

FRECUENCIAS NATURALES DE LAS OSCILACIONES TRANSVERSALES EN PLACAS POLIGONALES APOYADAS MODERADAMENTE GRUESAS

J.M. Martínez Valle^a, A. Albanesi^b y V. Fachinotti^b

^a *Departamento de Mecánica, EPS; Edificio Leonardo da Vinci, Campus de Rabanales, Universidad de Córdoba, 14071, Córdoba, España, jmvalle@uco.es.*

^b *Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC), Universidad Nacional del Litoral (UNL)/ Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Predio CCT-CONICET Santa Fe, Ruta Nac. 168, Paraje El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina, aalbanes@santafe-conicet.gov.ar, vfachino@intec.unl.edu.ar.*

Keywords: Vibraciones, elasticidad, placas poligonales moderadamente gruesas.

Resumen. En el presente artículo estudiamos las frecuencias naturales de las oscilaciones transversales en placas moderadamente gruesas de contorno poligonal apoyadas, fijando una metodología general para la obtención numérica de las frecuencias naturales y modos de vibración para contornos poligonales arbitrarios. Obtenemos analíticamente la solución para el caso de las oscilaciones transversales en placas moderadamente gruesas rectangulares apoyadas y obtenemos fórmulas sencillas y prácticas para la determinación de las frecuencias naturales tanto de este caso, como para el de las placas moderadamente gruesas de contorno hexagonal, todo ello enmarcado en unas ecuaciones de cálculo para placas moderadamente gruesas deducidas por los autores en una publicación anterior.

1 INTRODUCCIÓN

Las vibraciones de placas son un tema de indudable interés en el campo de la ingeniería civil y aeronáutica. Hoy día encontramos numerosos ejemplos donde se producen este tipo de fenómenos, véase por ejemplo el fuselaje de aviones supersónicos o los fenómenos dinámicos a los que están sometidas las estructuras en Ingeniería Civil, donde existen elementos estructurales que podemos estudiar como placas o láminas [Clough \(1993\)](#).

Los primeros estudios sobre vibraciones libres en elementos estructurales datan de los años 1800. [Kirchhoff \(1850\)](#) introdujo la célebre ecuación biarmónica que relaciona los corrimientos verticales de la placa con las cargas transversales aplicadas. Sin embargo, esta teoría solo es válida para placas delgadas; los corrimientos obtenidos son menores que en la realidad y hace una sobrestimación de las tensiones, frecuencias naturales y cargas de pandeo. Fue [Reissner \(1945\)](#), quien introdujo la deformación por corte en placas y quien propuso incluso la formulación dinámica del problema incluyendo en el término de la energía cinética la inercia rotacional. A partir de ahí, han surgido numerosas teorías de placas de orden superior con infinidad de variantes que analizaban tanto el problema dinámico como estático; podemos citar por ejemplo, [Bhimaraddi \(1984\)](#), [Reddy \(2007\)](#). Las soluciones analíticas para estas ecuaciones casi nunca son posibles por lo que se ha de acudir a métodos aproximados. El Método de los Elementos Finitos (MEF), ha sido y es una herramienta muy potente para resolver ecuaciones diferenciales o integrales [Zienkiewicz \(2000\)](#), [Bathe \(1996\)](#). Entre las técnicas alternativas más utilizadas en el contexto de las placas con deformación por corte podemos nombrar los métodos de bandas finitas, [Cheung \(1981\)](#), los métodos mediante funciones spline, [Lal \(1997\)](#), el método de Rayleigh Ritz, [Cupial \(1997\)](#) y [Dickinson \(1982\)](#) o los métodos de colocación [Lin \(2005\)](#). El método de Galerkin es otra posibilidad interesante que se puede aplicar sin dificultad y al que no se le ha prestado tanto interés como al MEF. Se le ha englobado en los llamados Meshless Methods. Una de las ventajas de estos métodos respecto al MEF es que no necesitan operar con ningún funcional y que la discretización se realiza sobre todo el dominio del problema. Esto, en conjunción con el uso de coordenadas naturales ha aportado buenos resultados como veremos en esta publicación. Al igual que con el MEF, existen variantes para el método de Galerkin y distintas técnicas para aliviar el bloqueo por corte. Podemos citar a [Buy \(2009\)](#), [Tongsuk \(2004 a, b\)](#) y [Wang \(2004\)](#) como autores que abordan el problema.

La resolución del problema dinámico de placas de contorno poligonal arbitrario fue estudiado inicialmente por [Leissa \(1973\)](#) o [Soedel \(1993\)](#). Sin embargo, no tenía en cuenta la deformación por corte. Una revisión interesante sobre vibraciones de placas con la inclusión de la deformación por corte la podemos encontrar en los trabajos de [Liew et al \(1992, 1993, 1994, 1995, 1997\)](#). Sin embargo, las referencias a placas de contorno poligonal arbitrario son muy escasas y la metodología utilizada suele ser compleja.

En una comunicación anterior, los autores propusimos unas nuevas ecuaciones de cálculo para placas moderadamente gruesas que tenían una serie de ventajas respecto de las existentes de 1° y 2° orden (Bolle Reissner, Vlasov). Las teorías anteriores, [Panc \(1975\)](#), se reducían a las deducidas por los autores con tal que se admitiera que el giro alrededor de la normal era nulo [Martínez \(2011\)](#).

En esta comunicación, tratamos de validar las ecuaciones deducidas anteriormente pero estudiándolas en régimen dinámico. Para ello hacemos uso del principio de D'Alembert. Por una parte, obtenemos una solución analítica para placas rectangulares mediante funciones trigonométricas y posteriormente comprobamos la solución obtenida mediante el método de Galerkin. Además exponemos un procedimiento numérico general para placas de contorno

poligonal arbitrario. Para ello subdividimos el dominio en una malla de triángulos de manera que podemos discretizar cualquier figura trapezoidal.

El fenómeno conocido como bloqueo de cortante no se manifiesta y las soluciones obtenidas tanto por el planteamiento teórico como por métodos numéricos es óptima (con diferencias del orden del 1 por mil).

2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DEL ESTUDIO DE LAS OSCILACIONES TRANSVERSALES DE PLACAS MODERADAMENTE GRUESAS DE CONTORNO POLIGONAL APOYADAS

Las ecuaciones de cálculo de la teoría clásica de placas incluyendo deformación por corte de la placa en régimen dinámico sin fuerzas externas aplicadas tienen por expresión, Reddy (2007):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x - \gamma I \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} &= 0, \\ -\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y - \gamma I \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

donde M_x , M_{xy} y M_y son los momentos generalizados, Q_x y Q_y son los cortantes generalizados, γ es la densidad, I es el momento de inercia, h es el espesor de la placa, y los θ_x y θ_y son los giros de la normal alrededor de los ejes y y x , w es el corrimiento vertical. Tenemos que notar que en las teorías clásicas de placas con deformación por corte y en las teorías de orden superior, los giros están desacoplados de los corrimientos por lo que resulta un sistema de 3 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que, en general, no tienen soluciones analíticas. Las dos primeras ecuaciones tienen en cuenta la inercia rotacional o lo que es equivalente, la influencia de la deformación por corte en el fenómeno de la vibración.

Notamos también que una vez conocidas las ecuaciones de equilibrio de una cierta teoría de placas, podemos abordar el estudio dinámico con tal de aplicar el principio de D'Alembert. Por tanto, para el estudio dinámico de placas moderadamente gruesas podemos obtener un sistema de ecuaciones diferenciales equivalentes a las ecuaciones anteriores haciendo uso de las ecuaciones diferenciales de equilibrio en desplazamientos bien de Bolle-Reissner, bien de Mindlin, de Vlasov etc. todas ellas descritas en el libro de Panc (1974).

Si recordamos, estas ecuaciones son para la teoría de Bolle-Reissner,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \Delta w &= -\frac{12(1+\mu)}{5E \cdot h} \cdot P \\ \Delta \vartheta_x - \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right) &= \frac{5(1-\mu)}{h^2} \left(\vartheta_x - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \Delta \vartheta_y - \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right) &= \frac{5(1-\mu)}{h^2} \left(\vartheta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

donde E el módulo de Young, μ es el coeficiente de Poisson y P son las cargas aplicadas.

Todas ellas pueden ser armonizadas, es decir llevadas a unas únicas ecuaciones, si adicionalmente a las hipótesis de partida de cada una de ellas, se acepta que el giro alrededor de la normal al plano de la placa es nulo, Martínez (2011). Para el caso estático es,

$$\Delta M = -P + \frac{\mu \cdot h^2}{10(1+\mu)} \Delta P \quad (3)$$

$$\Delta \bar{w} = -\frac{M}{D} - \frac{6P}{5 \cdot G \cdot h(1+\mu)} \quad (4)$$

donde M es el momento suma, que lo definíamos como

$$\left[M = \frac{M_x + M_y}{(1+\mu)} \right] \quad (5)$$

Este es un sistema análogo al sistema de ecuaciones presentado por [Reissman \(1980\)](#).

Si, como es nuestro caso, se está interesado en el estudio de las oscilaciones transversales, en aplicación del principio de D'Alembert, tenemos que tener en cuenta para establecer las ecuaciones de equilibrio dinámico, las fuerzas verticales de inercia en lugar de las cargas estáticas P , obteniendo para la teoría señalada.

$$\Delta M = \gamma h \cdot \ddot{w} - \frac{\mu \cdot \gamma h^3}{10(1+\mu)} \Delta \ddot{w} \quad (6)$$

$$\Delta w = -\frac{M}{D} + \frac{6 \cdot \gamma \ddot{w}}{5 \cdot G(1+\mu)} \quad (7)$$

donde D es la constante de rigidez la placa, G es el modulo de cizalladura y γ es la densidad del material, μ el coeficiente de Poisson, h el espesor de la placa y \ddot{w} la derivada segunda del corrimiento vertical w respecto del tiempo.

En síntesis, la resolución del problema del estudio de las oscilaciones transversales pasa por encontrar w y M tales que verifiquen:

- en el dominio constituido por la placa:

$$\Delta M = \gamma h \cdot \ddot{w} - \frac{\mu \cdot \gamma h^3}{10(1+\mu)} \Delta \ddot{w} \quad (8)$$

$$\Delta w = -\frac{M}{D} + \frac{6 \cdot \gamma \ddot{w}}{5 \cdot G(1+\mu)} \quad (9)$$

- en la frontera: $w = M = 0$.

3 RESOLUCIÓN ANALÍTICA PARA PLACAS DE PLANTA RECTANGULAR APOYADAS.

Nuestro primer propósito es obtener soluciones analíticas para vibraciones de placas rectangulares con influencia de la deformación por corte. Una de las grandes ventajas que posee nuestro sistema de ecuaciones que presentamos en las ecuaciones (8) y (9) es que la única variable a estudiar es el corrimiento w , por lo que es la variable a desarrollar en serie.

Dado que nuestro estudio es para placas apoyadas, (ver [Figura 1](#)) las condiciones de apoyo en los contornos ($w = M = 0$) se cumplen si la solución se expresa mediante

$$w = (C_1 \cdot \cos(f \cdot \tau) + C_2 \cdot \text{sen}(f \cdot \tau)) \cdot \sum A_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (10)$$

$$M = (C_1 \cdot \cos(f \cdot \tau) + C_2 \cdot \text{sen}(f \cdot \tau)) \cdot \sum B_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (11)$$

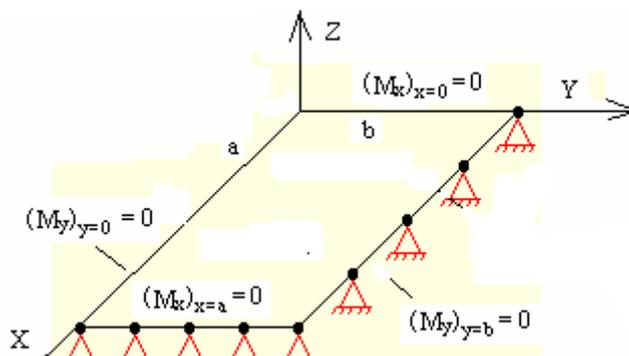


Figura 1. Placa rectangular simplemente apoyada. Condiciones de contorno

Donde w es la frecuencia natural y τ denominamos al tiempo. De ellas deducimos

$$\ddot{w} = -f^2 \cdot (C_1 \cdot \cos(f \cdot \tau) + C_2 \cdot \text{sen}(f \cdot \tau)) \cdot \sum A_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad (12)$$

$$\Delta w = -(C_1 \cdot \cos(f \cdot \tau) + C_2 \cdot \text{sen}(f \cdot \tau)) \cdot \sum \left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \right] \cdot A_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad (13)$$

$$\Delta M = -(C_1 \cdot \cos(f \cdot \tau) + C_2 \cdot \text{sen}(f \cdot \tau)) \cdot \sum \left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \right] \cdot B_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (14)$$

Sustituyendo en la ecuación (8)

$$B_{mn} = f^2 \cdot A_{mn} \cdot \left[\frac{\gamma \cdot h}{\left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \right]} + \frac{\mu \cdot \gamma \cdot h^3}{10 \cdot (1 + \mu)} \right], \quad (15)$$

y haciendo uso de la ecuación (9),

$$f_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\gamma h}} \cdot \left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 + h^2 \cdot \left(\frac{\mu \cdot (1 - \mu) + 2}{10 \cdot (1 - \mu^2)} \right) \cdot \left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \right] \right]}}, \quad (16)$$

que nos dice que la frecuencia fundamental, para $m=n=1$, vale

$$f_{11} = \frac{\pi^2}{b^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \cdot \sqrt{\frac{D}{\gamma h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \frac{\pi^2 \cdot h^2}{b^2} \cdot \left(\frac{\mu \cdot (1 - \mu) + 2}{10 \cdot (1 - \mu^2)} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \right]}}, \quad (17)$$

Lo que conduce al valor de la frecuencia fundamental correspondiente a placa delgada cuando el espesor es pequeño, [Leissa \(1993\)](#):

$$\left(t \rightarrow 0 \Rightarrow f_{11} = \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma t}} \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right) \right) \quad (18)$$

Si la placa es cuadrada para $\mu = 0.25$ obtenemos

$$f_{11} = \frac{2 \cdot \pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma h}} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + 0.466 \frac{\pi^2 \cdot h^2}{b^2} \right]}} \quad (19)$$

4 RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA POR EL MÉTODO DE GALERKIN.

El sistema formado por las ecuaciones (8) y (9), es una variante del típico problema de Dirichlet (resolución de la ecuación de Poisson con condiciones tipo Dirichlet en la frontera), en el que la unicidad de la solución está asegurada y es conocida como *función de Green*, Haberman (2003). Admite su resolución por métodos numéricos de elementos finitos y es fuertemente convergente incluso para mallados poco tupidos, aproximando la formulación integral débil mediante el método de Galerkin (método muy extendido en los problemas elípticos elementales).

4.1 Aproximación a la formulación integral débil mediante el método de Galerkin

Supongamos la placa, dominio de definición del problema, discretizada mediante una malla de n puntos (ver Figura 2).

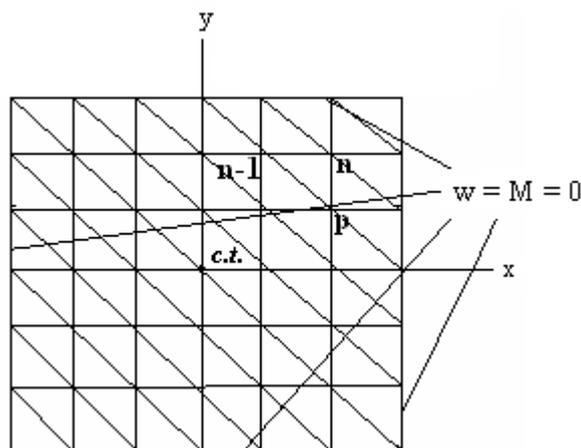


Figura 2. Subdivisión del dominio de la placa rectangular.

Comenzamos por resolver en primer lugar:

$$\Delta M = \gamma h \cdot \ddot{w} - \frac{\mu \cdot \gamma h^3}{10(1+\mu)} \cdot \Delta \ddot{w} \quad (20)$$

Tomando $V=V(x,y)$, con $V=0$ en la frontera, formamos la ecuación integral:

$$\iint_{\text{dominio}} \left(\Delta M - \gamma h \cdot \ddot{w} + \frac{\mu \cdot \gamma h^3}{10(1+\mu)} \cdot \Delta \ddot{w} \right) \cdot V \cdot dA = 0 \quad (21)$$

o también

$$\iint_{\text{do min io}} \Delta M \cdot V \cdot dA = \gamma \cdot h \cdot \iint_{\text{do min io}} \ddot{w} \cdot V \cdot dA - \frac{\mu \cdot \gamma \cdot h^3}{10 \cdot (1 + \mu)} \cdot \iint_{\text{do min io}} \Delta \ddot{w} \cdot V \cdot dA \quad (22)$$

Transformamos el primer miembro y el segundo sumando del 2º miembro según la 1ª Identidad de Green

$$\iint_{\text{do min io}} \Delta M \cdot V \cdot dA = \int_{\text{front}} \frac{\partial M}{\partial n} \cdot V \cdot dS - \iint_{\text{do min io}} \text{grad} \bar{M} \cdot \text{grad} \bar{V} \cdot dA = - \iint_{\text{do min io}} \text{grad} \bar{M} \cdot \text{grad} \bar{V} \cdot dA \quad (23)$$

$$\iint_{\text{do min io}} \Delta \ddot{w} \cdot V \cdot dA = \int_{\text{front}} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial n} \cdot V \cdot dS - \iint_{\text{do min io}} \text{grad} \bar{\ddot{w}} \cdot \text{grad} \bar{V} \cdot dA = - \iint_{\text{do min io}} \text{grad} \bar{\ddot{w}} \cdot \text{grad} \bar{V} \cdot dA \quad (24)$$

por haber elegido $V=0$ en la frontera.

Nos queda entonces

$$- \iint_{\text{do min io}} \text{grad} \bar{M} \cdot \text{grad} \bar{V} \cdot dA = \gamma \cdot h \cdot \iint_{\text{do min io}} \ddot{w} \cdot V \cdot dA + \frac{\mu \cdot \gamma \cdot h^3}{10 \cdot (1 + \mu)} \cdot \iint_{\text{do min io}} \text{grad} \bar{\ddot{w}} \cdot \text{grad} \bar{V} \cdot dA \quad (25)$$

Siguiendo el método de Ritz-Galerkin adoptamos

$$M = \sum \alpha_f \cdot \phi_f(x, y) + \sum_{\text{nud inter}} \alpha_i \cdot \phi_i(x, y) \quad (26)$$

siendo α_i constantes y $\phi_i(x, y)$ funciones de forma o funciones de interpolación, por ejemplo polinómicas a trozos, de valor unidad en el nodo en que se definen y nulas en el resto de los nudos del dominio, incluso en la frontera. Con el subíndice f denotamos los posibles nudos que pudiéramos situar en los bordes del dominio. En este caso, en que M es nulo en la frontera ($M=0$), tendríamos que al particularizar la expresión anterior a estos posibles nudos los coeficientes α_f serían idénticamente nulos y en consecuencia adoptamos

$$M = \sum_{\text{nud inter}} \alpha_i \cdot \phi_i(x, y) \quad (27)$$

que obviamente satisface las condiciones de frontera. Es claro que si particularizamos esta expresión en cada uno de los nodos, que denominamos nodo i , debe proporcionarnos el valor de M en ese nodo y como en ese nodo i se cumple $\phi_i = 1$ y resto de $\phi_j = 0$, deducimos que las constantes α_i tienen que tomar el valor de M en el nodo; es decir $\alpha_i = M_i^o$, denominando por M_i^o el valor de M en el nodo i . Así pues escribimos

$$M = \sum_{\text{nud inter}} M_i^o \cdot \phi_i(x, y) \quad (28)$$

En la misma forma adoptamos para los corrimientos w

$$w = \sum_{\text{nud inter}} w_i^o \cdot \phi_i(x, y) \quad (29)$$

Ahora bien si a las amplitudes de los movimientos de oscilación de los nodos, w_i^o , las llamamos \hat{w}_i^o , podemos expresar el desplazamiento mediante

$$w_i^o = \hat{w}_i^o \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) \quad (30)$$

Siendo f la frecuencia, t el tiempo y β el ángulo de fase.

Por tanto, podemos poner

$$\begin{aligned} w &= \sum_{\text{nud inter}} \hat{w}_i^0 \phi_i(x, y) \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) \\ \ddot{w} &= - \sum_{\text{nud inter}} f^2 \cdot \hat{w}_i^0 \phi_i(x, y) \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) \end{aligned} \quad (31)$$

Sustituyendo las ecuaciones (28) y (31) en la ecuación (25) tendremos

$$-\sum M_i^0 \cdot \iint_{\text{dom}} \overline{\text{grad} \phi_i} \cdot \overline{\text{grad} V} \cdot dA = \left[-\sum \gamma h \cdot f^2 \cdot \hat{w}_i^0 \iint_{\text{dom}} \phi_i(x, y) \cdot V \cdot dA - \sum \frac{\mu \cdot \gamma h^3}{10(1+\mu)} \cdot f^2 \cdot \hat{w}_i^0 \iint_{\text{dom}} \overline{\text{grad} \phi_i} \cdot \overline{\text{grad} V} \cdot dA \right] \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) \quad (36)$$

O también

$$\sum M_i^0 \cdot \iint_{\text{dom}} \overline{\text{grad} \phi_i} \cdot \overline{\text{grad} V} \cdot dA = \left[\sum \gamma h \iint_{\text{dom}} \phi_i(x, y) \cdot V \cdot dA + \sum \frac{\mu \cdot \gamma h^3}{10(1+\mu)} \iint_{\text{dom}} \overline{\text{grad} \phi_i} \cdot \overline{\text{grad} V} \cdot dA \right] \cdot f^2 \cdot \hat{w}_i^0 \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) \quad (37)$$

siendo las funciones V cualesquiera que cumplan las condiciones de contorno impuestas. En particular podemos tomar sucesivamente para V los valores de $\phi_j(x, y)$, obteniendo

$$\sum M_i^0 \cdot \iint_{\text{dom}} \overline{\text{grad} \phi_i} \cdot \overline{\text{grad} \phi_j} \cdot dA = \left[\sum \gamma h \iint_{\text{dom}} \phi_i(x, y) \cdot \phi_j \cdot dA + \sum \frac{\mu \cdot \gamma h^3}{10(1+\mu)} \iint_{\text{dom}} \overline{\text{grad} \phi_i} \cdot \overline{\text{grad} \phi_j} \cdot dA \right] \cdot f^2 \cdot \hat{w}_i^0 \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) \quad (38)$$

Que constituye un sistema de n ecuaciones en los que intervienen los valores de los coeficientes M_i^0 en los n puntos de la malla y que si llamamos

$$\Psi_{ij} = \iint_{\text{dom}} \overline{\text{grad} \phi_i} \cdot \overline{\text{grad} \phi_j} \cdot dA ; \Phi_{ij} = \iint_{\text{dom}} \phi_i(x, y) \cdot \phi_j \cdot dA \quad (39)$$

escribimos en forma matricial como

$$\Psi \{M_i^0\} = f^2 \cdot \left[\gamma h \cdot \Phi + \frac{\mu \cdot \gamma h^3}{10(1+\mu)} \cdot \Psi \right] \{ \hat{w}_i^0 \} \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) \quad (40)$$

En igual forma para la ecuación elíptica (9) formamos la ecuación integral

$$\iint_{\text{dom}} \Delta w \cdot V \cdot dA = -\frac{1}{D} \cdot \iint_{\text{dom}} M \cdot V \cdot dA + \frac{6\gamma}{5G(1+\mu)} \cdot \iint_{\text{dom}} \ddot{w} \cdot V \cdot dA \quad (41)$$

Que transformamos en igual forma y obtenemos

$$\left[-\sum \hat{w}_i^0 \iint_{\text{dom}} \overline{\text{grad} \phi_i} \cdot \overline{\text{grad} \phi_j} \cdot dA \right] \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) = -\sum \frac{1}{D} \cdot M_i^0 \cdot \iint_{\text{dom}} \phi_i \cdot \phi_j \cdot dA - \frac{6\gamma}{5G(1+\mu)} \cdot f^2 \cdot \left[\sum \hat{w}_i^0 \iint_{\text{dom}} \phi_i \cdot \phi_j \cdot dA \right] \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) \quad (42)$$

Que también escribimos en forma matricial como

$$\Psi \{ \hat{w}_i^0 \} \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) = \frac{1}{D} \cdot \Phi \{ M_i^0 \} + \frac{6\gamma}{5G(1+\mu)} \cdot f^2 \cdot \Phi \{ \hat{w}_i^0 \} \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) \quad (43)$$

Ahora si de la ecuación (40) despejamos $\{M_i^0\}$ tenemos

$$\{M_i^0\} = f^2 \cdot \left[\gamma h \cdot \Psi^{-1} \Phi + \frac{\mu \cdot \gamma h^3}{10(1+\mu)} \cdot I \right] \{ \hat{w}_i^0 \} \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) , \quad (44)$$

en donde I es la matriz unidad. Sustituyendo en la ecuación (43) nos queda

$$\Psi \{ \hat{w}_i^0 \} \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) = \frac{1}{D} \cdot \Phi f^2 \cdot \left[\gamma h \cdot \Psi^{-1} \Phi + \frac{\mu \cdot \gamma h^3}{10(1+\mu)} \cdot I \right] \{ \hat{w}_i^0 \} \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) + \frac{6\gamma}{5G(1+\mu)} \cdot f^2 \cdot \Phi \{ \hat{w}_i^0 \} \cdot \text{sen}(f \cdot t + \beta) \quad (45)$$

de la que obtenemos

$$\Psi \{ \hat{w}_i^0 \} = \frac{1}{D} \cdot \Phi f^2 \cdot \left[\gamma h \cdot \Psi^{-1} \Phi + \frac{\mu \cdot \gamma h^3}{10 \cdot (1 + \mu)} \cdot I \right] \{ \hat{w}_i^0 \} + \frac{6 \cdot \gamma}{5 \cdot G \cdot (1 + \mu)} \cdot f^2 \cdot \Phi \{ \hat{w}_i^0 \} \quad (46)$$

Llamando $\lambda = \frac{1}{f^2}$ en la ecuación (46) podemos expresarla como

$$\lambda \cdot I \{ \hat{w}_i^0 \} = \left[\frac{\gamma h}{D} \cdot \Psi^{-1} \cdot \Phi \cdot \Psi^{-1} \Phi + \frac{(12 + 6\mu - 6\mu^2) \cdot \gamma}{5 \cdot E} \cdot \Psi^{-1} \cdot \Phi \right] \{ \hat{w}_i^0 \} \quad (47)$$

Y si por último llamamos A a la matriz

$$A = \left[\frac{\gamma h}{D} \cdot \Psi^{-1} \cdot \Phi \cdot \Psi^{-1} \Phi + \frac{(12 + 6\mu - 6\mu^2) \cdot \gamma}{5 \cdot E} \cdot \Psi^{-1} \cdot \Phi \right], \quad (48)$$

nos queda el típico problema de autovalores $(A - \lambda \cdot I) \{ \hat{w}_i^0 \} = \Omega$, cuyo polinomio característico nos da las frecuencias naturales.

Debemos tener en cuenta que el sistema que debemos resolver, es muy similar al que se formula mediante el método de los elementos finitos (MEF) mediante la matriz de rigidez K y la matriz de masas M .

En próximos trabajos indagaremos la conexión entre el método de Galerkin y el de los elementos finitos en el estudio de este tipo de problemas.

4.2 Cálculo de los elementos de las matrices Ψ_{ij} y Φ_{ij}

Aunque el borde de la placa puede ser una poligonal cualquiera, para la exposición del proceso y ejemplos de la teoría expuesta, vamos a apoyarnos en el supuesto de una poligonal rectangular.

Supongamos una placa rectangular discretizada según una malla, en cuyos vértices vamos a situar los nodos en los que queremos determinar el valor de las funciones incógnitas. Así mismo suponemos una subdivisión en elementos finitos triangulares. El subdominio de definición de la función en un determinado nodo, lo forman los triángulos adyacentes con un vértice en dicho nodo.

Tomamos funciones de interpolación de primer grado. La definición de las funciones de interpolación ϕ_i y del vector $\text{grad} \bar{\phi}_i$ sobre cada triángulo es la correspondiente a un triángulo plano (ver [figura 3](#)).

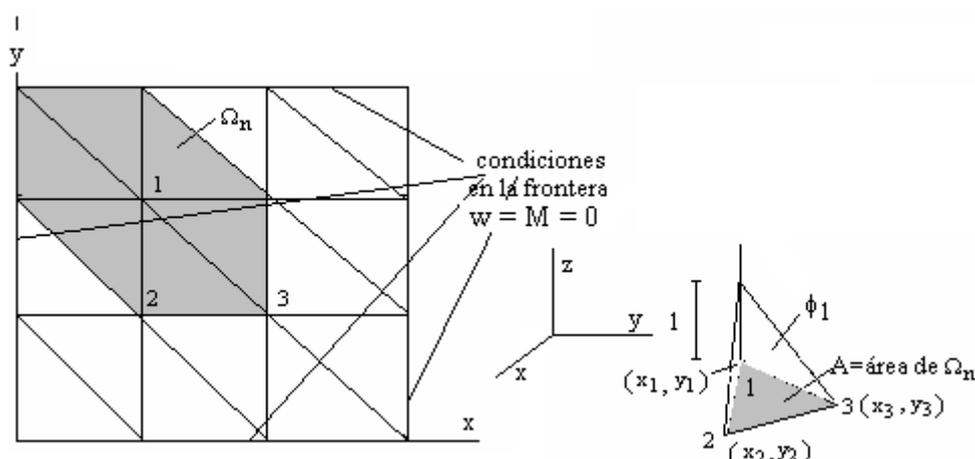


Figura 3. Subdivisión del dominio en elementos triangulares.

Explícitamente tiene el valor,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= p + m \cdot x + n \cdot y \Rightarrow \\ \phi_1 &= (1 \quad x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \quad x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{21} \\ \Psi_{31} \end{pmatrix} \\ \overline{\text{grad}}\phi_1 &= \Psi_{21} \cdot \vec{i} + \Psi_{31} \cdot \vec{j} \end{aligned} \quad (49)$$

Es obvio que planteada la ecuación en los puntos adyacentes a uno de los bordes, dicha función es nula en la frontera.

Como $\phi_i(x, y)$ es nula fuera del subdominio del nodo i , para un término de

$$\int_{\text{dominio}} \overline{\text{grad}}\phi_i \cdot \overline{\text{grad}}\phi_i \cdot dA \quad (50)$$

nos queda

$$\int_{\text{dominio}} \overline{\text{grad}}\phi_i \cdot \overline{\text{grad}}\phi_i \cdot dA = \sum \int_{\Omega_n} \overline{\text{grad}}\phi_i \cdot \overline{\text{grad}}\phi_i \cdot dA \quad (51)$$

En la misma forma, para un término de la forma $\int_{\text{dominio}} \overline{\text{grad}}\phi_i \cdot \overline{\text{grad}}\phi_j \cdot dA$, recordando que $\phi_i(x, y)$ es

nula fuera del subdominio i y $\phi_j(x, y)$ fuera del subdominio j , nos queda

$$\int_{\text{dominio}} \overline{\text{grad}}\phi_i \cdot \overline{\text{grad}}\phi_j \cdot dA = \int_{\text{sbd}_i \cap \text{sbd}_j} \overline{\text{grad}}\phi_i \cdot \overline{\text{grad}}\phi_j \cdot dA \quad (52)$$

Si la intersección de los subdominios es el conjunto vacío, deducimos

$$\int_{\text{dominio}} \overline{\text{grad}}\phi_i \cdot \overline{\text{grad}}\phi_j \cdot dA = 0 \quad (53)$$

Aunque la obtención explícita de los elementos de la matriz Ψ en el caso de sección rectangular es fácil, la forma más cómoda (y extrapolable a otros tipos de formas de secciones) de calcular los elementos de las matrices Ψ y Φ , es acudir a la integración numérica. En ella las integrales son de la forma

$$\iint_A f(L_1, L_2, L_3) dA = \int_0^1 \int_0^{L_1} f(L_1, L_2, L_3) dL_2 = A \cdot \sum H_i f(a_i) \quad (54)$$

siendo A el área, L_1, L_2, L_3 , (ver Figura 4), las coordenadas naturales, H_i coeficientes de peso conocidos y $f(a_i)$ la función f particularizada en los puntos de Gauss (sobre el triángulo).

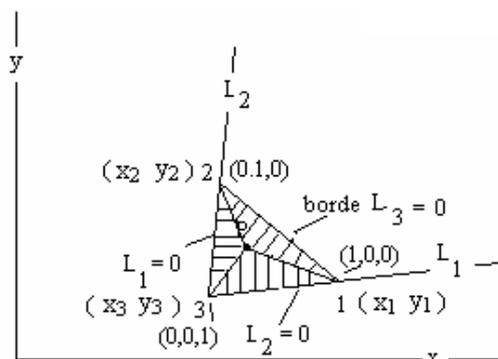


Figura 4. Elemento triangular plano. Coordenadas naturales.

Como es conocido las coordenadas naturales de un punto interior del triángulo P (L_1, L_2, L_3) se definen como el cociente entre el área del triángulo formado por el punto P y el lado opuesto del vértice cuya coordenada estamos definiendo, dividido por el área total del triángulo, Zienkiewicz (2000).

A su vez la relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas naturales es

$$x = L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2 + L_3 \cdot x_3 \quad (55)$$

$$y = L_1 \cdot y_1 + L_2 \cdot y_2 + L_3 \cdot y_3 \quad (56)$$

Con estas últimas se definen cada una de las integrales figuradas en la ecuación (38), cuya integración es inmediata con la ecuación (54). Para que la implementación del problema resulte suficientemente exacta se toma una aproximación de segundo orden, utilizando para ello tres puntos de Gauss [$O(h^3)$].

5 CASOS PRÁCTICOS. ASPECTOS INFORMÁTICOS DE LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA

A continuación vamos a analizar los casos de la determinación de las frecuencias naturales fundamentales de placas apoyadas de planta rectangular y de planta hexagonal.

Para el caso de planta rectangular se fijan el número de subdivisiones deseadas según los ejes x - y , 4 sobre cada eje, con objeto de calcular las coordenadas de los nodos y se enumeran en primer lugar los nodos interiores y a continuación los del contorno, quedando reflejado el proceso sobre la matriz de numeración de nodos (ver Figura 5).

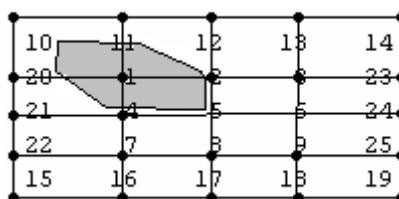


Figura 5: Placa de contorno rectangular. Numeración de nodos.

La conectividad entre nodos así mismo se deduce de la figura 5. Cada nodo interior está conectado siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj según el contorno sombreado indicado, de tal manera que por ejemplo el nodo 1 se conecta con los nodos 2-12-11-20-21-4 y por ejemplo el nodo 9 con los 25-24-6-8-17-18. La conectividad del nudo 1 se almacena en la fila 1 de la matriz de conectividad, que figura a continuación, y la conectividad del nudo 9 en la fila 9.

$$MC = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 11 & 20 & 21 & 4 \\ 3 & 13 & 12 & 1 & 4 & 5 \\ 23 & 14 & 13 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 21 & 22 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 7 & 8 \\ 24 & 23 & 3 & 5 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 4 & 22 & 15 & 16 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 16 & 17 \\ 25 & 24 & 6 & 8 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

Figura 6. Matriz de conexión de los nodos de la placa rectangular de la figura 5.

Para la planta hexagonal se sigue análogo criterio de numeración y subdivisión. A continuación se muestra la localización y numeración de nodos para 3 subdivisiones según el lado y la matriz de conexión (ver Figura 7).

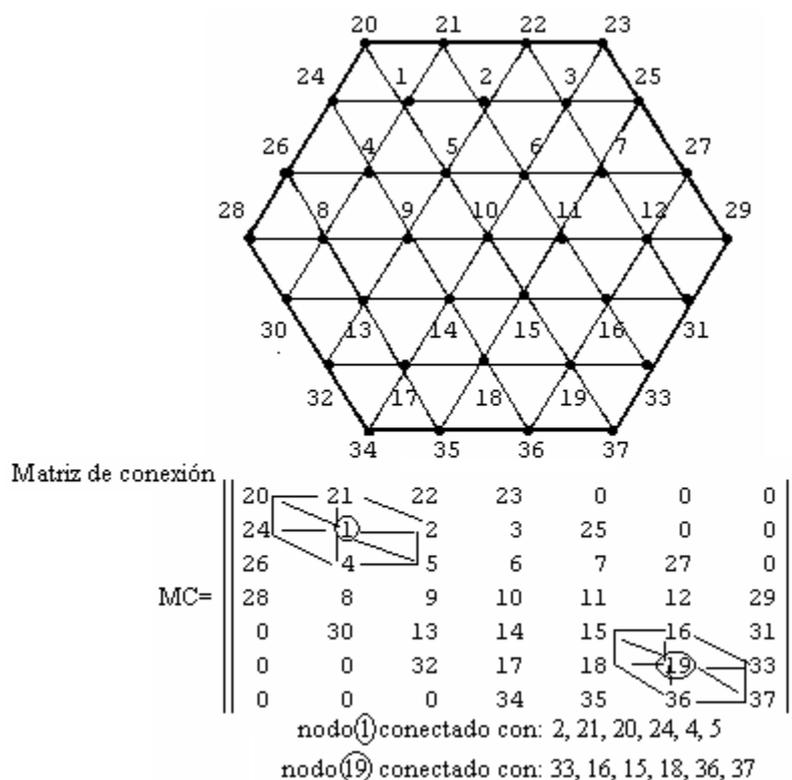


Figura 7. Placa de contorno hexagonal y matriz de conexión de los nodos.

Tenemos que hacer notar que el procedimiento seguido es extrapolable a placas de contorno poligonal arbitrario u otras formas con tal que sea triangulable.

6 CASOS PRÁCTICOS

6.1 Placa cuadrada de 10 m de lado:

Para el siguiente ejemplo hemos considerado una placa rectangular isótropa con densidad=0.2446, módulo de Young $E=2.100.000$, $\mu=0.25$, módulo de rigidez transversal $G=840000$, canto $h=0.25$ m. y constante de rigidez de la placa $D=2916.7$. La solución teórica según la fórmula teórica es $f_{11} = 43.048$ rad/sg. La solución numérica, con 20×20 subdivisiones, para la frecuencia fundamental es de 43,12 rad/sg.

Lo que nos muestra que la solución numérica difiere sólo un 6‰ respecto de la solución teórica.

A continuación presentamos los dos primeros modos de vibración del citado ejemplo, (ver figuras 8 y 9):

- Frecuencia fundamental: 43.3132 rad/sg

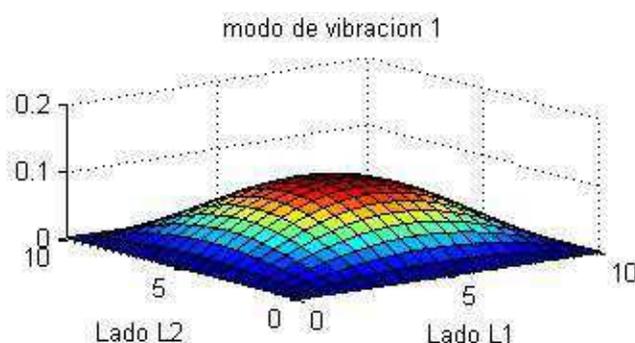


Figura 8: Representación del primer modo de vibración de la placa rectangular ($h=0,25$)

- 2ª frecuencia: 108.52 rad/sg

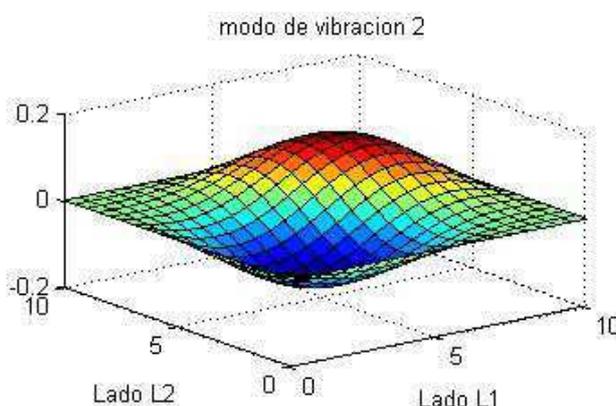


Figura 9: Representación del segundo modo de vibración de la placa rectangular ($h=0,25$)

Para la misma placa cuadrada de 10 m de lado pero con un canto de 1m, $D=186666.67$, con 20×20 subdivisiones, obtenemos que la frecuencia fundamental es de 169,61. La solución teórica según la fórmula deducida de forma teórica es de:

$$f_{11} = \frac{2\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma h}} \frac{1}{\sqrt{1 + 0.466 \frac{\pi^2 h^2}{b^2}}} = 168,80 \quad (57)$$

que nos muestra que la solución numérica difiere sólo un 4 ‰ respecto de la solución teórica. De otro lado apreciamos que la influencia del factor que nos indica la influencia debida al espesor es del 2 %.

$$f_{11} = \frac{2\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma h}} = 173,503 \quad (58)$$

Los valores obtenidos difieren en menos de un 1% de los obtenidos por Leissa para placas delgadas o Liew para placas moderadamente gruesas.

Igualmente presentamos los dos primeros modos de vibración en este caso:

- Frecuencia fundamental: 169.6179 rad/sg

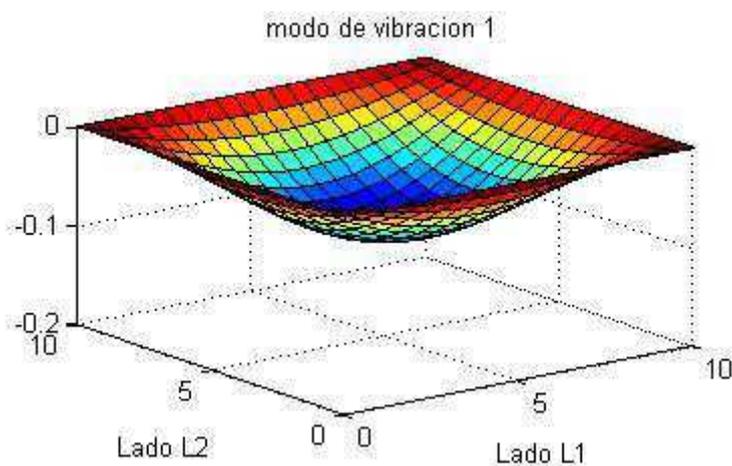


Figura 10: Representación del primer modo de vibración de la placa rectangular (h=1)

- 2ª frecuencia: 412.34 rad/sg

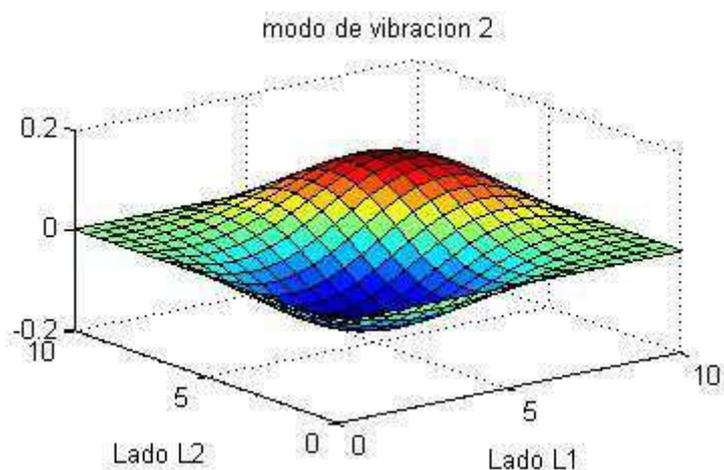


Figura 11: Representación del segundo modo de vibración de la placa rectangular (h=1)

6.2 Placa hexagonal de 10 m de lado:

Para este ejemplo tomamos los mismos datos: Densidad=0.2446, E=2100000, $\mu=0.25$, G=840000, h=0.25, D=2916.7.

La solución numérica, con 20*20 subdivisiones, para la primera frecuencia fundamental es de: 15,16 rad/sg. El valor obtenido es muy parecido al de Leissa: 14,85rad/sg. Para representar el modo de vibración de esta placa hemos optado por presentar una sección de la misma (la diagonal) frente a las amplitudes debido a la complicada geometría deformada:

-Frecuencia fundamental: 15.636 rad/sg.

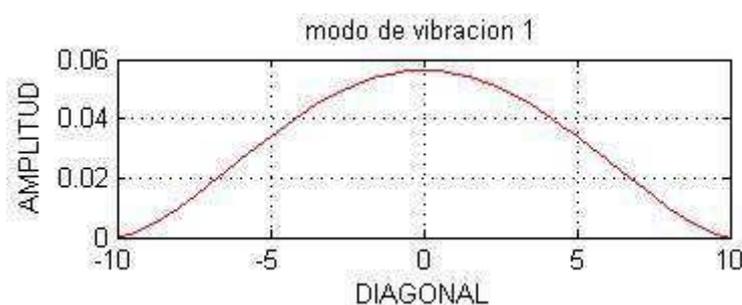


Figura 11. Representación del 1º modo de vibración de placa hexagonal.

La 2ª frecuencia que obtenemos es de 39.6579 rad/sg. y el modo de vibración asociado es:

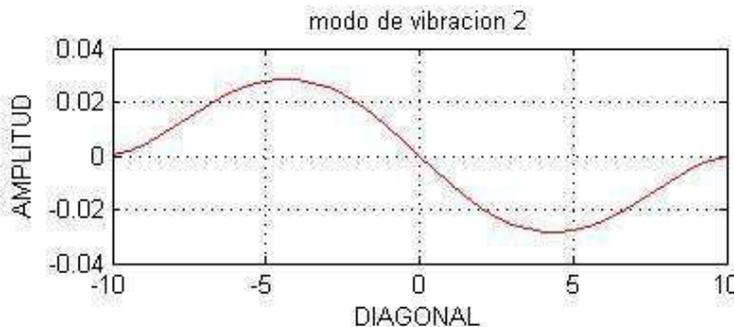


Figura 12. Representación del 2º modo de vibración de placa hexagonal.

Si suponemos que, de forma genérica, la frecuencia fundamental adopta la forma:

$$f_{11} = \frac{k\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma h}} \quad (59)$$

La correlación con la solución numérica nos lleva a encontrar que para la placa hexagonal delgada apoyada de lado L se verifica

$$f_{11} = \frac{0.73 \cdot \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma h}} \quad (60)$$

Si la placa hexagonal es moderadamente gruesa encontramos que las frecuencias fundamentales vienen dadas por

<i>espesor</i>	<i>Frec. Funda.</i>
1,5 m	92,148 rad/sg
2 m	121,168 rad/sg
2,5 m	148,59 rad/sg

Tabla 1. Frecuencias fundamentales obtenidas para distintos espesores de placas hexagonales.

Por lo que podemos encontrar una fórmula análoga a la anterior pero válida para placas moderadamente gruesas que nos represente este 1° modo de vibración,

$$f_{11} = \frac{0.73 \cdot \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma \cdot h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 + 0.12 \cdot \frac{\pi^2 \cdot h^2}{L^2}\right]}} \quad (61)$$

En la misma forma podemos deducir fórmulas prácticas para la determinación de las frecuencias fundamentales de otras placas delgadas apoyadas con plantas regulares: triángulos equiláteros, pentágonos etc.

7 CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos mostrado una metodología para la obtención numérica de las frecuencias naturales y modos de vibración de las oscilaciones transversales en placas moderadamente gruesas de contorno poligonal apoyadas.

Hemos obtenido analíticamente la solución para el caso de estudio de las oscilaciones transversales en placas moderadamente gruesas rectangulares apoyadas, incluso una fórmula sencilla y práctica para la determinación de las frecuencias naturales. La comparación con la solución numérica nos ha permitido establecer la bondad de las soluciones obtenidas.

Así mismo para las placas moderadamente gruesas de contorno hexagonal apoyadas también hemos obtenido fórmulas sencillas y prácticas, para la determinación de las frecuencias naturales en los casos de placa delgada y placa moderadamente gruesa.

BIBLIOGRAFÍA

- Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*. Prentice Hall of India Pvt. Ltd., New Delhi, 1996.
- Bhimaraddi A. and Stevens. L. K., *A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogenous, and laminated rectangular plates*. ASME Journal of Applied Mechanics, 51(1):195–198, 1984.
- Bui Q.T., Nguyen N.T., Nguyen-Dang H., A moving Kriging interpolation-based meshless method for numerical simulation of Kirchhoff plate problems. *Internat J Numer Methods Engrg* 2009;77:1371–95.
- Cheung M.S. and Chan M.Y., *Static and dynamics analysis of thin and thick sectorial plates by the finite strip method*. Computers and Structures, 14(1):79-88, 1981.
- Clough R. W. and Penzien J., *Dynamics of Structures*. Mc Graw-Hill International Editions, second edition, 1993.
- Cupial P., Calculation of the Natural Frequencies of Composite Plates by the Rayleigh–Ritz method with Orthogonal Polynomials. *Journal of Sound and Vibration*, 201: 385–387, 1997.
- Dickinson S.M., Li E.K.H., On the Use of Simply Supported Plate Functions in the Rayleigh–Ritz method Applied to the Vibration of Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*, 80: 292–297, 1982.

- Haberman, R., *Ecuaciones en derivadas parciales con Series de Fourier y problemas de contorno*. Prentice Hall, 2003.
- Kirchhoff G.R., Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen Scheibe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik. Crelle's Journal*, 40: 51-88, 1850.
- Lal R., Gupta U.S. and Reena, Quintic splines in the study of transverse vibrations of non-uniform orthotropic rectangular plates. *Journal Sound Vibration*, 207: 1-13,1997.
- Leissa, A. W., *Vibration of Shells*. Acoustical Society of America. Sewickly, PA. ,1973.
- Liew K.M., Response of plates of arbitrary shape subjected to static loading. *Journal Engineering Mechanics ASCE*,118(9):1783-1794,1992.
- Liew K.M., and Wang C.M., Pb-2 Rayleigh Ritz method for general plate analysis. *Engineering Structures*, 15(1):55-60,1993.
- Liew K.M., and Wang C.M., Vibration of triangular plates: point support, mixed edges and partial internal curved supports. *Journal Sound Vibration*, 172(4):527-537,1994.
- Liew K.M., Xiang,Y. and Kitipornchai,S., Research on thick plate vibration: a literature survey. *Journal of Sound and Vibration*, 180: 163-176,1995.
- Liew K.M., and Liu F.L., Differential quadrature method: a solution technique for Kirchhoff plates of arbitrary shape. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,145(1):1-10,1997.
- Liew K.M., Lim C.W. and Lim M.K., Transverse vibration of trapezoidal plates of variable thickness. *Journal Sound Vibration*, 177(4):479,501, 1994.
- Lin C.H., Jen M.R., Analysis of a Laminated Anisotropic Plates By Chebyshev Collocation Method. *Composites Part B: Engineering*, 36 : 155–169, 2005.
- Martínez J.M. et al., Harmonization of the classical technical theories for thin and moderately thick plates, *Mecánica Computacional* , 3:99- 115, 2011.
- Panc V., *Theories of Elastic Plates*, Noordhoff International Publishing,1975.
- Reddy, J. N., *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC Press, Taylor and Francis, 2007.
- Reissner E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 12: 69-77,1945.
- Reisman H., *Elasticity: Theory and Applications*, Krieger Publishing, 1980.
- Soedel, W., *Vibrations of Shells and Plates*. Marcel Dekker, 1993.
- Tongsuk P., Kanok-Nukulchai W., On the parametric refinement of moving Kriging interpolations for element free Galerkin method. *Computational mechanics WCCM VI in conjunction with APCOM'04*, 2004a.
- Tongsuk P., Kanok-Nukulchai W., Further investigation of element free Galerkin method using moving Kriging interpolation. *Int J Comput Methods* 1: 1–21, 2004b.
- Wang D., Chen JS., Locking-free stabilized conforming nodal integration for meshfree Mindlin–Reissner plate formulation. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 193:1065–83,2004.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, L.R., *El Método de los Elementos Finitos*. McGraw-Hill, 2000.