1 , verifique se $ID_1 = ID_2$. Se a igualdade for verdadeira, as matrizes são isomorfas e o teste é findado. Caso contrário, continue as verificações.
(Este item verifica se ID_2 é a matriz transposta de ID_1)
7. Denomine ID_2^1 a reflexão em O_y de ID_2 , faça $ID_2 = ID_2^1$ e descarte ID_2^1 , verifique se $ID_1 = ID_2$. Se a igualdade for verdadeira, as matrizes são isomorfas e o teste é findado. Caso contrário, continue as verificações.
(Este item verifica se ID_2 original é uma reflexão em O_y composta com a operação de transposição de ID_1)
8. Denomine ID_2^1 a reflexão em O_x de ID_2 , faça $ID_2 = ID_2^1$ e descarte ID_2^1 , verifique se $ID_1 = ID_2$. Se a igualdade for verdadeira, as matrizes são isomorfas e o teste é findado. Caso contrário, as matrizes são não isomorfas e o teste é considerado falso.
(Este item verifica se ID_2 original é uma reflexão em O_y composta com uma reflexão em O_x e com a operação de transposição de ID_1)

Os comentários entre parenteses em cada item mostram que o teste 12 abrange todas as condições da proposição 9, além disso, ele é pensado para que se possa aplicar operações sucessivas

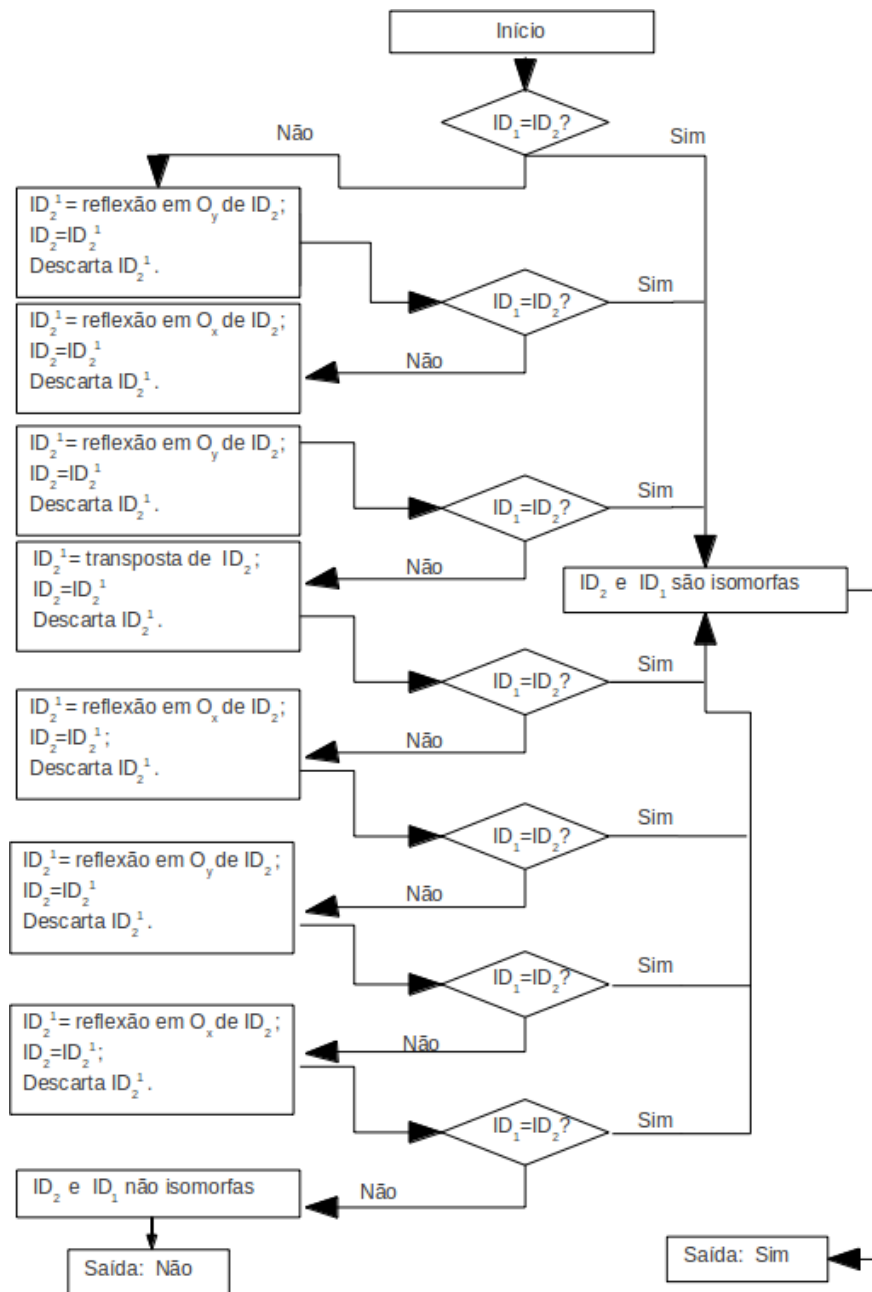


Figura 19: Teste comparativo

de reflexão e transposição sobre as matrizes no teste e também para que se possa descartar matrizes intermediárias.

O teste comparativo, definição 12 é resumido no diagrama de blocos da figura 19.

Porém, apenas com as ferramentas do teste Comparativo, definição 12, para mostrar por exemplo que as configurações em $ID_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $ID_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ são não isomorfas precisa-se descartar os oito itens. Mas não há chances delas serem isomorfas, pois nenhuma simetria pode levar uma configuração na outra, uma vez que em ID_1^T há um módulo ligado a três outros módulos, o que não ocorre em ID_l , assim uma função que leve ID_1^T em ID_l tem que alterar as distâncias relativas entre os módulos, não sendo, portanto, uma simetria.

Tem-se assim, que a verificação das oito condições do teste comparativo, definição 12, seria um processo dispendioso. Neste contexto, os testes de dimensão e vizinhança, respectivamente, 13 e 14 apresentam casos em que duas configurações podem ser consideradas diretamente como não isomorfas.

Definição 13 *Teste de dimensão: Sejam $ID_{m \times n}^1$ e $ID_{l \times k}^2$ matrizes ID de duas configurações para robôs metamórficos cujos módulos são quadrados, se as condições no item i e ii forem falsas, as configurações são não isomorfas e o teste é considerado falso.*

i) $m = l$ e $n = k$;

ii) $m = k$ e $n = l$.

Definição 14 *Teste de Vizinhança: Sejam $ID_{m \times n}^1$ e $ID_{l \times k}^2$ duas configurações para robôs metamórficos cujos módulos são quadrados, se existe um módulo em ID^1 ligado a n outros e isto não ocorre para ID^2 o teste considerado falso e as configurações são não isomorfas.*

Baseado nos testes de dimensão, vizinhança e comparativo, definições 13, 14, 12, respectivamente, pode-se, finalmente, elaborar um teste geral para verificar se duas configurações dadas pelas suas matrizes ID_1 e ID_2 são isomorfas, denominado teste de isomorfismo, que é apresentado na definição 15.

Definição 15 *Teste de isomorfismo: Sejam $ID_{m \times n}^1$ e $ID_{l \times k}^2$ matrizes ID de duas configurações para robôs metamórficos cujos módulos são quadrados para verificar se as configurações são isomorfas procede-se na seguinte ordem:*

1. *Efetua-se se o teste da dimensão, se ele for falso as configurações são não isomorfas, e o teste de isomorfismo é findado. Caso contrário, procede-se o item 2.*
2. *Efetua-se se o teste de vizinhança, se ele for falso as configurações são não isomorfas, e o teste de isomorfismo é findado. Caso contrário, procede-se o item 3.*
3. *Efetua-se o teste da comparação, se ele for falso as configurações são não isomorfas, caso contrário, são isomorfas.*

Exemplo 5 *Sejam as configurações dadas pelas matrizes $ID^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $ID^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ irá aplicar-se o teste de isomorfismo para elas.*

1. *Teste da dimensão: $ID_{2 \times 3}^1$ e $ID_{3 \times 2}^2$, teste verdadeiro. Continua-se o teste de isomorfismo.*
2. *Teste da Comparação: ID^2 apresenta um módulo ligado a três outros, o que não ocorre para ID^1 , teste falso. Logo, as configurações são não isomorfas e o teste de isomorfismo é findado.*

O teste de isomorfismo foi arquitetado para se efetuarem primeiro os subtestes em que seja necessária uma quantidade menor de operações. Um diagrama de blocos do mesmo é apresentado na figura 20.

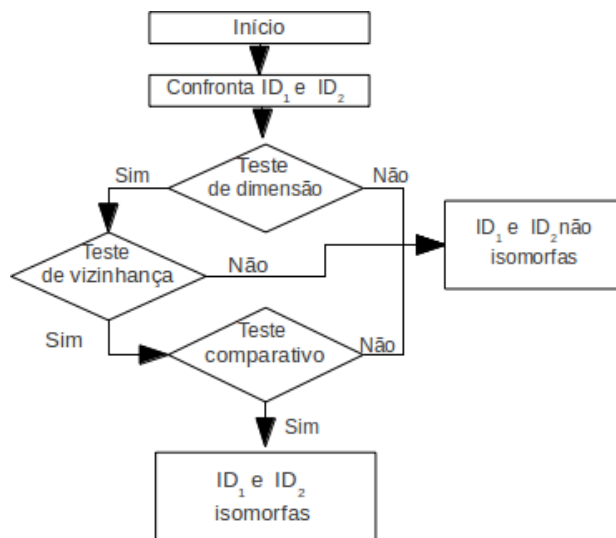


Figura 20: Teste de Isomorfismo

Tendo definido como detectar as simetrias de uma configuração, como efetuar a anexação de novos módulos, bem como os resultados do teorema 1 e da proposição 8 que indicam restrições na anexação, além do teste de isomorfismo pode-se por fim determinar um método de geração recursiva de configurações não isomorfas, suas etapas são formalizadas na próxima seção.

7 NOVO MÉTODO GERAÇÃO RECURSIVA E RESULTADOS COMPUTACIONAIS

O novo método de geração recursiva para módulos quadrados foi apresentado ao longo deste artigo e consiste nos seguinte passos, para um número $n \in \mathbb{N} > 1$ de módulos:

1. Inicie o processo com um módulo quadrado;
2. Verifique as hipóteses do teorema 1 e da proposição 8, se alguma for verdadeira proceda a colagem segundo a mesma, e vá para o item 4, senão proceda o item 3,
3. Verifique as simetrias da configuração;
4. Proceda a anexação de um novo módulo a cada posição permitida na região de colagem;
5. Rode o teste de isomorfismo;
6. Se o número de módulos n foi atingido pare, senão retorne ao item 2.

Tabela 1: Número de configurações não isomorfas com n módulos quadrados.

n	configurações	n	configurações
1	1	7	108
2	1	8	369
3	2	9	1285
4	5	10	4655
5	12	11	17073
6	35		

O Método foi implementado em $C++$, os resultados obtidos para um número de módulos até 11 são mostrados na tabela 1 e conferem com os dados na literatura de poliomínos. A enumeração de configurações distintas de poliomínos é um problema matemático equivalente ao de enumeração de configurações para robôs de módulos quadrados. Para poliomínos quer-se enumerar as distintas disposições de quadrados justapostos, porém no contexto matemático as quantidades são obtidas por contagem indireta, ou seja, não são geradas as configurações apenas sabe-se o número delas, estes resultados podem ser encontrados em (Redelmeier, 1981; Jensen, 2003).

8 CONCLUSÕES

A enumeração de configurações distintas de robôs metamamórficos é um problema de grande interesse na literatura, principalmente pois está intimamente relacionado ao problema de se encontrar uma configuração ótima para determinada tarefa e ao de se planejar o movimento do robô. Neste contexto, o artigo apresenta uma nova técnica de enumeração de configurações distintas para robôs de módulos quadrados, baseado na captura de suas simetrias e em teoria dos grupos. Todos os resultados referentes ao método apresentado, como as técnicas para checagem de simetria, bem como a definição das regiões de colagem, o teorema 1, a proposição 8 e o teste de isomorfismo são contribuições dos autores.

REFERÊNCIAS

- Abrams A. e Ghrist R. State Complexes for Metamorphic Robots. *Int J Robot Res*, 23(7):811–830, 2004.
- Alperin J. e Bell R. *Groups and Representations*. Springer, New York, 1995.
- Bi Z., Gruver W., e Zhang W. Adaptability of reconfigurable robotic systems. Em *P IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, páginas 2317–2322. 2003.
- Burrow M. *Representation theory of finite groups*. Academic Press, New York, 1993.
- Chen I. e Burdick J. Determining task optimal modular robot assembly configurations. Em *P IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, páginas 132–137. 1995.
- Chen I. e Burdick J. Enumerating the Non-Isomorphic Assembly Configurations of Modular Robotic Systems. *Int J Robot Res*, 17(7):702–719, 1998.
- Chiang C. e Chirikjian G. Modular Robot Motion Planning Using Similarity Metrics. *Auton Robot*, 10(1):91–106, 2001.
- Chirikjian G. Kinematics of a metamorphic robotic system. Em *P IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 449–455. 1994.
- Chirikjian G. e Pamecha A. Bounds for self-reconfiguration of metamorphic robots. Em *P*

- IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, páginas 1452–1457. 1996.
- Dumitrescu A., Suzuki I., e Yamashita M. High speed formations of reconfigurable modular robotic systems. Em *P IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, páginas 123–128. 2002.
- Jensen I. Counting polyominoes: A parallel implementation for cluster computing. *Computational Science—ICCS 2003*, páginas 698–698, 2003.
- Martins D. e Simoni R. Enumeration of planar metamorphic robots configurations. Em *REMAR2009. ASME/IFTOMM International Conference on*, páginas 610–618. 2009.
- Pamecha A., Chiang C., Stein D., e Chirikjian G. Design and implementation of metamorphic robots. Em *P ASME Design Engineering Technical Conference and Computers in Engineering Conference*, páginas 1–10. 1996.
- Pamecha A., Ebert-Uphoff I., e Chirikjian G. Useful metrics for modular robot motion planning. *IEEE T Robot Autom*, 13(4):531–545, 1997.
- Redelmeier D. Counting polyominoes: yet another attack. *Discrete Math*, 36(3):191–203, 1981.
- Rotman J. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer, New York, 1995.
- Rus D. e Vona M. Crystalline Robots: Self-Reconfiguration with Compressible Unit Modules. *Auton Robot*, 10(1):107–124, 2001.
- Scott W. *Group Theory*. Prentice-Hall, New Jersey, 1964.
- Walter J., Welch J., e Amato N. Concurrent metamorphosis of hexagonal robot chains into simple connected configurations. *IEEE T Robot Autom*, 18(6):945–956, 2002.
- Walter J., Welch J., e Amato N. Distributed reconfiguration of metamorphic robot chains. *Distrib Comput*, 17(2):171–189, 2004.
- Yim M., Lamping J., Mao E., e Chase J. Rhombic dodecahedron shape for self-assembling robots. *Xerox PARC, SPL TechReport P9710777*, 1997.
- Yim M., Zhang Y., Lamping J., e Mao E. Distributed Control for 3D Metamorphosis. *Auton Robot*, 10(1):41–56, 2001.
- Yoshida E., Murata S., Kurokawa H., Tomita K., e Kokaji S. A distributed reconfiguration method for 3D homogeneous structure. Em *P IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 2, páginas 852–859. 1998.