Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXI, págs. 3563-3573 (artículo completo)
Alberto Cardona, Paul H. Kohan, Ricardo D. Quinteros, Mario A. Storti (Eds.)
Salta, Argentina, 13-16 Noviembre 2012

ÁNALISIS NUMÉRICO DE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO ELÍPTICO FRONTERA DE TIPO NEUMANN

Domingo A. Tarzia

Departamento de Matemática - CONICET, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, DTarzia@austral.edu.ar

Palabras Clave: Control óptimo frontera, Problema elíptico, Condiciones de contorno mixtas, Discretización, Elementos finitos, Convergencia, Estimaciones de error.

Resumen. En C.M. Gariboldi – D.A. Tarzia, Advances in Differential Equations and Control Processes, 1 (2008), 113-132 se considera un problema de control óptimo frontera para un sistema que puede representar el caso estacionario del problema de Stefan: hallar el mínimo de una función costo cuadrática donde el estado del sistema está definido por la única solución de un ecuación variacional que corresponde a un problema elíptico con condiciones de contorno mixtas. La variable de control es el flujo de calor sobre una porción de frontera de un dominio multidimensional.

El objetivo del presente trabajo es el de realizar el análisis numérico del problema de control óptimo frontera y su correspondiente convergencia usando el método de los elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1 constituido por elementos finitos de clase Co siendo *h* el parámetro que tiende a cero. Se discretizan las ecuaciones variacionales elípticas que definen el estado del sistema y de su estado adjunto y además la función de costo. Se demuestra que existen únicos control, sistema y estado adjunto óptimos discretos que convergen a los correspondientes del problema de control óptimo frontera continuo cuando *h* tiende a cero.

1 INTRODUCCIÓN

Sea un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con una frontera $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ regular compuesta por dos porciones de frontera Γ_1 y Γ_2 con $med(\Gamma_1) > 0$ y $med(\Gamma_2) > 0$. Se considera el siguiente problema elíptico con condiciones de frontera mixtas dado por:

$$-\Delta u = g \quad \text{en } \Omega \;; \quad u = b \quad \text{sobre } \Gamma_1 \;\; ; \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{sobre } \Gamma_2 \tag{1}$$

donde g es la energía interna en Ω, b es la temperatura sobre Γ_1 y q es el flujo de calor sobre Γ_2. En Gariboldi y Tarzia (2008) se considera el siguiente problema continuo de control óptimo frontera de tipo Neumann para el sistema (1) que puede representar el caso estacionario del problema de Stefan (Tabacman and Tarzia, 1989; Tarzia, 1988): hallar el control óptimo $q_{op} \in Q = L^2(\Gamma_2)$ de manera que:

$$J\left(q_{op}\right) = \min_{g \in Q} J\left(q\right) \tag{2}$$

donde el funcional de costo $J : Q \to \mathbb{R}_0^+$ viene dado por la siguiente expresión (Bergounioux, 1997; Lions, 1968; Tröltzsch, 2010)

$$J(q) = \frac{1}{2}\left\|u_q - z_d\right\|_H^2 + \frac{M}{2}\left\|q\right\|_Q^2 \tag{3}$$

con $M > 0$ y $z_d \in H$ dados, $u = u_q \in K$ es el estado del sistema definido por el problema elíptico (1) cuya formulación variacional está dada por la siguiente ecuación variacional (Kinderlehrer and Stampacchia, 1980; Tarzia, 1981):

$$\begin{cases} a\left(u_q, v\right) = \left(g, v\right)_H - (q, v)_Q, & \forall v \in V_0 \\ u_q \in K \end{cases} \tag{4}$$

y cuyo correspondiente estado adjunto $p_q \in V_0$ está definido por la ecuación variacional:

$$\begin{cases} a\left(p_q, v\right) = \left(u_q - z_d, v\right)_H, & \forall v \in V_0 \\ p_q \in V_o \end{cases} \tag{5}$$

donde:

$$V = H^1(\Omega), V_0 = \left\{v \in V, \quad v/\Gamma_1 = 0\right\}, K = \left\{v \in V, \quad v/\Gamma_1 = b\right\} = b + V_0, \tag{6}$$

$$H = L^2(\Omega), \quad Q = L^2(\Gamma_2), \quad a\left(u, v\right) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx, \quad (u, v) = \int_\Omega uv\, dx, \quad (u, v)_Q = \int_{\Gamma_2} uv\, ds\,. \tag{7}$$

El objetivo del presente trabajo es el de realizar el análisis numérico del problema de control óptimo (2) y su correspondiente convergencia usando el método de los elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1 constituido por elementos finitos de clase

C^0 siendo h el parámetro que tiende a cero. Se discretizan las ecuaciones variacionales elípticas continuas que definen el estado del sistema (4) y el estado adjunto (5), y además el funcional de costo (3). Se demuestra que existen únicos control $q_{h_{op}}$, estado del sistema $u_{hq_{h_{op}}}$ y estado adjunto $p_{hq_{h_{op}}}$ óptimos discretos y se obtienen las correspondientes convergencias cuando $h \to 0$ y se dan los órdenes de convergencia, en función de h, $\forall z_d \in H$ y para adecuados valores de M (Casas y Mateos, 2002; Casas y Raymond, 2006)

En general, la solución de problemas elípticos con condiciones mixtas se encuentra en $H^r(\Omega)$ con $1 < r \le 3/2 - \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ pero existen numerosos ejemplos para los cuales las soluciones están en $H^r(\Omega)$ con $2 \le r$ que es lo que se supone en el presente trabajo (Azzam y Kreyszig, 1982 ; Lanzani, Capogna y Brown, 2008; Shamir, 1968).

2 DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

Se considera la siguiente discretización (Brenner and Scott, 1994; Ciarlet, 1978)

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^n : \text{dominio poligonal acotado ; } b = \text{Const.}>0 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ \tau_h : \text{triangulación regular de tipo no negativa constituida por elementos finitos,} \\ \qquad \text{afines equivalentes de clase } \mathrm{C}^0, \\ h > 0 : \text{parámetro de la aproximación de elementos finitos que tiende a cero,} \\ h = \text{lado mayor de todos los triángulos } T \in \tau_h. \end{cases}$$

Se aproximan V, V_0 y K por:

$$\begin{cases} V_h = \left\{ v_h \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) / \ v_h/T \in P_1(T),\ \forall T \in \tau_h \right\} \\ V_{0h} = \left\{ v_h \in V_h / v_h/\Gamma_1 = 0 \right\}; \quad K_h = b + V_{0h} \end{cases} \tag{8}$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1. Se considera $\pi_h : V \to V_h$ el operador de interpolación lineal que posee las siguientes propiedades: $\exists c_0 > 0$ de manera que (Brenner and Scott, 1994):

$$\begin{cases} a) \left\| v - \pi_h(v) \right\|_H \le c_0 h^r \left\| v \right\|_r, \quad \forall v \in H^r(\Omega), \quad 1 < r \le 2 \\ b) \left\| v - \pi_h(v) \right\|_V \le c_0 h^{r-1} \left\| v \right\|_r, \quad \forall v \in H^r(\Omega), \quad 1 < r \le 2 \end{cases}. \tag{9}$$

El funcional de costo discreto $J_h : Q \to \mathbb{R}_0^+$ se define por la expresión siguiente:

$$J_h(q) = \frac{1}{2} \left\| u_{hq} - z_d \right\|_H^2 + \frac{M}{2} \left\| q \right\|_Q^2 \tag{10}$$

donde u_{hq} es el estado del sistema discreto definido como la solución de la ecuación variacional discreta siguiente (Kinderlehrer y Stampacchia, 1980; Tarzia, 1996; Tarzia, 1999):

$$\begin{cases} a\left(u_{hq}, v_h\right) = \left(g, v_h\right)_H - (q, v_h)_Q, & \forall v_h \in V_{0h} \\ u_{hq} \in K_h \end{cases} \tag{11}$$

y su correspondiente estado adjunto discreto p_{hq} se define como la solución de la siguiente ecuación variacional discreta:

$$\begin{cases} a\left(p_{hq}, v_h\right) = \left(u_{hq} - z_d, v_h\right), & \forall v_h \in V_{0h} \\ p_{hq} \in V_{0h}. \end{cases} \tag{12}$$

Se define u_{h0} como la solución particular de la ecuación variacional discreta (11) para el caso $q = 0$, es decir:

$$\begin{cases} a\left(u_{h0}, v_h\right) = \left(g, v_h\right)_H, & \forall v_h \in V_{0h} \\ u_{h0} \in K_h. \end{cases} \tag{13}$$

El correspondiente problema de control óptimo discreto consiste en hallar $q_{h_{op}} \in Q$ de manera que:

$$J_h\left(q_{h_{op}}\right) = \underset{q \in Q}{Min}\; J_h\left(q\right). \tag{14}$$

Lema 1

(i) Existen *únicos* $u_{hq} \in K_h$, $u_{h0} \in K_h$ *y* $p_{hq} \in V_{0h}$ *soluciones de las ecuaciones variacionales (11), (13) y (12) respectivamente* $\forall g \in H, \forall q \in Q, b = Const.$ *sobre* Γ_1.

(ii) El operador $q \in Q \to u_{hq} \in V$ *es Lipschitziano, i.e.*

$$\left\|u_{hq_2} - u_{hq_1}\right\|_V \le \frac{\left\|\gamma_0\right\|}{\lambda}\left\|q_2 - q_1\right\|_Q, \quad \forall q_1, q_2 \in Q, \forall h > 0, \tag{15}$$

donde $\lambda > 0$ *es la constante de coercividad de la forma bilineal, simétrica y continua a, es decir:*

$$\lambda\left\|v\right\|_V^2 \le a(v,v), \quad \forall v \in V_0 \tag{16}$$

y $\gamma_0 : V \to H^{1/2}\left(\Gamma_1\right)$ *es el operador traza* .

(iii) El operador $C_h : Q \to V_{0h}$ *definido por:*

$$C_h\left(q\right) = u_{hq} - u_{h0} \tag{17}$$

es lineal y continuo, es decir:

$$\left\|C_h\left(\mathrm{q}\right)\right\|_V = \left\|u_{hq} - u_{h0}\right\|_V \le \frac{\left\|\gamma_0\right\|}{\lambda}\left\|q\right\|_Q, \quad \forall q \in Q\ ; \tag{18}$$

además es Lipschitziano en Q y satisface la siguiente propiedad:

$$a\left(p_{hq,}C_h\left(f\right)\right)=\left(u_{hq}-z_d,C_h\left(f\right)\right)_H=\left(f,p_{hq}\right)_Q,\quad \forall q,f\in Q\,. \tag{19}$$

(iv) Se tiene la siguiente propiedad:

$$u_{h(c_1q_1+c_2q_2)}=c_1u_{hq_1}+c_2u_{hq_2}+\left(1-c_1-c_2\right)u_{h0,}\quad \forall c_1,c_2\in\mathbb{R},\ \forall q_1,q_2\in Q,\forall h>0\ . \tag{20}$$

(v) El operador $G_h:Q\times Q\to\mathbb{R}$ definido por:

$$G_h\left(q,f\right)=\left(C_h\left(q\right),C_h\left(f\right)\right)_H+M\left(q,f\right)_Q \tag{21}$$

es bilineal, simétrico, continuo y coercivo en H, i.e.

$$M\left\|q\right\|_Q^2\le G_h\left(q,q\right)=\left\|C_h\left(q\right)\right\|_H^2+M\left\|q\right\|_Q^2,\quad \forall q\in Q,\forall h>0\,. \tag{22}$$

(vi) El funcional $L_h:Q\to\mathbb{R}$ definido por:

$$L_h\left(q\right)=\left(C_h\left(q\right),z_d-u_{h0}\right)_H \tag{23}$$

es lineal y continuo en Q.

(vii) Se tiene la siguiente propiedad:

$$\left\|u_{hq}-b\right\|_V\le\frac{1}{\lambda}\left[\left\|g\right\|_H+\left\|q\right\|_Q\left\|\gamma_0\right\|\right]=Const.,\quad \forall h>0\,. \tag{24}$$

(viii) El operador $q\in Q\to p_{hq}\in V_{0h}$ es Lipschitziano satisfaciendo las propiedades siguientes:

$$\begin{cases}(a)\quad \left(p_{hq_2}-p_{hq_1},q_2-q_1\right)_H=\left\|u_{hq_2}-u_{hq_1}\right\|_H^2\ge 0,\quad \forall q_1,q_2\in Q,\forall h>0 & (25)\\ (b)\quad \left\|p_{hq_2}-p_{hq_1}\right\|_V\le\dfrac{1}{\lambda}\left\|u_{hq_2}-u_{hq_1}\right\|_V\le\dfrac{\left\|\gamma_0\right\|}{\lambda^2}\left\|q_2-q_1\right\|_Q,\quad \forall q_1,q_2\in Q,\forall h>0 & (26)\end{cases}$$

Demostración Se utilizan el Teorema de Lax-Milgram, las definiciones (17), (21) y (22), las ecuaciones variacionales (11), (12) y (13), la coercividad (16) siguiendo las ideas desarrolladas en Gariboldi y Tarzia, 2008; Lions, 1968 y Tröltzsch, 2010.

Teorema 2
(i) El funcional de costo discreto (10) puede expresarse como:

$$J_h\left(q\right)=\frac{1}{2}G_h\left(q,q\right)-L_h\left(q\right)+\frac{1}{2}\left\|u_{h0}-z_d\right\|_H^2,\quad \forall q\in Q\ . \tag{27}$$

(ii) Se tiene que J_h *es una aplicación* Q*- elíptica y por ende estrictamente convexa, es decir:*

$$(1\text{-}t)J_h(q_2)+tJ_h(q_1)-J_h(tq_1+(1-t)q_2)=\frac{t(1-t)}{2}\left\|u_{hq_2}-u_{hq_1}\right\|_H^2+M\frac{t(1-t)}{2}\left\|q_2-q_1\right\|_Q^2$$

$$\geq M\frac{t(1-t)}{2}\left\|q_2-q_1\right\|_Q^2,\quad \forall q_1,q_2\in Q,\forall t\in[0,1]. \tag{28}$$

(iii) Existe un único control óptimo $q_{h_{op}}\in Q$ *que satisface el problema de optimización* (14).
(iv) Se tiene que:

$$u_{h(q+tf)}=u_{hq}+tC_h(f),\quad \forall q,f\in Q,\forall h>0,\forall t\in\mathbb{R}\ . \tag{29}$$

(v) J_h *es una aplicación diferenciable según Gâteaux y su derivada* J_h' *está dada por la siguiente expresión:*

$$J_h'(q)=Mq-p_{hq},\quad \forall q\in Q,\quad \forall h>0. \tag{30}$$

(vi) La condición de optimalidad está dada por:

$$J_h'\left(q_{h_{op}}\right)=0\Leftrightarrow q_{h_{op}}=\frac{1}{M}p_{hq_{h_{op}}}. \tag{31}$$

(vii) J_h' *es un operador Lipschitziano y estrictamente monótono, i.e.*

$$a)\quad \left\|J_h'(q_2)-J_h'(q_1)\right\|_H\leq\left(M+\frac{\left\|\gamma_0\right\|^2}{\lambda^2}\right)\left\|q_2-q_1\right\|_Q,\quad \forall q_1,q_2\in Q,\forall h>0 \tag{32}$$

$$b)\quad \left\langle J_h'(q_2)-J_h'(q_1),q_2-q_1\right\rangle=\left\|u_{hq_2}-u_{hq_1}\right\|_H^2+M\left\|q_2-q_1\right\|_Q^2$$

$$\geq M\left\|q_2-q_1\right\|_Q^2,\quad \forall q_1,q_2\in Q,\forall h>0 \tag{33}$$

Demostración Se utilizan las definiciones (10), (17), (21) y (23), las ecuaciones variacionales (11) y (12), la coercividad (16) siguiendo las ideas desarrolladas en Gariboldi y Tarzia, 2008. Además, el funcional J_h es una aplicación diferenciable Gâteaux, i.e.

$$\left\langle J_h'(q),f\right\rangle=\lim_{t\to0^+}\frac{J_h(q+tf)-J_h(q)}{t}=G_h(q,f)-L_h(f),\quad \forall q,f\in Q. \tag{34}$$

Se define el operador:

$$W_h : Q \to V_{0h} \subset V_0 \,/\, W_h\left(q\right) = \frac{1}{M}\, p_{hq} \,. \tag{35}$$

Teorema 3 *Se tiene que:*
(i) W_h *es un operador Lipschitziano, es decir:*

$$\left\| W_h\left(q_2\right) - W_h\left(q_1\right) \right\|_V \leq \frac{\left\|\gamma_0\right\|}{M\lambda^2} \left\| q_2 - q_1 \right\|_Q , \quad \forall q_1, q_2 \in Q, \quad \forall h > 0 \,. \tag{36}$$

(ii) W_h *es un operador de contracción si y sólo si*

$$\mathrm{M} > \frac{\left\|\gamma_0\right\|}{\lambda^2} \,. \tag{37}$$

(iii) Si M *verifica la desigualdad (37) entonces el control óptimo discreto* $q_{h_{op}} \in Q$ *puede ser obtenido como el único punto fijo del operador* W_h*, es decir:*

$$q_{h_{op}} = \frac{1}{M}\, p_{hq_{h_{op}}} \Leftrightarrow W_h\left(q_{h_{op}}\right) = q_{h_{op}} \tag{38}$$

Demostración Se utiliza la definición (35) y las propiedades (25) y (31).

3 ESTIMACIONES DE ERROR

Se obtienen las siguientes estimaciones de error entre las soluciones continuas y discretas.

Teorema 4 $\forall q \in Q$ *(fijo) se tienen las siguientes propiedades*:
(i) Se obtienen:

$$a\left(u_q - u_{hq}, v_h\right) = 0, \quad \forall v_h \in V_{0h} \tag{39}$$

$$a\left(u_q - u_{hq}, u_q - u_{hq}\right) \leq a\left(u_q - v_h, u_q - v_h\right), \quad \forall v_h \in K_h \tag{40}$$

$$\left\| u_q - u_{hq} \right\|_V \leq \frac{1}{\lambda} \operatorname*{Inf}_{v_h \in K_h} \left\| u_q - v_h \right\|_V \quad . \tag{41}$$

(ii) Si el estado del sistema continuo tiene la regularidad $u_q \in H^r\left(\Omega\right) \quad \left(1 < r \leq 2\right)$ *entonces se obtiene la estimación:*

$$\left\| u_q - u_{hq} \right\|_V \leq \frac{c_0}{\sqrt{\lambda}} \left\| u_q \right\|_r h^{r-1}, \quad \forall q \in Q, h > 0 \,. \tag{42}$$

(iii) Se tiene la siguiente convergencia

$$\lim_{h \to 0^+} \left\| u_q - u_{hq} \right\|_V = 0, \quad \forall q \in Q \,. \tag{43}$$

Demostración Se utilizan las ecuaciones variacionales (4) y (11), $v_h = \pi_h\left(u_q\right)$ en la ecuación variacional (11), la coercividad (16) y las estimaciones (9).

Teorema 5 $\forall q \in Q$ *(fijo) se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $a\left(p_q - p_{hq}, v_h\right) = \left(u_q - u_{hq}, v_h\right)_H, \quad \forall v_h \in V_{0h}$

y por ende:

$$a\left(p_q - p_{hq}, \pi_h\left(p_q\right) - p_{hq}\right) = \left(u_q - u_{hq}, \pi_h\left(p_q\right) - p_{hq}\right)_H \tag{44}$$

(ii) Si el estado del sistema y el estado adjunto continuos tienen las regularidades siguientes $u_q,\, p_q \in H^r\left(\Omega\right) \quad \left(1 < r \leq 2\right)$ *entonces se obtiene la estimación:*

$$\left\| p_q - p_{hq} \right\|_V^2 \leq c_1 \left\| p_q - p_{hq} \right\| h^{r-1} + c_2 h^{2r-1} \tag{45}$$

con

$$c_1 = c_1(r, u_q, p_q) = \frac{c_0}{\lambda}\left[\left\| p_q \right\|_r + \frac{\left\| u_q \right\|_r}{\sqrt{\lambda}}\right],\; c_2 = c_2(r, u_q, p_q) = \frac{c_0^{\,2}}{\lambda^{3/2}} \left\| u_q \right\|_r \left\| p_q \right\|_r . \tag{46}$$

Además, se puede obtener la estimación siguinete:

$$\left\| p_q - p_{hq} \right\|_V \leq c_3 h^{r-1}, \quad \forall h \leq 1 \tag{47}$$

con

$$c_3 = c_3(r, u_q, p_q) = \sqrt{c_1^2 + 2c_2}\,, \quad \forall h \leq 1 \;. \tag{48}$$

(iii) Se tiene la siguiente convergencia:

$$\lim_{h \to 0^+} \left\| p_q - p_{hq} \right\|_V = 0, \quad \forall q \in Q \;. \tag{49}$$

Demostración Se utilizan las ecuaciones variacionales (3) y (12), $v_h = \pi_h\left(p_q\right)$ en la ecuación variacional (12), la coercividad (16) y las estimaciones (9).

Teorema 6
(i) Si el estado del sistema y el estado adjunto continuos tienen las regularidades $u_{q_{op}}, p_{q_{op}} \in H^r\left(\Omega\right)(1 < r \leq 2)$ *entonces se obtienen los siguientes límites:*

$$\lim_{h \to 0^+} \left\| q_{h_{op}} - q_{_{op}} \right\|_V = 0, \quad \lim_{h \to 0^+} \left\| u_{hq_{h_{op}}} - u_{q_{op}} \right\|_V = 0, \quad \lim_{h \to 0^+} \left\| p_{hq_{h_{op}}} - p_{q_{op}} \right\|_V = 0 \,. \tag{50}$$

Demostración Se siguen los siguientes pasos:

(i) $\forall h > 0,$ se tiene:

$a)$ $\|u_{h0} - b\|_V \le \frac{1}{\lambda}\|g\|_H, \quad \forall h > 0$ y por ende se tiene $\|u_{h0}\|_V \le Const.$

$b)$ $\frac{1}{2}\left\|u_{hq_{h_{op}}} - z_d\right\|_H^2 + \frac{M}{2}\left\|q_{h_{op}}\right\|_Q^2 \le \frac{1}{2}\|u_{h0} - z_d\|^2 \le Const,$

con lo cual

$$\left\|u_{hq_{h_{op}}}\right\|_H \le Const, \qquad \left\|q_{h_{op}}\right\|_Q \le Const, \quad \forall h > 0 .$$

(ii) Se tiene:

$$\left\|u_{hq_{h_{op}}} - b\right\|_V \le \frac{1}{\lambda}\left[\|g\|_H + \|q_{op}\|_Q \|\gamma_0\|\right] \le Const, \quad \forall h > 0 .$$

(iii) Se tiene:

$$\left\|p_{hq_{h_{op}}}\right\|_V \le \frac{1}{\lambda}\left\|u_{hq_{h_{op}}} - z_d\right\|_H \le Const, \quad \forall h > 0 .$$

(iv) De las acotaciones anteriores se deduce que:

$$\begin{cases} a) \quad \exists f \in H / q_{h_{op}} \to f \quad \text{convergencia débil en Q cuando } h \to 0^+ \\ b) \quad \exists \eta \in V / u_{hq_{h_{op}}} \to \eta \quad \text{convergencia débil en } V \text{ (fuerte en } H\text{) cuando } h \to 0^+ \\ c) \quad \exists \xi \in V / p_{hq_{h_{op}}} \to \xi \quad \text{convergencia débil en } V \text{ (fuerte en } H\text{) cuando } h \to 0^+. \end{cases}$$

(v) Utilizando las tres convergencias anteriores se puede pasar al límite cuando $h \to 0^+$, obteniéndose por unicidad de las inecuaciones variacionales (11) y (12) que:

$a)$ $\eta = u_f$ *en V*

$b)$ $\xi = q_f$ en V

$c)$ $f = q_{op}$ en Q.

(vi) Por otro lado se tienen:

$a)$ $\lambda\left\|u_{hq_{h_{op}}} - u_{q_{op}}\right\|_V^2 \le \left(g, u_{q_{op}} - u_{hq_{h_{op}}}\right)_H - \left(q_{h_{op}} - q_{op}, u_{hq_{h_{op}}} - b\right)_Q - \left(q_{op}, u_{q_{op}} - u_{hq_{h_{op}}}\right)_Q \to 0,$

cuando $h \to 0^+$ y por lo tanto se deduce que:

$$\lim_{h\to 0^+}\left\|u_{hq_{h_{op}}} - u_{q_{op}}\right\|_V = 0 ;$$

$b)$ $\lambda\left\|p_{hq_{h_{op}}} - p_{q_{op}}\right\|_V^2 \le \left(u_{hq_{h_{op}}} - u_{q_{op}}, p_{hq_{h_{op}}}\right)_H - a\left(p_{q_{op}}, p_{hq_{h_{op}}} - p_{q_{op}}\right) \to 0,$ cuando $h \to 0^+$ y por lo tanto se obtiene:

$$\lim_{h\to 0^+}\left\| p_{hq_{h_{op}}} - p_{q_{op}} \right\|_V = 0\,.$$

(vii) Utilizando la definición (10) se puede pasar al límite cuando $h \to 0^+$ y se deduce que:

$$\lim_{h\to 0^+}\left\| q_{h_{op}} \right\|_Q = \left\| q_{op} \right\|_Q\,.$$

(viii) De la convergencia débil (iv) y de la propiedad (vii) se deduce que:

$$\lim_{h\to 0}\left\| q_{h_{op}} - q_{op} \right\|_Q = 0\,,$$

con lo cual la prueba queda completada.

Lema 7 *Si M verifica la desigualdad (37) entonces se puede tener otra prueba de:*

$$f = q_{op}.$$

Demostración Se utiliza la caracterización de punto fijo (38).

Teorema 8 $\left(\text{Estimaciones explícitas del error cuando M}>\frac{\|\gamma_0\|}{\lambda^2}\right)$
Si M verifica la desigualdad (37) y las soluciones de los problemas continuos verifican las propiedades de regularidad:

$$u_{q_{op}} \in H^r(\Omega), \quad p_{q_{op}} \in H^r(\Omega), \quad (1 < r \le 2)$$

entonces se tienen las siguientes propiedades:

$$\left\| q_{h_{op}} - q_{op} \right\|_V \le Ch^{r-1}, \left\| u_{hq_{h_{op}}} - u_{q_{op}} \right\|_V \le Ch^{r-1}, \left\| p_{hq_{h_{op}}} - p_{q_{op}} \right\|_V \le Ch^{r-1} \qquad (52)$$

donde C representan constantes independientes de h.
Demostración Se sigue un método análogo al dado en el caso continuo en Gariboldi y Tarzia, 2008 y al caso discreto de control distribuido en Tarzia, 2009.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los proyecyos PIP Nº 0460 de CONICET-UA, ANPCyT PICTO Austral 2008 No. 073 y AFOSR Grant FA9550-10-1-0023.

REFERENCIAS

Azzam, A., and Kreyszig, E., On solutions of elliptic equations satisfying mixed boundary conditions, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 13: 254-262, 1982.

Bergounioux, M., Optimal control of an obstacle problem, *Applied Mathematics and Optimization*, 36 : 147-172, 1997.

Brenner, S., and Scott, L.R., *The mathematical theory of finite element theory*, Springer, New York, 1994.

Casas, E., and Mateos, M., Uniform convergence of the FEM. Applications to state constrained control problems, *Computational and Applied Mathematics*, 21: 67-100, 2002.

Casas, E., and Raymond, J.P., Error estimates for the numerical approximation of Dirichlet boundary control for semilinear elliptic equations, *SIAM Journal on Control and Optimization,* 45: 1586-1611, 2006.

Ciarlet, P.G., *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

Gariboldi, C.M., and Tarzia, D.A., Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity, *Advances in Differential Equations and Control Processes*, 1: 113-132, 2008.

Kinderlehrer, D., and Stampacchia, G., *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.

Lanzani, L., Capogna, L., and Brown, R.M., The mixed problem in L^p for some two-dimensional Lipschitz domain*, Mathematischen Annalen*, 342: 91-124, 2008.

Lions, J.L., *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

Shamir, E., Regularization of mixed second order elliptic problems, *Israel Journal of Mathematics*, 6: 150-168, 1968.

Tabacman, E.D., and Tarzia, D.A., Sufficient and/or necessary condition for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem, *Journal of Differential Equations*, 77: 16-37, 1989.

Tarzia, D.A., *Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre*, CLAMI-CONICET, No. 5, Buenos Aires, 1981.

Tarzia, D.A., An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem, *Engineering Analysis*, 5: 177-181, 1988.

Tarzia, D.A., Numerical analysis for the heat flux in a mixed elliptic problem to obtain a discrete steady-state two-phase Stefan problem, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33: 1257-1265, 1996.

Tarzia, D.A., Numerical analysis of a mixed elliptic problem with flux and convective boundary conditions to obtain a discrete solution of non-constant sign, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 15: 355-369, 1999.

Tarzia, D.A., Análisis numérico de un problema de control elíptico distribuido, *Mecánica Computacional*, 28: 1149-1160, 2009.

Tröltzsch, F., *Optimal control of partial differential equations: Theory, methods and applications*, American Mathematical Society, Providence, 2010.