

## **ESTUDIO ANALÍTICO Y EXPERIMENTAL DE ABSORBEDORES DINÁMICOS EN PLACA CIRCULAR**

**Santiago Maiz, Javier A. Yagüe y Alejandro Ratazzi**

*Departamento de Ingeniería,  
Universidad Nacional del Sur, Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina.*

**Palabras Clave:** placa, circular, vibraciones, masa-resorte, absorbedor.

**Resumen:** La incorporación de absorbedores dinámicos en máquinas y estructuras, representa una solución tecnológica particular al momento de disminuir niveles vibratorios presentes cuando estas se encuentran operando en una condición de resonancia.

El presente trabajo, se refiere al estudio analítico experimental de una placa circular empotrada en condición de resonancia, a la cual se le adosa un sistema absorbedor dinámico.

Se determina la frecuencia fundamental de la placa mediante métodos analíticos y experimentales, y se aborda el diseño del sistema absorbedor dinámico.

Luego con las mismas técnicas se estudia el comportamiento del sistema acoplado en el rango de frecuencias de trabajo.

**Los resultados obtenidos muestran satisfactoria concordancia entre los métodos analíticos y experimentales, contribuyendo el presente estudio un aporte de interés a la literatura técnico-científica actual.**

## INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se analiza el comportamiento dinámico de placas circulares empotradas con un sistema de 1 grado de libertad que actúa como absorbedor dinámico.

El estudio dinámico de elementos estructurales con presencia de masas adosadas elásticamente asume gran interés por su variada gama de aplicaciones tecnológicas (D. V. Bambill et al, 2002). En el presente trabajo se estudia el comportamiento dinámico-estructural de un sistema placa-masa sometido a una fuerza periódica en coincidencia con la frecuencia fundamental natural de la placa. Se analiza la influencia del sistema masa-resorte sobre las frecuencias naturales de vibración, así como el efecto que causa la variación de la relación de la masa con respecto a la masa de la placa y la rigidez del resorte que vincula la masa con la placa. Se utiliza para su resolución el método de Ritz, aproximando la solución mediante una suma de funciones coordenadas polinómicas que satisfacen las condiciones de borde y se realiza una experiencia de un caso particular.

El presente trabajo surge de una extensión del análisis realizado en estudios anteriores (S. Maiz et al 2009, S. J. Escanes et al 2008)

El modelo analizado consiste en placas circulares, con una masa concentrada elásticamente adosada, como puede observarse en el esquema de la Figura 1. Dichos modelos difieren en la rigidez del vínculo elástico y la masa concentrada.

Se consideran a los efectos del presente estudio las condiciones de contorno empotrada. Se adoptan para la ubicación del sistema masa-resorte el centro de la placa, aunque el modelo analítico permite una posición arbitraria.

Para cada uno de los casos mencionados, se considera un rango amplio de valores de rigidez del resorte y masa concentrada que constituye el sistema discreto de modo que siempre este afinado con la frecuencia de resonancia de la placa.

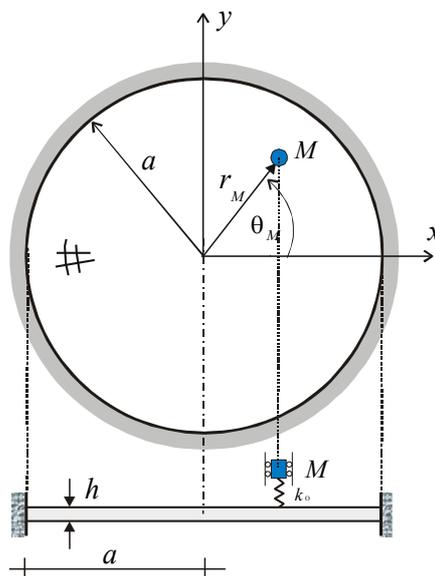


Figura 1: Placa circular con masa elásticamente adosada.

## 1 SOLUCIÓN APROXIMADA

Para la resolución del modelo estructural en el presente trabajo se utiliza el método de Ritz (Lord Rayleigh, 1945; Ritz W., 1908).

Por el lado analítico se aproxima la solución mediante una suma de funciones coordenadas.

El problema propuesto de la placa vibrante del modelo está gobernado por la funcional de energía que se expresa como

$$\begin{aligned}
 J(W(r, \theta)) = & \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)^2 \right. \\
 & + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \left. \right] r dr d\theta - \\
 & - \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho h W^2 r dr d\theta - \frac{1}{2} M \omega^2 (W(r_M, \theta_M) + \nu)^2 + \frac{1}{2} k \nu^2
 \end{aligned} \quad (1)$$

La función amplitud de desplazamiento se indica con  $W = W(r, \theta)$ . El espesor de la placa se indica con  $h$ , el radio con  $a$  y la densidad del material con  $\rho$ . Con  $M$  se expresa magnitud de la masa puntual y con  $k$  la constante del resorte donde se encuentra adosada la masa puntual. Se asume que el resorte posee características lineales.

$\nu$  es la amplitud del desplazamiento relativo de la masa puntual con respecto a la placa.  $W(r_M, \theta_M)$  y  $(W(r_M, \theta_M) + \nu)$  son la amplitud del desplazamiento de la placa y amplitud total del desplazamiento del punto donde se encuentra adosada la masa puntual, respectivamente.

La frecuencia natural circular de vibración del sistema estructural placa-masa de la Figura 1 la expresamos con  $\omega$ .

Con  $\nu$  se indica al coeficiente de Poisson, y con  $E$  al módulo de elasticidad de Young del material de la placa.

Para el caso Empotrado las expresiones para desplazamiento y giro nulos son:

$$W(r, \theta)|_{r=a} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (2.a,b)$$

Para el método de Ritz se propone una aproximación utilizando una sumatoria de funciones coordenadas en  $r$  y  $\theta$ .

$$W_a(r, \theta) = \sum_{k=1}^{(p+1)(q+1)} C_k \phi_k(r, \theta) \quad \text{con } k = j(p+1) + 1 + i \quad (3)$$

Cada función coordenada  $\phi_k(r, \theta)$  satisface las condiciones de borde de la placa empotrada. Se adoptan para este análisis funciones generadas de la siguiente forma:

$$\phi_{j(p+1)+1+i} = (r^2 - 1)^2 r^{(2i+j)} \cos(j\theta); \quad j = 0, 1, \dots, p; \quad i = 0, 1, \dots, q; \quad (4)$$

Quedando definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= (r^2 - 1)^2 \\
 \phi_2 &= (r^2 - 1)^2 r^2 \\
 &\dots \\
 \phi_{(p+1)+1} &= (r^2 - 1)^2 r \cos(\theta) \\
 \phi_{(p+1)+2} &= (r^2 - 1)^2 r^3 \cos(\theta) \\
 &\dots \\
 \phi_{2(p+1)+1} &= (r^2 - 1)^2 r^2 \cos(2\theta) \\
 \phi_{2(p+1)+2} &= (r^2 - 1)^2 r^4 \cos(2\theta) \\
 &\dots \\
 \phi_{j(p+1)+1+i} &= (r^2 - 1)^2 r^{(2i+j)} \cos(j\theta) \\
 &\dots \\
 \phi_{(p+1)(q+1)} &= (r^2 - 1)^2 r^{(2p+q)} \cos(q\theta)
 \end{aligned} \tag{5}$$

Como  $p = q = 8$  el sistema queda determinado por 81 ecuaciones.

Una vez que se tienen todas las funciones coordenadas generadas se puede, de acuerdo con el método de Ritz, introducir estas funciones aproximantes dentro de la funcional (1) donde la integración de  $J(W_a(r, \theta))$  tiene la forma de una función homogénea cuadrática de coeficientes  $C_k$ . El mínimo de esta función lleva a un sistema de ecuaciones homogéneo de primer orden para los coeficientes de desplazamiento  $\bar{C}_k$ :

$$\frac{\partial J(W_a(r, \theta))}{\partial C_k} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, (q+1)(p+1); \tag{6}$$

El sistema de ecuaciones homogéneo puede ser escrito de la forma:

$$[\mathbf{K}^* - \omega^2 \mathbf{L}^*][\mathbf{C}] = 0 \tag{7}$$

Donde  $\mathbf{K}^*$  y  $\mathbf{L}^*$  están definidas de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & -M\phi_i(r_M, \theta_M) \\ M\phi_j(r_M, \theta_M) & M \end{bmatrix}$$

y  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{L}$  son matrices simétricas cuyos elementos son de la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{ij} = & D \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} \right. \\
 & + \nu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r} \right] \\
 & \left. + 2(1-\nu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r} \right] r dr d\theta \right. \\
 \mathbf{L}_{ij} = & \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^a \phi_i \phi_j r dr d\theta + M \phi_i(r_M, \theta_M) \phi_j(r_M, \theta_M)
 \end{aligned}$$

Los coeficientes de frecuencia natural del sistema se obtienen de la resolución del determinante igual a cero en la Ec. (7) ya que la condición de no trivialidad conduce a una ecuación trascendental en  $\omega$ . Como se sabe, las raíces de esta ecuación constituyen cotas superiores en los coeficientes de frecuencia natural.

## 2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Los resultados numéricos para una interpretación directa se muestran con respecto a las propiedades geométricas y físicas del sistema en estudio.

$$\begin{aligned}
 E = & 20.5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \\
 \rho = & 7950 \text{ Kg/m}^3 \\
 \nu = & 0.3 \\
 h = & 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\
 a = & 0.25 \text{ m}
 \end{aligned}$$

En la [Tabla 1](#) se muestran las primeras frecuencias naturales para la placa sin el sistema masa resorte.

$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
56.187	116.93	191.82	218.74

Tabla 1: Frecuencias para una placa circular isótropa empotrada en su contorno.

En la [Tabla 2](#) se comparan las primeras frecuencias naturales de la placa isótropa empotrada con el sistema masa-resorte adosado en el centro de la misma ( $r_M = 0$ ). El sistema masa resorte se encuentra afinado a la frecuencia fundamental de la tabla 1, según la siguiente expresión:

$$k = (2\pi f_1)^2 m$$

En la tabla 2 se vuelcan los valores adimensionales de masa adosada y de rigidez de resorte, a los efectos de evaluar la relación de masas entre la placa y el sistema absorbedor.

$m = M/M_p$	$K_m = \pi m \Omega_{1f}^2$	$f_1$	$f_2$
0.0050	1.64	51.67	60.94
0.0075	2.46	50.70	62.03
0.0100	3.28	49.89	62.96
0,0133	4.36	48.97	64.02
0.0150	4.92	48.55	64.52
0.0200	6.56	47.45	65.85
0.0250	8.20	46.51	67.02
0.0500	16.39	42.97	71.61

Tabla 2: Comparación de las frecuencias para una placa circular isótropa Empotrada en su contorno con un sistema masa-resorte adosado en el centro de la misma ( $r_M = 0$ ).

Siendo  $\Omega_{1f} = 2\pi a^2 f_1 \sqrt{\rho h/D} = 10.216$ , el primer coeficiente de frecuencia natural obtenido en la [Tabla 1](#) para placa sin sistema masa resorte.

### 3 MODELO EXPERIMENTAL.

En la [Figura 2](#) se muestra el modelo experimental de placa ensayada.

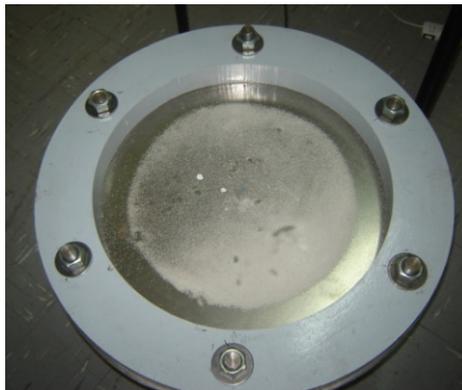


Figura 2: Placa ensayada

En la [Figura 3](#), se muestra el sistema absorbedor dinámico fabricado. El mismo posee una relación de masas  $m = 0,0133$ , de acuerdo con los resultados teóricos de [Tabla 2](#). La rigidez se corresponde con una longitud de varilla roscada de  $l = 0.054$  m, y diámetro  $d = 0.00211$  m.

Para modelar el resorte se utilizó la aproximación de constante  $k = \frac{3EI_v}{l^3}$  donde  $I_v = \frac{\pi d^4}{64}$



Figura 3: Absorbedor dinámico

#### 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

En la Figura 4, se presenta el resultado correspondiente a las tres primeras frecuencias naturales del sistema placa en cuestión.

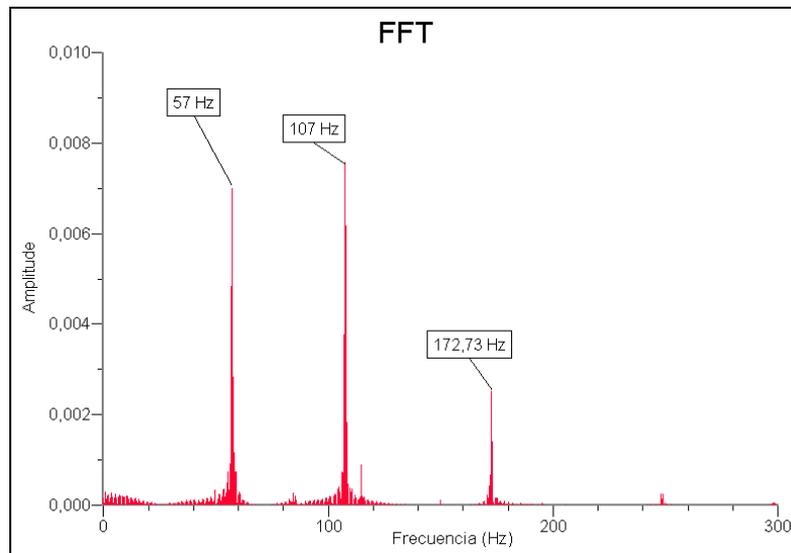


Figura 4: Frecuencias naturales sistema "placa"

En la Figura 5, se presenta el resultado de la respuesta en frecuencia del sistema "placa-absorbedor".

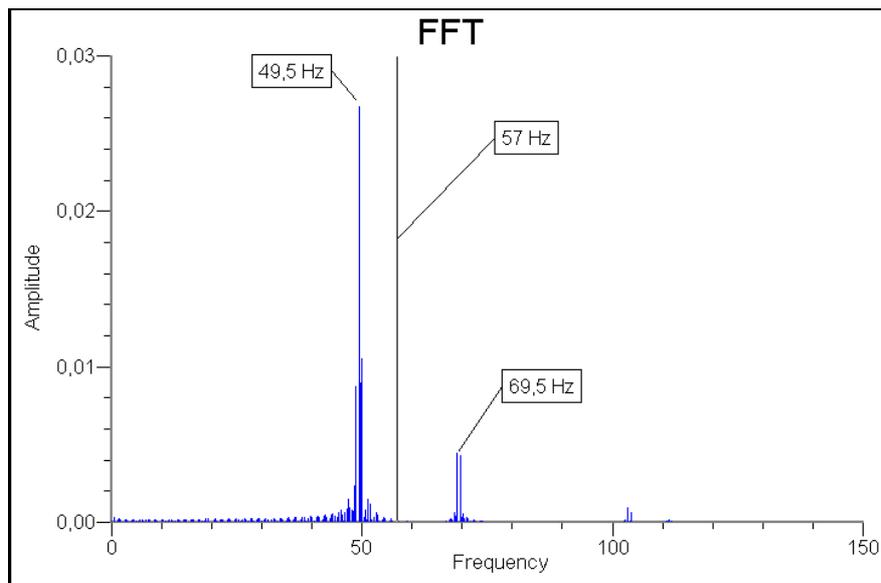


Figura 5: Frecuencias naturales sistema "placa-absorbedor"

En la [Figura 6](#) y [Figura 7](#) se muestran los resultados de respuesta dinámica del sistema placa-absorbedor durante excitación forzada las frecuencias de 49.5 y 69.5 Hz, correspondientes con la primer y segunda frecuencia natural del dicho sistema.

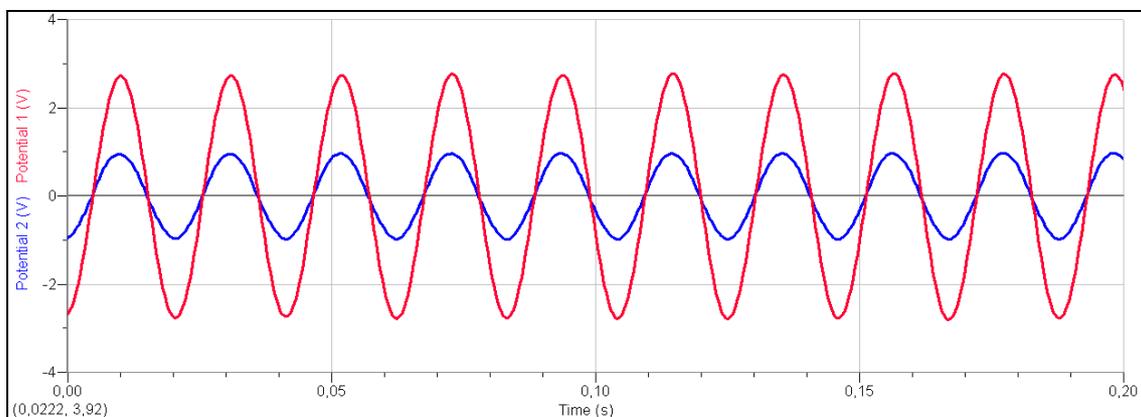


Figura 6: Desplazamiento de sistema Placa (azul) – Absorbedor (rojo) durante excitación forzada a 49.5 Hz

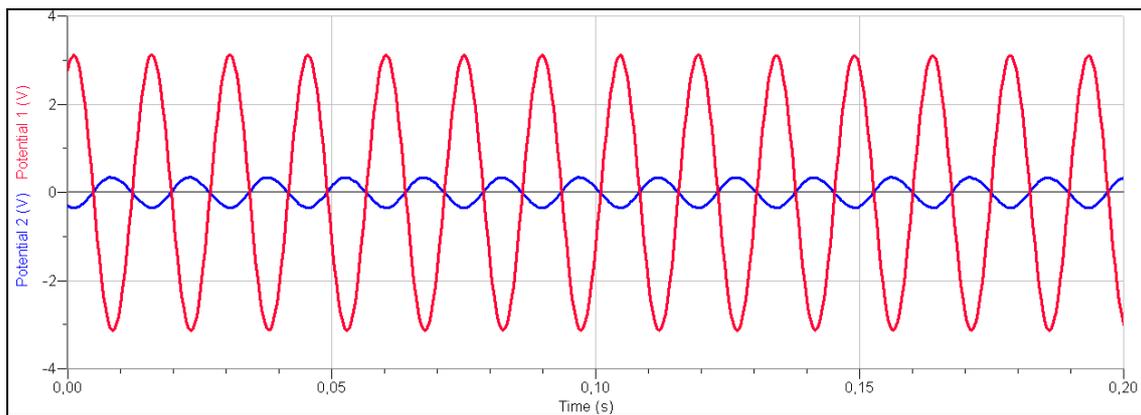


Figura 7: Desplazamiento de sistema Placa (azul) – Absorbedor (rojo) durante excitación forzada a 69.5 Hz

## 5 CONCLUSIONES

Como puede observarse, los valores de frecuencias naturales obtenidos a partir del modelo numérico empleado, guardan una aceptable aproximación con resultados experimentales, permitiendo abordar con éxito la etapa de cálculo y pre-diseño del sistema absorbedor dinámico.

De acuerdo con los resultados experimentales, y como es de esperar, la instalación del absorbedor dinámico modifica las zonas resonantes del sistema placa original, posibilitando éste, desintonizar una eventual resonancia en la frecuencia fundamental de dicho sistema (57 Hz) (ver Figura 5).

Complementariamente, del análisis de fase realizado se concluye, que a la primer frecuencia natural (49.5 Hz) el modo de vibración resulta en desplazamientos en fase entre la masa del absorbedor y el sistema principal, mientras que para la segunda frecuencia natural (69.5 Hz) el comportamiento es en contra fase (ver Figura 6 y Figura 7). Esta respuesta se corresponde con la discretización de un sistema de 2 GDL.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores de este trabajo agradecen la colaboración de Gabriel Leguizamón Técnico del Laboratorio de Vibraciones Mecánicas y a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur.

## REFERENCIAS

- Bambill D. V., Laura P. A. A., Rossit C. A. y Escanes S. J., Frecuencias naturales de vibración de placas circulares con una masa adosada, *Mecánica Computacional*, Vol. XXI, 2168-2175, 2002.
- S. Maiz, C. A. Rossit, D. V. Bambill y A. Susca. Transverse vibrations of a clamped elliptical plate carrying a concentrated mass at an arbitrary position. *Journal of Sound and Vibration* Vol 320, Issues 4-5, Pages 1146-1163, 2009.
- S. J. Escanes, S. Maiz, V. Y. González, D. V. Bambill y D. H. Felix. Vibración de una placa circular ortótropa con un sistema masa resorte adosado en una posición arbitraria?. *Mecánica Computacional* Vol. XXVII, pp. 1943-1956, 2008.

Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, Segunda Edición, Vol. 1, Macmillan, London, 1884, Sec. 88 (Re-Edición por Dover, New York, 1945).

Ritz W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik (Un nuevo método para resolver ciertos problemas de variaciones en la física matemática), *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 135: 1-61, 1908.