

## DISEÑO ÓPTIMO DE VIGAS CURVAS CONSTRUIDAS CON MATERIAL COMPUESTO

Florencia Reguera<sup>a,b,c</sup> y Víctor H. Cortínez<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional (FRBB), 11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca, Argentina, <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

<sup>b</sup> *CONICET, Argentina*

<sup>c</sup> *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

**Palabras clave:** Diseño óptimo, Vigas curvas, Materiales compuestos.

**Resumen.** En este trabajo se formula una metodología para el diseño óptimo de vigas curvas de pared delgada construidas con material compuesto. El modelo de diseño propuesto hace uso de una formulación unidimensional que contempla en forma completa la flexibilidad por corte, implementada mediante un modelo tipo viga de elementos finitos. El problema de optimización se plantea de manera tal de contemplar restricciones estructurales y geométricas, con el objetivo de mejorar el comportamiento estructural. Para su resolución se emplea la técnica heurística *simulated annealing*. Se estudia la aplicación de un nuevo enfoque de optimización denominado *simulated annealing caótico* (SAC) que incorpora sistemas caóticos en el método de búsqueda de *simulated annealing* (SA).

## 1 INTRODUCCIÓN

El diseño de estructuras esbeltas construidas con materiales compuestos presenta complejidades de diversa índole generadas en su mayoría por las características propias de estos materiales. Los materiales compuestos brindan grandes ventajas: altas relaciones rigidez/peso y resistencia/peso, mejorada resistencia a la fatiga y a la corrosión, y una gran versatilidad en cuanto a su composición y fabricación. En particular, esta última característica involucra a la mayoría de las variables del problema de diseño. Entre ellas pueden mencionarse las propiedades del material, el tipo y la disposición de las fibras empleadas en la fabricación de la estructura, el número de capas del laminado y el espesor de cada una de ellas. La inclusión de estas variables en el diseño genera un problema complejo que ha motivado el desarrollo de nuevos métodos computacionales de diseño basados en algoritmos de optimización matemática. Tales métodos posibilitan el diseño automático de estructuras a fin de cumplir ciertos objetivos de la mejor manera posible.

En el presente trabajo se diseñan vigas curvas ortótropas mediante una formulación del problema de diseño óptimo que maximiza una función de diseño adimensional, la cual contempla conjuntamente la maximización de la resistencia y la minimización del peso de la estructura. El problema de optimización permite hallar las dimensiones de la sección transversal óptimas y la mejor secuencia de laminación. El espacio de soluciones factibles se encuentra restringido por condiciones de resistencia, pandeo global, pandeo local y condiciones geométricas. El análisis estructural se realiza en base al modelo desarrollado por Piován y Cortínez (2007); Cortínez et al. (2001), el cual considera en forma completa efectos de flexibilidad por corte en vigas compuestas de eje curvo. Este modelo teórico es implementado a partir del método de elementos finitos. Además, se incluyen efectos de distorsión seccional contemplados en forma simplificada, siguiendo la metodología desarrollada en Kollár y Springer (2003). Para ello, se obtienen soluciones analíticas que estiman los valores de las cargas de pandeo local en vigas, a partir de las resultantes de tensión de pandeo de placas ortótropas sometidas a cargas distribuidas linealmente. Este trabajo es una extensión del trabajo presentado por los autores (Reguera y Cortínez, 2011), en el cual se diseñaron vigas rectas de pared delgada compuestas.

El problema de diseño se resuelve aplicando la técnica *simulated annealing* (SA). Se emplea además el método de búsqueda propuesto por Mingjun y Huanwen (2004), el cual genera las variables de diseño a partir de un sistema caótico, obteniendo así un algoritmo al que denominan *simulated annealing caótico* (SAC). En particular, en este trabajo se utiliza el mapa logístico para generar tales variables. Este método de búsqueda es comparado con el método de búsqueda clásico basado en distribuciones normales.

## 2 PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

El problema de optimización se formula de manera tal de hallar las dimensiones de la sección transversal y la secuencia de laminación óptimas para lograr, en forma simultánea, maximizar la resistencia y minimizar el peso de la estructura. Como indicador de resistencia se adopta la carga de pandeo global (flexo-torsional) dado que en las estructuras aquí analizadas éste es el modo de falla dominante en muchas ocasiones. El peso de la estructura es caracterizado por el área de la sección transversal de la misma. Estos objetivos resultan contrapuestos y para obtener un criterio de diseño que signifique un compromiso entre ambos, se adopta una función de diseño adimensional definida de la siguiente manera

$$F(\mathbf{x}) = \frac{M_{cr}}{E_1 A^{3/2}}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de las variables de diseño,  $A$  es el área de la sección transversal de la viga,  $E_1$  es el módulo de elasticidad longitudinal del material y  $M_{cr}$  es el momento crítico dado por

$$M_{cr} = \lambda M_0^{ref}, \quad (2)$$

donde  $M_0^{ref}$  es un momento de referencia adecuadamente seleccionado y  $\lambda$  es el factor que debe aplicarse sobre la misma para alcanzar la inestabilidad elástica global de la estructura y es hallado mediante la expresión (8). De esta manera, la función objetivo (1) aumenta si lo hace el multiplicador de carga o si disminuye el área de la sección transversal. Las variables de diseño, como se mencionó anteriormente, están definidas por el siguiente vector

$$\mathbf{x} = (b, h, n_c, e_c, \theta_k), \quad (3)$$

donde los ángulos  $\theta_k$  indican la orientación de las fibras longitudinales de la capa  $k$ -ésima,  $b$  y  $h$  son las dimensiones de la sección transversal (ver Figura 4),  $n_c$  y  $e_c$  son el número de capas del laminado y el espesor de cada una de ellas, respectivamente. Luego, el espesor total de la pared de la viga ( $e$ ) queda determinado por el producto de estas dos variables.

El problema de optimización se formula de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \max \quad & F(\mathbf{x}), \\ \text{s.a.} \quad & \\ & \mathbf{x}^l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^s, \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{x}^l$  y  $\mathbf{x}^s$  definen los límites inferiores y superiores de las variables de diseño y  $g_i$  son las funciones que restringen a dichas variables desde puntos de vista tanto geométricos como estructurales. En cuanto a las restricciones geométricas se solicita que tanto las dimensiones de la sección como las variables que definen al espesor sean positivas en todo el dominio y, a su vez, verifiquen la condición de vigas de pared delgada ( $g_1$ ). Respecto a las verificaciones estructurales, se requiere que el desplazamiento total máximo no supere un valor pre-establecido ( $g_2$ ) y que la estructura cumpla con las condiciones de: resistencia ( $g_3$ ), pandeo global ( $g_4$ ) y pandeo local ( $g_5$ ). En definitiva, las restricciones son expresadas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} g_1 &= 10 - \min\left(\frac{b}{e}, \frac{h}{e}\right), & g_2 &= \delta - \delta_{m\acute{a}x}, \\ g_3 &= 1 - \lambda, & g_4 &= 1 - R_{min}, & g_5 &= 1 - \lambda_L, \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $\delta$  es el desplazamiento total de la estructura,  $R_{min}$  es el factor de seguridad mínimo de acuerdo al criterio de falla de Tsai-Wu y  $\lambda_L$  es el parámetro de carga que controla la inestabilidad local de la viga. La manera en que se obtienen los mencionados parámetros estructurales se detalla en la sección siguiente.

Cabe destacar que la metodología propuesta en este trabajo es aplicable a vigas de pared delgada rectas o curvas de sección arbitraria construidas con laminados compuestos ortótropos. Además, la estructura puede estar sometida a cualquier estado de carga bajo distintas condiciones de borde.

### 3 ECUACIONES BÁSICAS Y MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

#### 3.1 Modelo de vigas curvas de pared delgada compuestas

El análisis estructural se realiza en base al modelo desarrollado por Cortínez y Piovan, empleando formulaciones numéricas establecidas a partir del método de elementos finitos. El modelo permite el análisis lineal de vigas curvas de pared delgada construidas con materiales compuestos con laminación general. Su implementación permite conocer las características estructurales involucradas en el diseño de la estructura (desplazamientos, tensiones y cargas de pandeo global). Esta teoría ha sido presentada y validada en diferentes oportunidades (Cortínez et al., 2000; Cortínez et al., 2001; Piovan y Cortínez, 2003; Piovan y Cortínez, 2007). A continuación se presenta un breve resumen de dicho modelo.

Se considera una viga genérica de paredes delgadas curvada en el plano. La sección transversal de la viga puede ser abierta o cerrada. Los puntos del elemento estructural son referidos a un sistema cartesiano ortogonal (C:  $x, y, z$ ) donde el eje  $x$  es paralelo al eje longitudinal de la viga, mientras que  $y$  y  $z$  son los ejes principales baricéntricos de la sección transversal, como se muestra en la Figura 1.

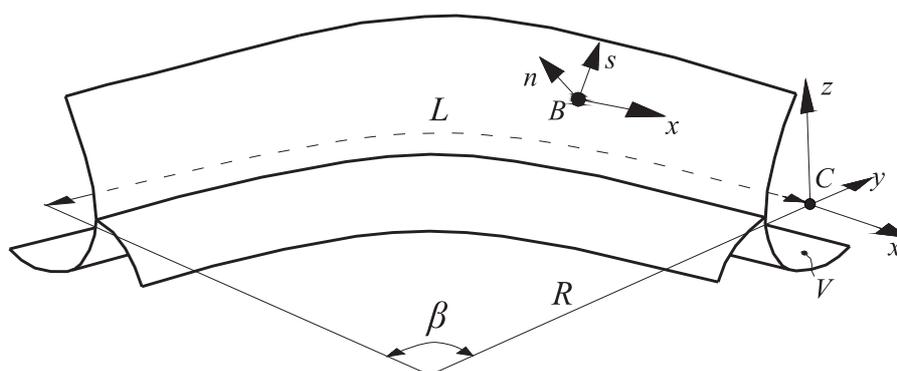


Figura 1: Esquema de viga de pared delgada genérica de eje curvo de sección abierta.

Se asume el campo de desplazamientos expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u_x &= u - y \left( \theta_z - \frac{u}{R} \right) - z \theta_y - \omega \left( \theta_x - \frac{\theta_y}{R} \right), \\ u_y &= v - z \phi_x, \\ u_z &= w + y \phi_x, \end{aligned} \quad (6)$$

Luego, el desplazamiento total de la estructura que define a la función de restricción  $g_2$  está dado por

$$\delta_{(x)} = \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2}. \quad (7)$$

Como se mencionó anteriormente, la implementación numérica del modelo se realiza mediante un elemento curvo isoparamétrico que consta de cinco nodos con siete grados de libertad cada uno (ISOP5N), cuya aptitud para la modelación de vigas curvas anisótropas fue comprobada por Piovan y Cortínez (2007). Primeramente, se deben obtener las tensiones iniciales que deben satisfacer la siguiente condición de equilibrio

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{W}^0 = \mathbf{P}^0, \quad (8)$$

donde  $\mathbf{K}^0$ ,  $\mathbf{W}^0$  y  $\mathbf{P}^0$  son la matriz global de rigidez elástica inicial, el vector de desplazamientos nodales iniciales y el vector global de las fuerzas volumétricas y de superficie iniciales, respectivamente. A partir de allí se puede obtener la matriz de rigidez geométrica global ( $\mathbf{K}_G$ ), para luego hallar las cargas críticas de pandeo global de la estructura resolviendo el siguiente problema de autovalores

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_G) \mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

donde  $\mathbf{W}$  es el vector global de desplazamientos y  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez global. Por lo tanto, resolviendo el problema de autovalores (9) se obtiene el parámetro de carga  $\lambda$  que relaciona la carga crítica con la carga de referencia inicial. De esta manera, la función objetivo ( $F$ ) y la condición de estabilidad global de la estructura ( $g_3$ ) quedan establecidas.

En cuanto a la condición de resistencia, se asume que el estado límite de tensión a partir del cual el laminado sufre daños está representado por la falla de la primera lámina (FPF). La carga para la cual esto ocurre puede predecirse a través de los criterios de falla de laminados simples. En este caso, se utiliza el criterio de falla de Tsai-Wu, el cual establece que la lámina falla cuando se satisface la siguiente condición (Kollár y Springer, 2003)

$$aR^2 + 2bR - 1 = 0. \quad (10)$$

Luego, el factor de seguridad viene dado por

$$R = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2a}, \quad (11)$$

donde,

$$\begin{aligned} a &= F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{66}\tau_{12}^2 + F_{44}\tau_{23}^2 + F_{55}\tau_{31}^2, \\ b &= F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2. \end{aligned} \quad (12)$$

En las ecuaciones anteriores,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \tau_{12}, \dots, \tau_{23}$  son las tensiones en el sistema de coordenadas propio del laminado en el punto de interés y los coeficientes  $F_1, F_2, F_{11}, \dots, F_{66}, F_{12}$ , son parámetros de resistencia que dependen del material y están dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{s_1^+} - \frac{1}{s_1^-}, & F_2 &= \frac{1}{s_2^+} - \frac{1}{s_2^-}, & F_{11} &= \frac{1}{s_1^+ s_1^-}, & F_{22} &= \frac{1}{s_2^+ s_2^-}, \\ F_{44} &= \frac{1}{(s_{23})^2}, & F_{55} &= \frac{1}{(s_{13})^2}, & F_{66} &= \frac{1}{(s_{12})^2}, & F_{12} &= -\frac{1}{2} \sqrt{F_{11} F_{22}}, \end{aligned} \quad (13)$$

siendo  $s_1^+$  y  $s_1^-$  son las resistencias a tracción y a compresión en la dirección de la fibra,  $s_2^+$  y  $s_2^-$  son las resistencias a tracción y compresión en la dirección transversal a la fibra,  $s_{12}$  es la resistencia al corte en el plano y  $s_{13}$  y  $s_{23}$  son las resistencias al corte interlaminares. El factor de seguridad se evalúa en diferentes puntos de la sección transversal, en las zonas superior e inferior de cada una de las capas del laminado y en distintos puntos a lo largo de la longitud de la viga. Luego, la condición de resistencia ( $g_4$ ) se verifica cuando el valor mínimo de  $R$  es superior o igual a 1. Detalles acerca de la implementación computacional para la evaluación del factor de seguridad mínimo se pueden encontrar en el trabajo realizado por los autores (Reguera y Cortínez, 2009).

### 3.2 Modelo de placas para el análisis de pandeo local

La inestabilidad local es una restricción importante que debe considerarse al plantear el problema de diseño cuando se trata de vigas de paredes delgadas. La carga crítica de pandeo local se evalúa en forma simplificada, haciendo referencia a las hipótesis adoptadas por Kollár y Springer (2003). En dicho análisis se modela cada segmento de la sección transversal como una placa de gran longitud, asumiendo que los ejes comunes a dos o más placas permanecen rectos. Luego, la resultante de tensión de pandeo se determina considerando a cada pared de la viga como una placa individual restringida rotacionalmente por el segmento adyacente. Para verificar la condición de pandeo local ( $g_5$ ), estos valores son comparados con las resultantes de tensión en el espesor de la viga en la dirección  $x$ , obtenidas de acuerdo al modelo unidimensional adoptado. En el análisis que se realiza en esta sección, se adopta como referencia un sistema cartesiano ortogonal local ( $x, y$ ) como se indica en la Figura 2. En particular, el eje  $x$  es coincidente con el eje longitudinal de la viga.

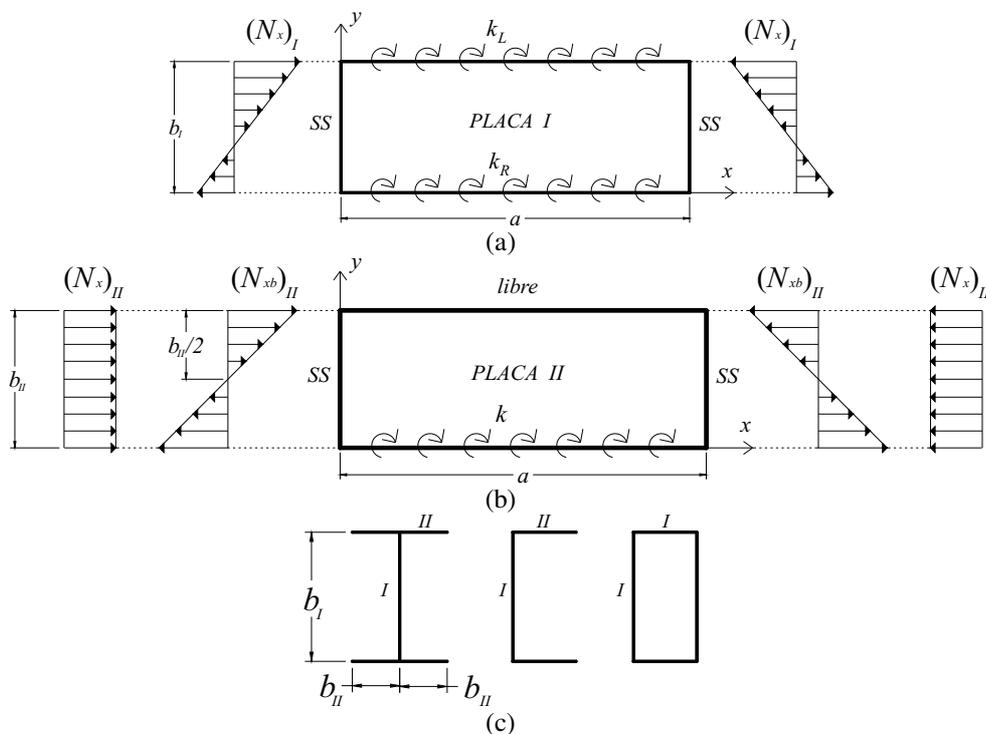


Figura 2: Geometría de placas ortótropas con diferentes condiciones de borde: (a) placa RR; (b) placa RF; (c) identificación de las placas en las secciones transversales de vigas de pared delgada.

La energía de deformación total de una placa ortótropa está compuesta por: la energía de deformación elástica de la placa, la energía de deformación producida por las restricciones elásticas en los bordes rotacionalmente restringidos de la placa y el trabajo realizado por las fuerzas axiales en el plano. Luego, la energía total de la placa puede ser expresada por (Lekhnitskii, 1968)

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} k_R \left( \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} k_L \left( \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy,
 \end{aligned} \tag{14}$$

donde  $D_{ij}$  son las rigideces flexionales del laminado (Kollár y Springer, 2003),  $w$  es una función de  $x$  e  $y$  que define el desplazamiento de la placa en el estado de pandeo,  $k_R$  y  $k_L$  son las rigideces rotacionales elásticas de los bordes restringidos en  $y = 0$  e  $y = b$ , respectivamente, como se indica en la Figura 2. La carga por unidad de longitud ( $N_x$ ) se asume distribuida en los bordes simplemente apoyados de la placa de acuerdo a la siguiente ley lineal

$$N_x = N_{x0} \left( 1 - \alpha \frac{y}{b} \right), \quad (15)$$

donde  $\alpha$  y  $N_{x0}$  quedarán determinados por la resultante de tensión en el plano correspondiente a la pared de la viga analizada.

Introduciendo una función de desplazamiento adecuada ( $w$ ) en la primera variación del funcional de energía (14) y aplicando el principio de energía potencial mínima, se obtiene un problema de autovalores que es resuelto por medio del método de Ritz. Para ello, se proponen expresiones de  $w$  para las dos condiciones de borde analizadas, la cual en términos generales está dada por

$$w(x, y) = \phi(y) \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \quad (16)$$

donde, en el caso de placas RR,

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \frac{y}{b} + \psi_1 \frac{y^2}{b^2} + \psi_2 \frac{y^3}{b^3} + \psi_3 \frac{y^4}{b^4}, \quad \text{si } \alpha \leq 1.5, \\ \phi(y) &= \frac{y}{b} + \psi_1 \frac{y^2}{b^2} + \psi_2 \frac{y^3}{b^3} + \psi_3 \frac{y^4}{b^4} + \psi_4 \frac{y^5}{b^5}, \quad \text{si } \alpha > 1.5. \end{aligned} \quad (17)$$

Esta función de desplazamiento debe satisfacer las siguientes condiciones de borde

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0, \\ w(x, b) &= 0, \\ M_y(x, 0) &= -D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -k_R \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0}, \\ M_y(x, b) &= -D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = k_L \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b}. \end{aligned} \quad (18)$$

En los casos en que  $\alpha > 1.5$  se debe adicionar la siguiente condición de borde

$$\begin{aligned} w(x, 0.7b) &= 0, \quad \text{if } 1.5 < \alpha < 2.0, \\ w(x, 0.3b) &= 0, \quad \text{if } \alpha \geq 2.0. \end{aligned} \quad (19)$$

Asumiendo que los bordes restringidos rotacionalmente en la placa poseen la misma rigidez rotacional  $k$  (es decir,  $k_L = k_R = k$ ), la función de desplazamiento  $\phi$  para una placa RR está dada por

si  $\alpha \leq 1.5$ ,

$$\phi(y) = \frac{y}{b} + \frac{kb}{2D_{22}} \frac{y^2}{b^2} - \frac{12D_{22}^2 + 8D_{22}kb + k^2b^2}{D_{22}(6D_{22} + kb)} \frac{y^3}{b^3} + \frac{12D_{22}^2 + 8D_{22}kb + k^2b^2}{2D_{22}(6D_{22} + kb)} \frac{y^4}{b^4}, \quad (20)$$

si  $1.5 < \alpha < 2.0$ ,

$$\begin{aligned} \phi(y) = & \frac{y}{b} + \frac{kb}{2D_{22}} \frac{y^2}{b^2} - \frac{3(4468D_{22}^2 + 1402D_{22}kb + 84k^2b^2)}{49D_{22}(38D_{22} + 3kb)} \frac{y^3}{b^3} \\ & - \frac{37604D_{22}^2 + 9936D_{22}kb + 567k^2b^2}{98D_{22}(38D_{22} + 3kb)} \frac{y^4}{b^4} \\ & - \frac{5(1452D_{22}^2 + 368D_{22}kb + 21k^2b^2)}{49D_{22}(38D_{22} + 3kb)} \frac{y^5}{b^5}, \end{aligned} \quad (21)$$

si  $\alpha \geq 2.0$ ,

$$\begin{aligned} \phi(y) = & \frac{y}{b} + \frac{kb}{2D_{22}} \frac{y^2}{b^2} - \frac{(10796D_{22}^2 + 2734D_{22}kb + 168k^2b^2)}{9D_{22}(62D_{22} + 7kb)} \frac{y^3}{b^3} \\ & + \frac{34996D_{22}^2 + 8464D_{22}kb + 483k^2b^2}{18D_{22}(62D_{22} + 7kb)} \frac{y^4}{b^4} \\ & - \frac{5(1452D_{22}^2 + 368D_{22}kb + 21k^2b^2)}{9D_{22}(62D_{22} + 7kb)} \frac{y^5}{b^5}. \end{aligned} \quad (22)$$

Para una placa RF, la función de desplazamiento elegida se establece de la misma forma en la que lo hacen [Qiao y Shan \(2005\)](#)

$$\phi(y) = \left(1 - \frac{kb}{3D_{22} + kb}\right) \frac{y}{b} + \frac{kb}{3D_{22} + kb} \left(\frac{3y^2}{2b^2} - \frac{y^3}{2b^3}\right). \quad (23)$$

Reemplazando las funciones de los desplazamientos propuestas (19-21,22) en la primera variación del funcional (13), se obtienen las soluciones al problema de autovalores para placas ortótropas RR y RF ( $N_x^{RR}$ ,  $N_x^{RF}$ ). Luego, minimizando estas soluciones respecto de la relación de aspecto de la placa ( $d(N_x)/dc = 0$ , donde  $c = a/b$ ), se obtiene la menor de dichas cargas, correspondiente a la carga crítica de la placa:  $N_{x,cr}^{RR}$  ó  $N_{x,cr}^{RF}$ , según sea la condición de borde analizada. En el caso de placas RR, dichas cargas están dadas por

si  $\alpha \leq 1.5$ ,

$$N_{x,cr}^{RR01} = \frac{48}{b^2(2-\alpha)} \left( \frac{(D_{12} + 2D_{66})(10D_{22} + kb)^2}{(11.13D_{22} + kb)^2} + \dots \right), \quad (24)$$

$$\left( \frac{\sqrt{D_{11}D_{22}} \sqrt{3.5(2D_{22} + kb)(12D_{22} + kb)}}{(11.13D_{22} + kb)} \right)$$

si  $1.5 < \alpha < 2.0$ ,

$$N_{x,cr}^{RR02} = \frac{132.9}{b^2(3-\alpha)} \left( \frac{(D_{12} + 2D_{66}) + \dots}{1.77\sqrt{D_{11}D_{22}}(10.89D_{22} + kb)^2(13.53D_{22} + kb)^2} \right), \quad (25)$$

si  $\alpha \geq 2.0$ ,

$$N_{x,cr}^{RR03} = \frac{73.17}{b^2(1.51-\alpha)} \left( \frac{(D_{12} + 2D_{66}) + \dots}{1.77\sqrt{D_{11}D_{22}}(13.52D_{22} + kb)^2(10.89D_{22} + kb)^2} \right). \quad (26)$$

En el caso de placas RF las cargas críticas están dadas por

$$N_{x,cr}^{RF} = 3.12 \frac{60D_{22}^2D_{66} + kb(5D_{22} + kb)(8D_{66} - D_{12}) + 2.80\sqrt{D_{11}D_{22}kb}(3.37D_{22} + kb)^{\frac{3}{2}}}{b^2(11.72D_{22}^2(1.33 - \alpha) + 6.77D_{22}kb(1.27 - \alpha) + k^2b^2(1.23 - \alpha))}. \quad (27)$$

En particular, la carga crítica para placas RF sometidas a cargas de compresión uniformemente distribuidas ( $\alpha = 0$ ) queda determinada por

$$N_{x,cr}^{RF} = 2.54 \frac{60D_{22}^2D_{66} + kb(5D_{22} + kb)(8D_{66} - D_{12}) + 2.80\sqrt{D_{11}D_{22}kb}(3.37D_{22} + kb)^{\frac{3}{2}}}{b^2(3.56D_{22} + kb)^2}. \quad (28)$$

Por otro lado, en placas RF sometidas a cargas de flexión pura ( $\alpha = 2$ ), la carga crítica puede ser expresada de la siguiente forma

$$N_{x,cr}^{RF} = 4.05 \frac{60D_{22}^2D_{66} + kb(5D_{22} + kb)(8D_{66} - D_{12}) + 2.80\sqrt{D_{11}D_{22}kb}(3.37D_{22} + kb)^{\frac{3}{2}}}{-b^2(3.192D_{22} + kb)^2}. \quad (29)$$

La carga crítica en el caso de placas con los cuatro bordes simplemente apoyados (SS) surge de suponer  $k_L = k_R = 0$  en las expresiones (24-26),

$$si \quad \alpha \leq 1.5, \quad N_{x,cr}^{SS01} = \frac{38.9}{b^2(2-\alpha)} \left( (D_{12} + 2D_{66}) + \sqrt{D_{11}D_{22}} \right), \quad (30)$$

$$si \quad 1.5 < \alpha < 2.0, \quad N_{x,cr}^{SS02} = \frac{132.9}{b^2(3-\alpha)} \left( (D_{12} + 2D_{66}) + 1.26\sqrt{D_{11}D_{22}} \right), \quad (31)$$

$$si \quad \alpha \geq 2.0, \quad N_{x,cr}^{SS03} = \frac{73.17}{b^2(1.51-\alpha)} \left( (D_{12} + 2D_{66}) + 1.09\sqrt{D_{11}D_{22}} \right). \quad (32)$$

Finalmente, en el caso de placas simplemente apoyadas-libres (SF), las cargas críticas para los casos de carga uniforme y flexión pura, surgen de las expresiones (28) y (29), considerando  $k = 0$ ,

$$\text{si } \alpha = 0, \quad N_{x,cr}^{SF} = \frac{12D_{66}}{b^2}, \quad (33)$$

$$\text{si } \alpha = 2, \quad N_{xb,cr}^{SF} = -\frac{23.8D_{66}}{b^2}. \quad (34)$$

El análisis del pandeo local de vigas de pared delgada abiertas o cerradas se realiza a partir de las expresiones expuestas anteriormente y la manera de emplearlas se detalla en los siguientes ítems.

1. *Calcular las resultantes de tensión axial de todas las paredes de la sección:  $(N_x)_I$ ,  $(N_{xb})_{II}$ ,  $(N_x)_{II}$ .* Éstas son halladas aplicando el modelo unidimensional referenciado. Los subíndices *I* y *II* hacen referencia al tipo de placa que se está considerando de acuerdo a la [Figura 2](#).
2. *Calcular el parámetro de carga crítica para una placa tipo I, asumiendo sus bordes descargados como simplemente apoyados:  $\lambda_I^{SS}$ .* La resultante de tensión crítica  $N_{x,cr}^{SS}$  se puede obtener de las expresiones (30-32), según corresponda de acuerdo al valor de  $\alpha$ . Luego, el parámetro de carga crítica está dado por

$$\lambda_I^{SS} = \frac{N_{x,cr}^{SSi}}{(N_x)_I}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (35)$$

3. *Calcular el parámetro de carga crítica para una placa tipo II, asumiendo uno de sus bordes como simplemente apoyado y el otro borde libre:  $\lambda_{II}^{SF}$ .* Para ello, primero se deben hallar las resultantes de tensión críticas  $N_{x,cr}^{SF}$  y  $N_{xb,cr}^{SF}$ , dadas por las expresiones (33) y (34), respectivamente. Luego, el parámetro de carga crítico se obtiene a partir de la curva de interacción propuesta por [Bleich \(1952\)](#) y está dado por la solución de la siguiente ecuación

$$\left(\lambda_{II}^{SF}\right)^2 \left(\frac{(N_{xb})_{II}}{N_{xb,cr}^{SF}}\right)^2 + \lambda_{II}^{SF} \left(\frac{(N_x)_{II}}{N_{x,cr}^{SF}}\right) = 1. \quad (36)$$

4. *Chequear qué tipo de placa pandea primero.* Esto es,
  - a. Si  $\lambda_I^{SS} < \lambda_{II}^{SF}$ , pandea primero la placa tipo I y deben seguirse los ítems 5-6.
  - b. Si  $\lambda_{II}^{SF} < \lambda_I^{SS}$ , pandea primero la placa tipo II y deben seguirse los ítems 7-8.
5. *Hallar la rigidez rotacional correspondiente a la placa tipo I.* Para ello, se debe hacer una distinción entre secciones abiertas y cerradas en lo que respecta a la rigidez rotacional dada por las placas adyacentes.

En el caso de vigas de sección transversal cerrada, se contemplan los efectos de restricción que genera la placa tipo I adyacente a partir de su rigidez flexional y el efecto desestabilizante de la carga de compresión de la siguiente manera

$$k_I = \frac{2D_{22}}{b_I} \left(1 - \frac{\lambda_I^{SS}}{\lambda_{II}^{SF}}\right), \quad (37)$$

donde  $b_I$  es el ancho de la placa adyacente. En el caso de vigas de sección transversal abierta, se contempla nuevamente el efecto de la carga de compresión y se tienen en cuenta los efectos de restricción que genera la placa tipo II adyacente a partir de la rigidez torsional que esta aporta ([Tarján et al., 2009](#)). Así, la rigidez de la placa

adyacente se expresa de la siguiente manera

$$k_I = 4D_{66}b_{II} \left( 1 - \frac{\lambda_I^{SS}}{\lambda_{II}^{SF}} \right), \quad (38)$$

donde  $b_{II}$  es el ancho de la placa adyacente.

6. Calcular el parámetro de carga crítica de una placa tipo I asumiendo restringidos rotacionalmente sus bordes descargados:  $\lambda_I^{RR}$ . Para ello, se debe determinar primero la resultante de tensión crítica  $N_{x,cr}^{RR}$  según las expresiones (24-26), para luego determinar el parámetro de carga crítico dado por la siguiente expresión

$$\lambda_I^{RR} = \frac{N_{x,cr}^{RR0i}}{(N_x)_I}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (39)$$

7. Hallar la rigidez rotacional correspondiente a la placa tipo II. Este caso sólo se presenta en vigas de sección abierta. De manera análoga al ítem 5, se contemplan los efectos de restricción que genera la placa tipo I adyacente y el efecto desestabilizante de la carga de compresión como sigue

$$k_{II} = \frac{2D_{22}}{b_I} \left( 1 - \frac{\lambda_{II}^{SF}}{\lambda_I^{SS}} \right), \quad (40)$$

donde  $b_I$  es el ancho de la placa adyacente. En el caso de vigas de perfil I y similares, el factor 2 debe ser omitido debido a que la placa tipo I (alma) restringe rotacionalmente a dos placas tipo II (alas).

8. Calcular el parámetro de carga crítica de una placa tipo II asumiendo restringido rotacionalmente uno de sus bordes y el otro libre:  $\lambda_{II}^{RF}$ . Para ello, se deben determinar primero las resultantes de tensión críticas  $N_{x,cr}^{RF}$  y  $N_{xb,cr}^{RF}$  mediante las ecuaciones (28) y (29). Luego, el parámetro de carga crítico se obtiene de manera análoga al ítem 3, como la raíz de la siguiente ecuación de interacción

$$\left( \lambda_{II}^{RF} \right)^2 \left( \frac{(N_{xb})_{II}}{N_{xb,cr}^{RF}} \right)^2 + \lambda_{II}^{RF} \left( \frac{(N_x)_{II}}{N_{x,cr}^{RF}} \right) = 1. \quad (41)$$

### 3.3 Técnicas de optimización

Como se mencionó anteriormente, el problema de diseño se resuelve mediante la aplicación del método *simulated annealing*. Este método fue introducido originalmente por Kirkpatrick et al. (1983) y está basado en la generación de soluciones factibles en forma aleatoria, siendo su principal característica evitar la convergencia local en problemas de gran escala. En este trabajo se compara la convergencia de dos algoritmos basados en dicho método. La diferencia fundamental entre ambos algoritmos es la manera en la que se generan tales soluciones factibles, es decir, se emplean distintos métodos de búsqueda que originan la distinción entre *simulated annealing* (SA) y *simulated annealing caótico* (SAC).

En la Figura 3 se muestra un esquema general de la técnica *simulated annealing*. El algoritmo de optimización comienza definiendo un punto inicial aleatorio ( $\mathbf{x}_0$ ) dentro de la región factible del problema, el cual es actualizado en base a un procedimiento iterativo hasta satisfacer un criterio de convergencia. En cada iteración, se genera un nuevo punto aleatorio

en las proximidades de la configuración actual y se evalúa la función objetivo en ese punto, determinando su variación,  $\Delta C = F(\mathbf{x}_{i+1}) - F(\mathbf{x}^*)$ . Si el nuevo punto produce un valor menor de la función objetivo comparado con el mínimo actual ( $\Delta C < 0$ ), el punto es aceptado. Si, por el contrario, el nuevo valor de la función objetivo es mayor ( $\Delta C \geq 0$ ), la aceptabilidad del punto se define de acuerdo al siguiente criterio de probabilidad

$$p = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta C < 0, \\ e^{-\frac{\Delta C}{kT}} & \text{si } \Delta C \geq 0, \end{cases} \quad (42)$$

donde  $k$  es un factor de escala conocido como la constante de Boltzmann y  $T$  es el parámetro de control denominado temperatura. Dicha temperatura permanece constante para un cierto número de iteraciones y va disminuyendo a medida que el algoritmo avanza, de manera tal que disminuya la probabilidad de aceptar soluciones factibles que no produzcan una mejora en la función objetivo. En este trabajo, el criterio de parada se define a través de un valor final de la temperatura ( $T_{min}$ ).

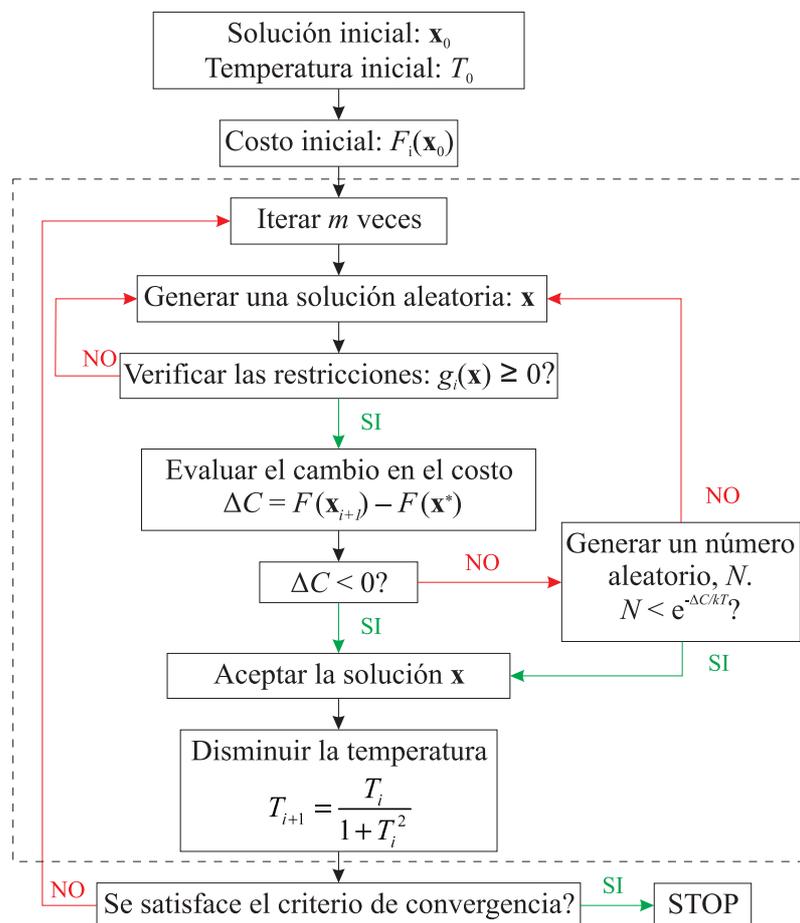


Figura 3: Esquema general del algoritmo *simulated annealing*.

Para implementar este algoritmo exitosamente es necesario tomar una serie de decisiones en lo que se refiere al control de la temperatura. La temperatura inicial debe ser lo suficientemente alta para que la solución final sea independiente de la solución inicial y para que al iniciar el algoritmo todas las soluciones puedan ser aceptadas con una probabilidad similar. Una expresión adecuada de la temperatura inicial ( $T_0$ ) fue propuesta por Dréo y

Pérowski (2006)

$$T_0 = r \max(\Delta C_{ij}), \quad (43)$$

donde  $\Delta C_{ij}$  es la diferencia entre los valores extremos de la función objetivo y  $r$  es una constante mayor que 1.

Por otro lado, la función que determina y controla el descenso de la temperatura tiene un papel importante en la eficiencia del método, puesto que define el criterio de convergencia del algoritmo. En este trabajo se aplica el esquema de enfriamiento desarrollado por Vidal (2003), siendo su principal objetivo establecer parámetros que permitan obtener un equilibrio entre el tiempo final de ejecución del algoritmo y el número de búsquedas que realice el mismo. De esta manera, se plantea disminuir la temperatura según el siguiente criterio

$$T_{i+1} = \frac{T_i}{1+T_i^2}. \quad (44)$$

Su implementación logra disminuir los tiempos de cálculo, ya que la temperatura disminuye a mayor velocidad que en el esquema geométrico, aún cuando las temperaturas iniciales son altas.

Como se mencionó, la diferencia entre los dos algoritmos implementados aquí es la forma de generar las soluciones en cada iteración. El método de búsqueda de SA se define de la siguiente manera

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + N \left( \frac{\mathbf{x}^S - \mathbf{x}^I}{m} \right), \quad (45)$$

donde  $N$  es un número aleatorio,  $\mathbf{x}^S$  y  $\mathbf{x}^I$  son los extremos superior e inferior del dominio factible de cada una de las variables del problema y  $m$  es un cociente de radio de búsqueda apropiado.

El algoritmo SAC propuesto por Mingjun y Huanwen (2004) consiste en introducir sistemas caóticos en la búsqueda del algoritmo y las variables de diseño se generan a partir del siguiente esquema

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}^I + z_{i+1} (\mathbf{x}^S - \mathbf{x}^I), \quad (46)$$

La variable caótica  $z_{i+1}$  se define a partir de algún sistema caótico conocido. En este trabajo empleamos a tal efecto el mapa logístico

$$z_{i+1} = \mu z_i (1 - z_i), \quad z_{i+1} \in [0,1], \quad (47)$$

donde  $\mu$  es el parámetro de bifurcación.

#### 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

A fin de comparar el comportamiento de los métodos de optimización propuestos en la sección anterior, a continuación se resuelven dos problemas de diseño definidos según las condiciones preestablecidas en las Figuras 4 y 5. Se asume que la estructura está construida con un material transversalmente isótropo compuesto por fibra de vidrio y viniléster (Kollár y Springer, 2003), con las siguientes propiedades:  $E_1 = 24.4$  GPa,  $E_2 = 6.87$  GPa,  $G_{12} = 2.89$  GPa,  $\nu_{12} = 0.32$ ,  $s_1^+ = 548$  MPa,  $s_1^- = 803$  MPa,  $s_2^+ = 43$  MPa,  $s_2^- = 187$  MPa,  $s_{12} = 64$  MPa. Se considera una viga curva de pared delgada tipo I empotrada en sus dos extremos, de 4 metros de longitud y un radio de curvatura de 5 metros, lo cual genera un ángulo de apertura

del arco ( $L/R$ ) de  $45.8^\circ$ . La viga está sometida a una carga de 20 kN/m distribuida en su longitud en las direcciones  $z$  ó  $y$ , dependiendo del diseño analizado (Dqz, Dqy). Se admite un desplazamiento máximo ( $\delta_{max} = L/400$ ) de 0.015 m y el espesor de cada una de las capas del laminado se considera constante. Además, se propone el siguiente momento de referencia

$$M_0^{ref} = \frac{q_0 L^2}{12}. \tag{48}$$

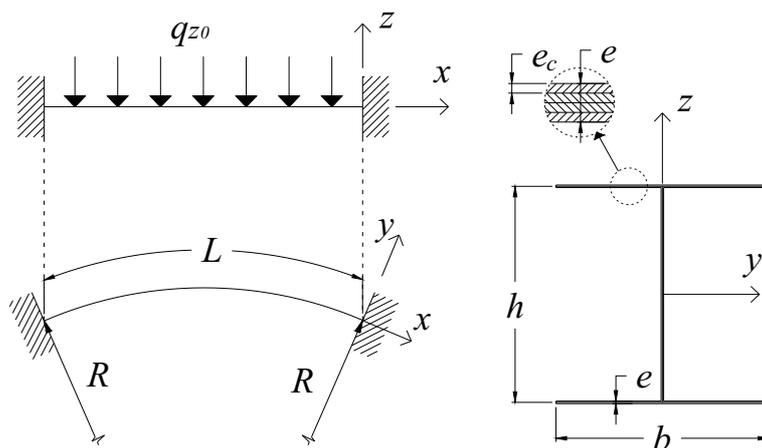


Figura 4: Condiciones de borde y estados de carga correspondientes al diseño Dqz.

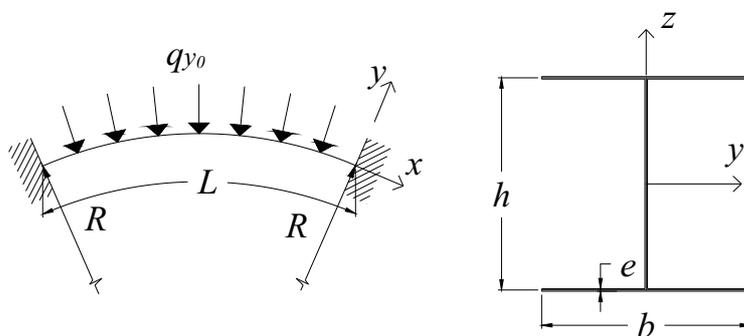


Figura 5: Condiciones de borde y estados de carga correspondientes al diseño Dqy.

El problema de diseño se resuelve aplicando las dos alternativas de generación propuestas para el método *simulated annealing*. Se plantean distintos intervalos de variación correspondientes a cada una de las variables de diseño con el fin de evaluar la performance del algoritmo bajo ambos esquemas de generación.

Dominios	$b$ [m]	$h$ [m]	$e_c$ [mm]	$n_c$	$\theta_k$ [°]
D1	0.2:0.1:0.6	0.2:0.1:0.6	1:1:5	2:2:60	0 - 90
D2	0.1:0.05:0.6	0.1:0.05:0.6	0.5:0.5:5	2:2:60	0 - 90
D3	0.1:0.01:0.6	0.1:0.01:0.6	0.5:0.5:5	2:2:60	0 - 90

Tabla 1: Dominios de factibilidad de las variables de diseño.

La **Tabla 1** muestra en detalle los dominios factibles de cada una de las variables de diseño que fueron empleados y se da una denominación a cada uno de ellos (D1, D2, D3). La variable  $\theta_k$  puede adoptar sólo dos valores ( $0^\circ$  y  $90^\circ$ ), sin embargo, la secuencia de laminación debe formar laminaciones ortótropas y queda determinada según las siguientes posibilidades:  $[0_{nc}]$ ,  $[90_{nc}]$ ,  $[0/90]_{nc/2}$ ,  $[90/0]_{nc/2}$ .

La **Tabla 2** muestra los valores de los parámetros involucrados en la programación de los algoritmos, detallando los valores adoptados para las constantes empleadas en el método de búsqueda de SAC en las distintas pruebas numéricas realizadas.

Diseño	$r$	$T_{min}$	$k$	$\mu$
PO1	10	$10^{-10}$	1	4
PO2	10	$10^{-8}$	1	4
PO3	100	$10^{-10}$	1	4
PO4	100	$10^{-15}$	1	4

Tabla 2: Parámetros empleados en los algoritmos.

En la **Tabla 3** se presentan los resultados obtenidos al resolver el problema de diseño Dqz bajo distintos dominios de factibilidad (D1 y D2) e implementando ambos métodos de búsqueda (SA y SAC).

Diseño	$b^*$ [m]	$h^*$ [m]	$e_c^*$ [m]	$n_c^*$	Laminado	$F(\mathbf{x}^*)$	Iteraciones
D1/PO1/SAC	0.40	0.60	0.005	2	$[0_2]$	11.180	700
D1/PO1/SA	0.40	0.60	0.005	2	$[0_2]$	11.180	700
D2/PO1/SAC	0.45	0.60	0.0045	2	$[0_2]$	10.551	700
D2/PO1/SA	0.40	0.60	0.0005	18	$[0_{18}]$	10.607	700

Tabla 3: Soluciones óptimas del diseño Dqz.

En las **Figuras 6** y **7** se grafican los valores que adopta la función objetivo a medida que avanza el algoritmo para los casos detallados en la **Tabla 3**. En tales resultados se observa que cuando la variación de los intervalos es pequeña (D1), ambos algoritmos obtienen la solución óptima global del problema, siendo el método SA quien ofrece un menor costo computacional. Sin embargo, al disminuir el paso de tales intervalos (D2), es decir, al aumentar el dominio de búsqueda, el método SA no encuentra el mínimo global empleando los mismos parámetros (PO1), mientras que el método SAC sí lo hace con el mismo costo computacional que en el caso D1/PO1/SAC. No obstante, si bien las soluciones obtenidas con el método SA no son las soluciones óptimas globales, no existe una gran diferencia entre ellas desde el punto de vista estructural. Por ejemplo, en el caso D2/PO1/SA el espesor total de la sección transversal es el óptimo global, aunque el número de capas del laminado y el espesor de cada una de ellas no lo sea. Se observa que en este caso el algoritmo SA converge a un mínimo local cercano al global.

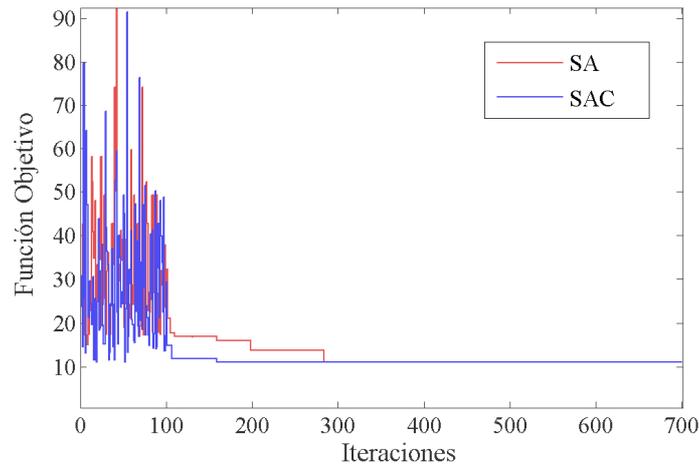


Figura 6: Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño DQz, correspondiente a D1/PO1.

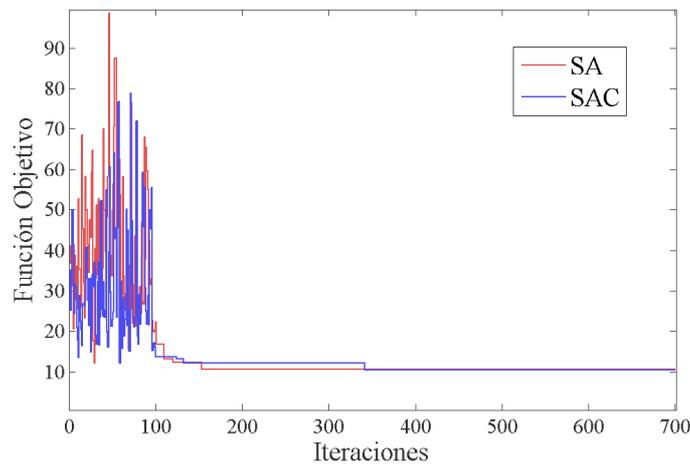


Figura 7: Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño DQz, correspondiente a D2/PO1.

Los resultados obtenidos para el diseño Dqy se muestran en la [Tabla 4](#), donde se especifican las dimensiones de la sección transversal y la secuencia de laminación óptimas. En las [Figuras 8, 9 y 10](#) se observa que el comportamiento de ambos algoritmos es similar al expuesto con anterioridad. En ellas se grafican los valores de la función objetivo que fueron aceptados en los casos detallados en la [Tabla 4](#). Cabe destacar que, en este caso, aún empleando el menor intervalo de búsqueda (D1), el algoritmo SA no alcanza el mínimo global utilizando los mismos parámetros que al implementar el algoritmo SAC. A diferencia del diseño analizado anteriormente, aquí se consideró un espacio de búsqueda mayor (D3), aumentando la precisión en la que se determinan las dimensiones de la sección. Para tales diseños se obtuvieron grandes diferencias entre los mínimos alcanzados por cada de los algoritmos. Es decir, a medida que aumentan los dominios de búsqueda de las variables de diseño, el método SAC presenta un mejor comportamiento que el método clásico SA.

Los cálculos que se realizaron para el diseño Dqz tuvieron un costo computacional de alrededor de 30 minutos (700 iteraciones), mientras que para el caso de diseño Dqy el tiempo total de cálculo tuvo un máximo de una hora para el dominio D3. Cabe destacar que la programación del algoritmo se realizó en un entorno MATLAB<sup>®</sup>, empleando un procesador

AMD Athlon de 3.01 GHz, con 2.96 GB de memoria RAM.

Diseño	$b^*$ [m]	$h^*$ [m]	$e_c^*$ [m]	$n_c^*$	Laminado	$F(\mathbf{x}^*)$	Iteraciones
D1/PO2/SAC	0.50	0.60	0.004	2	[0 <sub>2</sub> ]	11.819	400
D1/PO2/SA	0.50	0.50	0.004	2	[0 <sub>2</sub> ]	13.363	400
D1/PO1/SA	0.60	0.60	0.001	8	[0 <sub>8</sub> ]	11.868	700
D2/PO3/SAC	0.55	0.60	0.004	2	[0 <sub>2</sub> ]	11.800	360
D2/PO3/SA	0.45	0.50	0.0025	4	[0 <sub>4</sub> ]	14.952	360
D3/PO4/SAC	0.53	0.60	0.004	2	[0 <sub>2</sub> ]	11.795	1500
D3/PO4/SA	0.25	0.46	0.001	10	[0 <sub>10</sub> ]	28.703	1500

Tabla 4: Soluciones óptimas del diseño Dqy.

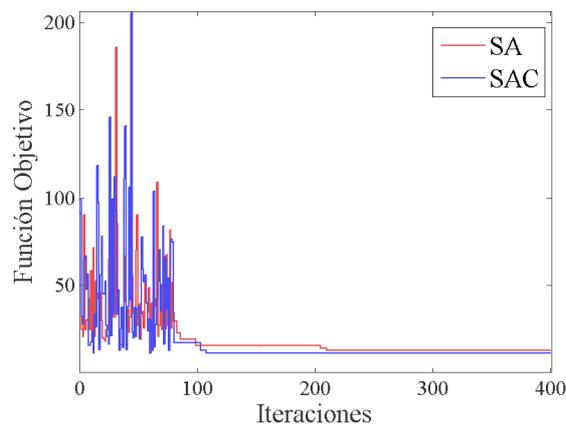


Figura 8: Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño DQy, correspondiente a D1/PO2.

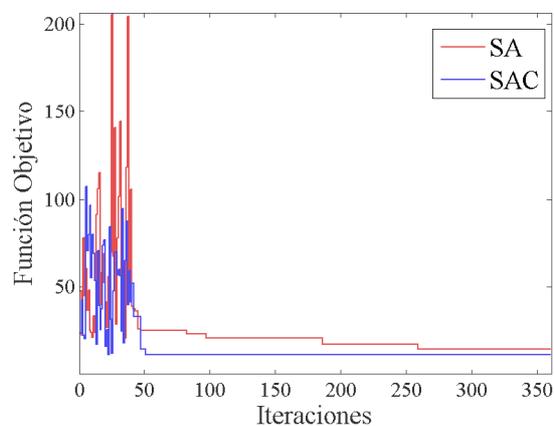


Figura 9: Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño DQy, correspondiente a D2/PO3.

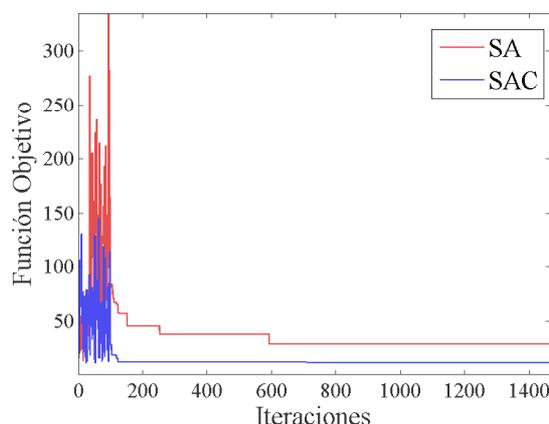


Figura 10: Comportamiento de los algoritmos SA y SAC en el diseño DQy, correspondiente a D3/PO4.

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se formuló y se resolvió un problema de optimización destinado al diseño de vigas curvas de pared delgada construidas con materiales ortótropos, maximizando la resistencia de la estructura en relación al peso de la misma y contemplando restricciones estructurales y geométricas que condicionan el problema. El diseño propuesto fue resuelto a través de la aplicación de la técnica heurística *simulated annealing*, empleando distintos métodos de búsqueda. Se obtuvieron las dimensiones de la sección transversal de la viga y el laminado óptimo para el diseño particular de una viga tipo I sometida a un estado de carga flexional.

En cuanto a la resolución matemática del problema se obtuvieron resultados acordes a los esperados. Se comprobó que, en este caso particular de diseño, cuando aumenta el dominio de búsqueda de las variables de diseño la incorporación de un método de búsqueda caótico en el algoritmo *simulated annealing* proporciona mejores resultados que la aplicación del método de búsqueda clásico.

## 6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaria de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y por el CONICET. El presente artículo forma parte del estudio de tesis doctoral realizado por Florencia Reguera, bajo la dirección de Víctor H. Cortínez y Marcelo T. Piovan, en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

## REFERENCIAS

- Bleich F., *Buckling of Metal Structures*. McGraw-Hill, 1952.
- Cortínez V. H., Piovan M. T. y Machado S. P., DQM vibration analysis of composite thin-walled curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, 246(3):551-555, 2001.
- Cortínez V. H., Piovan M. T. y Rossi R. E., Mecánica de vigas curvas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos. *Mecánica Computacional*, 19:269-276, 2000.
- Dréo J. y Pétrowski A., *Metaheuristics for hard optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- Kirkpatrick S., Gelatt C. D. y Vecchi M. P., Optimization by Simulated Annealing. *Science*, (20)4598:671-680, 1983.

- Kollár L. P. y Springer G. S., *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press, 2003.
- Lekhnitskii S. G., *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publisher, 1968.
- Mingjun J. y Huanwen T., Application of chaos in simulated annealing. *Chaos, Solutions and Fractals*, 21:933-941, 2004.
- Piovan M. T. y Cortínez V. H., Mechanics of shear deformable thin-walled beams made of composite materials. *Thin-Walled Structures*, 45:37-62, 2007.
- Piovan M. T. y Cortínez V. H., Mecánica de vigas curvas anisótropas con sección de paredes delgadas. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 19(3):241-362, 2003.
- Piovan M. T. y Cortínez V. H., Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability. *Thin-Walled Structures*, 45(9):759-789, 2007.
- Qiao P. y Shan L., Explicit local buckling analysis and design of fiber-reinforced plastic composite structural shapes. *Composite Structures*, 70:468-483, 2005.
- Reguera F., Cortínez V. H., Diseño óptimo de vigas compuestas laminadas sujetas a cargas inciertas. *Mecánica Computacional*, 30:2133-2144, 2011.
- Reguera F., Cortínez V. H. y Piovan M. T., Diseño de vigas compuestas mediante elementos finitos. *Mecánica Computacional*, 28:767-788, 2009.
- Tarján G., Sapkás A. y Kollár L. P., Local Buckling of composite beams. *Seventeenth International Conference on Composite Materials (ICCM17)*, 2009.
- Vidal M.C., *Un procedimiento heurístico para un problema de asignación cuadrática*. Tesis Mg. Matemática, Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, 2003.