

ESTUDIO DINAMICO DE LÁMINAS MODERADAMENTE GRUESAS CON FORMA DE PARABOLOIDE ELIPTICO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS 3D

J.M. Martínez Valle ^a, A. Albanesi ^b y V. Fachinotti ^b

^a*Departamento de Mecánica, EPS; Edificio Leonardo da Vinci, Campus de Rabanales, Universidad de Córdoba, 14071, Córdoba, España, jmvalle@uco.es*

^b*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC), Universidad Nacional del Litoral (UNL)/ Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Predio CCT-CONICET Santa Fe, Ruta Nac. 168, Paraje El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina, aalbanes@santafe-conicet.gov.ar, vfachino@intec.unl.edu.ar*

Palabras Clave: Vibraciones, elementos finitos, láminas, paraboloide elíptico.

Resumen. El estudio dinámico de estructuras laminares de doble curvatura es un tema de indudable interés. Entre ellas, existen una gran cantidad de construcciones laminares con forma de paraboloide elíptico, sin embargo, el estudio dinámico de este tipo de construcciones es bastante limitado. La mayoría de los estudios se refieren a láminas con pequeña curvatura y de espesor delgado. En esta comunicación, tras el planteamiento teórico del problema, realizamos el estudio de las frecuencias de vibración de las oscilaciones transversales de láminas moderadamente gruesas mediante elementos finitos tridimensionales. Formulamos una nueva variante del elemento finito de 20 nodos y estudiamos su comportamiento para estudiar este tipo de estructuras en régimen dinámico.

1 INTRODUCCIÓN

Las vibraciones de estructuras laminares es un tema interesante que se ha manifestado en numerosos aspectos de la ingeniería civil y la aeronáutica. Las estructuras laminares tienen la facultad de resistir cargas importantes debido precisamente a su curvatura, que hace que los esfuerzos de membrana, tangentes a la superficie media, se encarguen de aportar la resistencia adicional que las caracteriza frente a otros elementos estructurales planos como las placas. Sin embargo, son estructuras muy sensibles a pequeños cambios en su geometría o condiciones de apoyo, de manera que estos pueden provocar la ruina de la estructura sino han sido estudiados adecuadamente.

Dentro de las estructuras laminares, las de doble curvatura, tales como el paraboloides hiperbólico, el paraboloides elíptico o los paraboloides de 2 hojas, son estructuras significativas en el ámbito de la ingeniería civil. Sin embargo, las soluciones cerradas de las ecuaciones de equilibrio de láminas en un sistema curvilíneo arbitrario teniendo en cuenta la deformación por corte no son posibles obtenerlas de manera general y se ha de acudir a métodos aproximados [Alhazza \(2004\)](#).

En esta comunicación, abordamos al estudio dinámico del paraboloides elíptico. Se trata de una superficie que no puede ser parametrizada según sus líneas principales de curvatura y de la cual no se tienen, a saber por los autores, aportaciones recientes en el campo analítico o mediante métodos aproximados. Es una superficie que se ha utilizado en diversas construcciones en Ingeniería Civil, [Beles \(1976\)](#), y que por tanto reviste un interés práctico importante.

Los tratados de [Leissa \(1993\)](#) o [Soedel \(1993\)](#) son las primeras referencias completas al estudio dinámico de placas y láminas. Estas referencias estudian las soluciones analíticas en casos muy particulares de geometría y estados de carga. Salvo anejos de estos trabajos, no utilizan el Método de los Elementos Finitos (MEF).

El MEF ha sido y es una herramienta muy potente para resolver ecuaciones diferenciales o integrales en el contexto del cálculo estructural [Zienkiewicz \(2000\)](#). El trabajo de [Yang \(2004\)](#) muestra la cantidad de variantes y técnicas que se han desarrollado desde sus inicios allá por los años 60 para mejorar el comportamiento de los distintos elementos. El estudio dinámico de las láminas de doble curvatura reviste especial interés por su compleja geometría, no parametrizable según las líneas de curvatura. Su aproximación mediante el MEF se ha recogido en distintos trabajos como los de [Liew \(1995, 1996\)](#) o [Stavridis \(1988, 1998\)](#). En ellos se utilizan elementos finitos tipo lámina con distintas mejoras para evitar el fenómeno del bloqueo pero las suelen considerar láminas de pendiente suave (shallow shell) y despreciando la deformación por corte.

La reaparición de los elementos finitos tridimensionales en el cálculo estructural es relativamente reciente y quizás venga, en parte, aparejada con la gran potencia de cálculo de los ordenadores actuales. Como ventajas de este tipo de elementos frente a los más usuales tipo lámina, originalmente propuestos por [Ahmad \(1970\)](#), se encuentran la posibilidad de utilizar leyes constitutivas tridimensionales y de no utilizar ninguna hipótesis cinemática en la deducción de las relaciones deformación-desplazamiento donde se suele prescindir en sus desarrollos de unos u otros términos, a veces sin demasiado fundamento, en la mayoría de las teorías de láminas

No obstante, la mayoría de las publicaciones referentes a elementos tridimensionales para el estudio de láminas lo hacen con elementos de 8 nodos. Se han publicado una gran cantidad de estudios que intentan aliviar el bloqueo que sufren este tipo de elementos en su formulación.

Ver por ejemplo el trabajo de [Schwarze \(2009\)](#) el cual posee una descripción interesante de este tipo de elementos.

Nosotros en este trabajo hemos preferido utilizar elementos finitos de alto orden para abordar el problema. Una de las ventajas de los elementos de mayor orden frente a estos, es que la aparición de los distintos bloqueos es mucho menos significativa. De hecho, la mayor eficiencia computacional de los elementos de bajo orden se ve ensombrecida con las innumerables mejoras necesarias para evitar los modos de energía nulos (zero energy modes) ya sea mediante métodos de estabilización, modelos híbridos etc. Concretamente hemos probado el elemento finito de 20 nodos (en su versión dinámica) del cual apenas hemos encontrado referencias en su formulación clásica y la que presentamos en este artículo.

A continuación vamos a plantear las ecuaciones que definen el problema y su aproximación numérica viendo algunos ejemplos de interés.

2 PLANTEAMIENTO TEÓRICO DEL PROBLEMA

En cualquier problema que se pueda plantear, lo deseable es que al mismo podamos encontrar soluciones analíticas. Para ello en un problema estructural, debemos resolver las ecuaciones de equilibrio. En nuestro caso, las ecuaciones *tensoriales* que definen el problema son [Naghdi \(1963\)](#):

$$\tilde{n}^{\alpha\beta} |_{\alpha} - \left(b_{\gamma}^{\beta} m^{\gamma\alpha} \right) |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} q^{\alpha} + p^{\beta} = \rho h \ddot{v}^{\beta} \quad , \rho = 1, 2. \quad (1)$$

$$b_{\alpha\beta} \tilde{n}^{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} b_{\gamma}^{\beta} m^{\gamma\alpha} + q^{\alpha} |_{\alpha} + p^3 = \rho h \ddot{v}_3 \quad (2)$$

$$m^{\alpha\rho} |_{\alpha} - q^{\rho} + c^{\rho} = \rho \frac{h^3}{12} \ddot{w}^{\rho} \quad , \rho = 1, 2. \quad (3)$$

Donde $\tilde{n}^{\alpha\rho}$ son los esfuerzos de membrana efectivos, $b_{\alpha\beta}$ y b_{γ}^{ρ} son las componentes del tensor de curvatura en su forma covariante pura y contra – covariante de la superficie media, q^{α} son los cortantes generalizados, p^{β} son las cargas transversales aplicadas, $m^{\alpha\rho}$ son los esfuerzos de flexión efectivos, v y w son los corrimientos y los giros. La barra vertical indica derivada covariante respecto de una base de vectores tangentes, no necesariamente ortogonales.

Recordemos que la relación entre esfuerzos efectivos y los esfuerzos reales, no necesariamente simétricos, resultantes de las tensiones la realizamos a través del tensor de curvatura. Ver por ejemplo [Itskov \(2009\)](#).

Llegados a este punto, las ecuaciones de equilibrio las podemos expresar o bien en función de los esfuerzos efectivos, tal como las hemos planteado arriba, o bien en función de los esfuerzos reales; los que lo hacen en función de los efectivos es porque éstos son tensores simétricos lo que dentro de la complejidad de estas ecuaciones, facilitaría su resolución. No obstante, como nuestro objetivo es acercarnos a la realidad física del problema, lo haremos en función de los reales.

Físicamente tenemos que tener en cuenta que en una lámina bien diseñada los esfuerzos de flexión deberían ser mínimos comportándose como láminas en estado de membrana, por lo que estas ecuaciones se simplificarían enormemente, pero nosotros vamos a plantearlas incluyendo los esfuerzos de flexión para no perder generalidad en este punto.

Si despreciamos los productos $b_{\gamma}^{\rho} m^{\gamma\alpha}$ y $b_{\alpha\beta} b_{\gamma}^{\beta}$, sin ser las ecuaciones más generales, obtenemos, desarrollando ya las derivadas covariantes, tenemos:

$$N_{,\alpha}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} N^{\alpha\rho} - b_{\alpha}^{\beta} q^{\alpha} + p^{\beta} = \rho h \ddot{v}^{\beta}, \quad (4)$$

$$N^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + q_{,\alpha}^{\alpha} + p = \rho h \ddot{v}_3, \quad (5)$$

$$M_{,\alpha}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} M^{\alpha\beta} - q^{\beta} = \rho \frac{h^3}{12} \ddot{w}^{\beta}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} (N^{\alpha\beta} - b_{\rho}^{\alpha} M^{\rho\beta}) = 0. \quad (7)$$

Si desarrollamos estas ecuaciones:

$$N_{,1}^{11} + N_{,2}^{21} + \Gamma_{11}^1 N^{11} + \Gamma_{22}^1 N^{22} + \Gamma_{12}^1 N^{12} + \Gamma_{21}^1 N^{21} - b_1^1 Q^1 - b_2^1 Q^2 + P^1 = \rho h \ddot{v}^1, \quad (8)$$

$$N_{,1}^{12} + N_{,2}^{22} + \Gamma_{11}^2 N^{11} + \Gamma_{22}^2 N^{22} + \Gamma_{12}^2 N^{12} + \Gamma_{21}^2 N^{21} - b_1^2 Q^1 - b_2^2 Q^2 + P^2 = \rho h \ddot{v}^2, \quad (9)$$

$$N^{11} b_{11} + N^{22} b_{22} + N^{12} b_{12} + N^{21} b_{21} + Q_{,1}^1 + Q_{,2}^2 + P = \rho h \ddot{v}_3, \quad (10)$$

$$M_{,1}^{11} + M_{,2}^{21} + \Gamma_{11}^1 M^{11} + \Gamma_{22}^1 M^{22} + \Gamma_{12}^1 M^{12} + \Gamma_{21}^1 M^{21} - Q^1 = \rho \frac{h^3}{12} \ddot{w}^1, \quad (11)$$

$$M_{,1}^{12} + M_{,2}^{22} + \Gamma_{11}^2 M^{11} + \Gamma_{22}^2 M^{22} + \Gamma_{12}^2 M^{12} + \Gamma_{21}^2 M^{21} - Q^2 = \rho \frac{h^3}{12} \ddot{w}^2. \quad (12)$$

Estas son las ecuaciones desarrolladas del equilibrio de un elemento lámina. La última de las ecuaciones que no hemos desarrollado, es la condición de simetría de los llamados esfuerzos efectivos. Vemos claramente que los esfuerzos generalizados no son simétricos.

Si nosotros quisieramos resolver el problema físico real tendríamos que expresar estas ecuaciones en sus componentes físicas. Para un tensor de 2º orden se cumple que:

$$\mathcal{N}^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{a_{\beta\beta}}{a_{\alpha\alpha}}} N^{\alpha\beta}, \quad (13)$$

siendo $\mathcal{N}^{\alpha\beta}$ las componentes físicas del tensor $N^{\alpha\beta}$. Por lo que tendremos que computar las derivadas de $\sqrt{\frac{a_{\alpha\alpha}}{a_{\beta\beta}}}$ y los propios $\sqrt{\frac{a_{\alpha\alpha}}{a_{\beta\beta}}}$. Para ello necesitamos los parametros geométricos del paraboloide elíptico que desarrollamos en el siguiente apartado :

$$\sqrt{\frac{a^{11}}{a_{11}}} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{1 + 4y^2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)(1 + 4x^2)}} = \Lambda_1, \quad (14)$$

$$\sqrt{\frac{a^{22}}{a_{22}}} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{1 + 4x^2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)(1 + 4y^2)}} = \Lambda_2, \quad (15)$$

$$\sqrt{\frac{a^{11}}{a_{22}}} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{1 + 4y^2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)(1 + 4y^2)}} = \Lambda_3, \quad (16)$$

$$\sqrt{\frac{a^{22}}{a_{11}}} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{1 + 4x^2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)(1 + 4x^2)}} = \Lambda_4. \quad (17)$$

Y las derivadas de $\sqrt{\frac{a^{\alpha\alpha}}{a_{\beta\beta}}}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{a^{11}}{a_{11}}} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{1+4y^2}{(1+4x^2+4y^2)(1+4x^2)}} = \Phi_1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{a^{22}}{a_{22}}} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{1+4x^2}{(1+4x^2+4y^2)(1+4y^2)}} = \Phi_2, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{a^{11}}{a_{22}}} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{1+4y^2}{(1+4x^2+4y^2)(1+4y^2)}} = \Phi_3, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{a^{22}}{a_{11}}} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{1+4x^2}{(1+4x^2+4y^2)(1+4x^2)}} = \Phi_4. \quad (21)$$

Las derivadas de estas funciones son largas y pueden ser calculadas de una manera rápida con un programa tipo Matlab, por lo que las expondremos de manera simbólica mediante las funciones $\{\Phi_i\}$:

$$\Lambda_1 \mathcal{N}_{,1}^{11} + \Phi_1 \mathcal{N}^{11} + \Lambda_4 \mathcal{N}_{,2}^{21} + \Phi_4 \mathcal{N}^{21} + \Lambda_1 \Gamma_{11}^1 \mathcal{N}^{11} + \Lambda_2 \Gamma_{22}^1 \mathcal{N}^{22} + \Lambda_3 \Gamma_{12}^1 \mathcal{N}^{12} + \Lambda_4 \Gamma_{21}^1 \mathcal{N}^{21} - b_1^1 Q^1 - b_2^2 Q^2 + P^1 = \rho h \dot{v}^1, \quad (22)$$

$$\Lambda_3 \mathcal{N}_{,1}^{12} + \Phi_2 \mathcal{N}_{,2}^{22} + \Lambda_1 \Gamma_{11}^2 \mathcal{N}^{11} + \Lambda_2 \Gamma_{22}^2 \mathcal{N}^{22} + \Lambda_3 \Gamma_{12}^2 \mathcal{N}^{12} + \Lambda_4 \Gamma_{21}^2 \mathcal{N}^{21} - b_1^2 Q^1 - b_2^2 Q^2 + P^2 = \rho h \dot{v}^2, \quad (23)$$

$$\Lambda_1 \mathcal{N}^{11} b_{11} + \Lambda_2 \mathcal{N}^{22} b_{22} + \Lambda_3 \mathcal{N}^{12} b_{12} + \Lambda_4 \mathcal{N}^{21} b_{21} + Q_1^1 + Q_2^2 + P = \rho h \dot{v}_3, \quad (24)$$

$$\Lambda_1 \mathcal{M}_{,1}^{11} + \Phi_1 \mathcal{M}^{11} + \Phi_4 \mathcal{M}^{21} + \Lambda_4 \mathcal{M}_{,2}^{21} + \Lambda_1 \Gamma_{11}^1 \mathcal{M}^{11} + \Lambda_2 \Gamma_{22}^1 \mathcal{M}^{22} + \Lambda_3 \Gamma_{12}^1 \mathcal{M}^{12} + \Lambda_4 \Gamma_{21}^1 \mathcal{M}^{21} - Q^1 = \rho \frac{h^3}{12} \ddot{w}^1, \quad (25)$$

$$\Phi_3 \mathcal{M}_{,1}^{12} + \Lambda_3 \mathcal{M}_{,1}^{12} + \Lambda_2 \mathcal{M}_{,2}^{22} + \Phi_2 \mathcal{M}^{22} + \Lambda_1 \Gamma_{11}^2 \mathcal{M}^{11} + \Lambda_2 \Gamma_{22}^2 \mathcal{M}^{22} + \Lambda_3 \Gamma_{12}^2 \mathcal{M}^{12} + \Lambda_4 \Gamma_{21}^2 \mathcal{M}^{21} - Q^2 = \rho \frac{h^3}{12} \ddot{w}^2. \quad (26)$$

Los coeficientes del tensor de curvatura y demás vienen desarrollados en el siguiente apartado, pero no se han susstituido para no sobregargar las ecuaciones.

Notemos que tenemos un sistema de 5 ecuaciones pero 8 incognitas, por lo que debemos recalcar que el estudio del equilibrio de un elemento lámina donde intervengan los esfuerzos de flexión, es un problema hiperestático no resoluble mediante las ecuaciones de la estática.

Debemos acudir a las relaciones constitutivas para plantear estas ecuaciones en desplazamientos y establecer las ecuaciones de compatibilidad correspondientes.

El sistema final obtenido es un sistema de 8 ecuaciones con 8 incognitas en derivadas parciales con un alto grado de no linealidad y por lo tanto no resoluble mediante técnicas elementales. En una próxima publicación, estudiaremos la viabilidad del método de las diferencias finitas.

3 GEOMETRÍA DEL PARABOLOIDE ELÍPTICO

En este apartado desarrollamos la geometría del paraboloido elíptico. Para una explicación más detallada de cómo se han obtenido cada uno de las ecuaciones, el lector puede acudir a excelentes textos como por ejemplo el de [Itskov \(2009\)](#).

En un sistema cartesiano, la ecuación del paraboloido elíptico es:

$$z = x^2 + y^2. \quad (27)$$

Los tensores métricos en su forma covariante y contravariante son:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 + 4x^2 & 4xy \\ 4xy & 1 + 4y^2 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$a^{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta})^{-1} = \frac{1}{1 + 4x^2 + 4y^2} \begin{pmatrix} 1 + 4y^2 & -4xy \\ -4xy & 1 + 4x^2 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Los símbolos de Christoffel de segunda especie no nulos son:

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^1 = 4x \frac{1}{1 + 4x^2 + 4y^2} \quad (30)$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^2 = 4y \frac{1}{1 + 4x^2 + 4y^2}. \quad (31)$$

donde α varía entre 1 y 2.

Por último necesitamos el tensor de curvatura en su forma covariante y contra covariante:

$$b_{\alpha\beta} = 2 \sqrt{\frac{1}{1 + 4x^2 + 4y^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$b_{\beta}^{\alpha} = 2 \left(\frac{1}{1 + 4x^2 + 4y^2} \right)^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 + 4y^2 & -4xy \\ -4xy & 1 + 4x^2 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

4 FORMULACION DEL PROBLEMA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS TRIDIMENSIONALES

Por las razones enunciadas en los antecedentes hemos escogido el elemento finito serendípito de 20 nodos para el estudio dinámico del paraboloido elíptico. Para definir las funciones de forma, usamos la formulación isoparamétrica, en un sistema de coordenadas con origen en el centro del elemento (ver [Figura 1](#)).

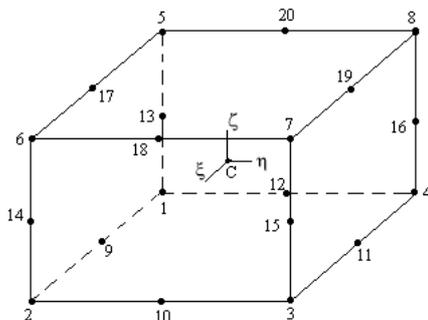


Figura 1. Elemento finito de 20 nodos.

En una forma compacta podemos escribir estas ecuaciones en la forma, de sobra conocidas:

$$N_j = \frac{1}{8}(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta)(1 + \zeta_j \zeta)(\xi_j \xi + \eta_j \eta + \zeta_j \zeta - 2), \quad (34)$$

para los nodos de los vertices del hexaedro, $j=1, \dots, 8$

$$N_j = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_j \eta)(1 + \zeta_j \zeta), \quad (35)$$

para los nodos de la mitad de los lados, $j=10, 12, 14, 16$.

$$N_j = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_j \xi)(1 + \zeta_j \zeta), \quad (36)$$

para los nodos de la mitad de los lados, $j=9, 11, 13, 15$.

$$N_j = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta), \quad (37)$$

para los nodos de la mitad de los lados $j=17, 18, 19, 20$.

Las coordenadas dentro del elemento, en función de las funciones de forma las podemos escribir:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{20} N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^{20} N_i y_i \\ z &= \sum_{i=1}^{20} N_i z_i \end{aligned} \quad (38)$$

Donde (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas de los 20 nodos del elemento. En el MEF, tenemos al menos dos sistemas de coordenadas: uno nuestro sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) y otro el sistema isoparamétrico (ξ, η, ζ) . Vamos a exponer como operar entre los dos sistemas.

Consideremos una cierta cantidad física ϕ , de manera que $\phi = \phi(x, y, z)$. Si utilizamos las coordenadas isoparamétricas, lo podemos escribir como

$$\phi = \phi(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)). \quad (39)$$

Dentro de nuestro elemento de 20 nodos, nuestro campo ϕ , lo podemos interpolar a través de las funciones de forma y sus valores en los nodos $\{\phi_e\} = \{\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_{20}\}^T$, de la forma:

$$\phi = (N_1, N_2 \dots, N_{20})(\phi_e) \quad (40)$$

o también

$$\phi = \sum_{i=1}^{20} N_i \phi_i. \quad (41)$$

Las derivadas de nuestro campo ϕ , las necesitaremos en cálculos posteriores y las podemos escribir en la forma:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & \dots & N_{20,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & \dots & N_{20,y} \\ N_{1,z} & N_{2,z} & \dots & N_{20,z} \end{Bmatrix} \{\phi_e\}, \quad (42)$$

donde

$$\phi_{,x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad N_{1,x} = \frac{\partial N_1}{\partial x}, \quad (43)$$

y así sucesivamente.

Como nuestras funciones de forma las hemos definido en función de las coordenadas isoparamétricas, las derivadas anteriores no se obtienen de manera inmediata. Expresemos primeramente las derivadas de ϕ , respecto de las coordenadas naturales. En forma matricial tenemos:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \\ \phi_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \dots & N_{20,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \dots & N_{20,\eta} \\ N_{1,\zeta} & N_{2,\zeta} & \dots & N_{20,\zeta} \end{Bmatrix} \{\phi_e\}. \quad (44)$$

Aplicando la regla de la cadena, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (45)$$

o en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \\ \phi_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \{\mathbf{J}\} \begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Donde $\{\mathbf{J}\}$ es llamada la matriz jacobiana y su expresión es:

$$\{\mathbf{J}\} = \begin{Bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{Bmatrix}, \quad (47)$$

relación que nos dice que las derivadas de una cierta cantidad física respecto de dos sistemas de coordenadas se relacionan a través de la matriz jacobiana.

5 MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO DE 20 NODOS PARA EL ESTUDIO DE ESTRUCTURAS LAMINARES. FORMULACIÓN CLÁSICA

Para resolver el problema dinámico tenemos que encontrar la expresión de la matriz de rigidez y de la matriz de masas.

Matricialmente tenemos que resolver:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0, \quad (48)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura y \mathbf{M} la matriz de masas.

La matriz de rigidez $[\mathbf{k}_e]$ del elemento en coordenadas locales la podemos expresarla como:

$$[\mathbf{k}_e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta, \quad (49)$$

donde la matriz \mathbf{B} es la relación entre deformaciones y desplazamientos. $\det[\mathbf{J}]$ es el determinante de la matriz jacobiana y \mathbf{D} es la matriz constitutiva. A continuación vamos a desarrollar un poco más cada una de estas entidades.

La relación entre deformaciones $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$ y desplazamientos en la elasticidad tridimensional es:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (50)$$

O bien, en la forma:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Nosotros necesitamos expresar las derivadas de los corrimientos respecto de las coordenadas isoparamétricas. Para ello necesariamente, tenemos que expresarlo a través de las componentes de la matriz jacobiana.

La relación entre las derivadas de los corrimientos respecto del sistema cartesiano y respecto de la base isoparamétrica:

$$\begin{pmatrix} u,x \\ u,y \\ u,z \\ v,x \\ v,y \\ v,z \\ w,x \\ w,y \\ w,z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u,\xi \\ u,\eta \\ u,\zeta \\ v,\xi \\ v,\eta \\ v,\zeta \\ w,\xi \\ w,\eta \\ w,\zeta \end{pmatrix}, \quad (52)$$

donde Γ_{ij} son las componentes de la matriz inversa jacobiana.

Una expresión más explícita de nuestra matriz B es por tanto:

$$\{\mathbf{B}\} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\eta} & 0 & 0 \\ N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & 0 & \dots & N_{20,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & \dots & 0 & N_{20,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\eta} \\ 0 & 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & \dots & 0 & 0 & N_{20,\zeta} \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$= \begin{pmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & \dots & N_{20,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & \dots & 0 & N_{20,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & \dots & 0 & 0 & N_{20,z} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & N_{2,y} & N_{2,x} & 0 & \dots & N_{20,y} & N_{20,x} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} & 0 & N_{2,z} & N_{2,y} & \dots & 0 & N_{20,z} & N_{20,y} \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} & N_{2,z} & 0 & N_{2,x} & \dots & N_{20,z} & 0 & N_{20,x} \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana la podemos escribir:

$$\{\mathbf{J}\} = \sum_{i=1}^{20} \begin{pmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} y_i & N_{i,\xi} z_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} y_i & N_{i,\eta} z_i \\ N_{i,\zeta} x_i & N_{i,\zeta} y_i & N_{i,\zeta} z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \dots & N_{20,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \dots & N_{20,\eta} \\ N_{1,\zeta} & N_{2,\zeta} & \dots & N_{20,\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & y_{20} & z_{20} \end{pmatrix}, \quad (54)$$

donde (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas de los 20 nodos del elemento.

En este punto, ya podemos calcular sin dificultad la matriz de rigidez del elemento y mediante el proceso de ensamblaje obtener la matriz de rigidez global del sistema $[\mathbf{K}]$. Este es el método en desplazamientos puros donde las únicas variables a interpolar son los desplazamientos. Como ya hemos comentado, esta forma de abordar el problema lleva al conocido inconveniente del bloqueo de la matriz de rigidez, pero ese tema lo abordaremos con más detalle un poco más adelante.

6 MATRIZ DE MASAS DEL ELEMENTO DE 20 NODOS. MATRIZ CONSISTENTE Y CONCENTRADA.

Para estudiar las frecuencias transversales del elemento estructural en cuestión por el método de los elementos finitos, debemos desarrollar la matriz de masas del elemento. Cuando tomamos las mismas funciones de forma para la interpolación de la geometría que para

discretizar la energía cinética, tenemos la denominada matriz de masas consistente del elemento

$$m_e = \int_V \rho N^T N dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho N^T N \det[J] dV. \quad (55)$$

Si desarrollamos esta expresión, encontramos:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho abc N_i N_j d\xi d\eta d\zeta = \\ &\rho abc \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{pmatrix} d\xi d\eta d\zeta = \\ &\rho abc \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} N_i N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_i N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{pmatrix} d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (56)$$

Con lo que la matriz de masas consistente (local) para nuestro elemento de 20 nodos es:

$$m_e = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & \dots & m_{120} \\ & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & \dots & m_{220} \\ & & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} & \dots & m_{320} \\ & & & m_{44} & m_{45} & m_{46} & \dots & m_{420} \\ & & & & m_{55} & m_{56} & \dots & m_{520} \\ & & & & & m_{66} & \dots & m_{620} \\ & & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & & m_{2020} \end{pmatrix} \quad (57)$$

Otra posibilidad al respecto es construir la matriz de masas concentrada. Esta matriz de masas es tradicionalmente menos efectiva que la matriz de masas consistente pero más eficiente al ser una matriz cuadrada diagonal. Se trata de concentrar la masa del elemento uniformemente en los nodos del mismo.

$$m_{ij} = \frac{\rho abc}{20} (i = j), \quad (58)$$

siendo a,b y c las dimensiones del elemento finito.

Nosotros hemos optado por una distribución más racional de las masas en los nodos teniendo en cuenta la geometría del elemento y la distribución de los nodos en el mismo.

Si L_ξ , L_η y L_ζ son las dimensiones del elemento según las coordenadas isoparamétricas del elemento, la asignación de superficies y longitudes para el cálculo de volúmenes y masas asociadas a los nudos del elemento se pueden deducir teniendo en cuenta las figuras siguientes:

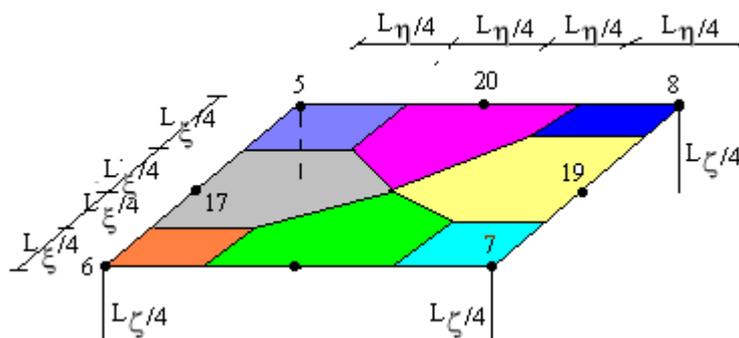


Figura 2. Distribución de áreas en las capas superior e inferior del elemento de 20 nodos

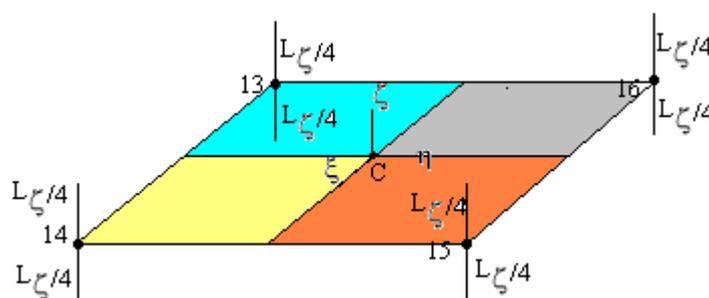


Figura 3: Distribución de áreas en la superficie media del elemento de 20 nodos.

De manera que la distribución de las masas en los nodos no es uniforme sino que se realiza teniendo en cuenta consideraciones geométricas y de simetría de la contribución de cada nodo a la matriz de masas del elemento.

En este punto, ya podemos resolver nuestra ecuación de partida:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (59)$$

Esta es la formulación clásica del elemento de 20 nodos. Los resultados obtenidos para las vibraciones del paraboloides hiperbólico, que es uno de los ejemplos que hemos tomado, son bastante buenos tal como pueden verse en los resultados, sin embargo hemos probado otra opción conceptualmente, en nuestra opinión, más rigurosa que exponemos en los siguientes epígrafes.

7 MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO DE 20 NODOS EN EL SISTEMA CURVILÍNEO TANGENTE A LA SUPERFICIE MEDIA.

En la formulación clásica del elemento finito, la curvatura de la lámina la expresamos a través de las coordenadas de los nodos de los elementos; pero sin definir un sistema de ejes intrínsecos a la superficie media de la propia lámina. En nuestra opinión, para poder trabajar con láminas de gran curvatura necesitamos definir un sistema de vectores tangentes a la superficie media y así encontrar la normal a la misma en todo punto.

A diferencia del planteamiento anterior, nosotros optamos por un sistema curvilíneo (ver Figura 4) para poder ubicar adecuadamente los elementos en el espesor de la lámina y así poder integrar adecuadamente en el espesor independientemente de las curvaturas del mismo.

Un primer paso que debemos tener presente es recordar la expresión de las deformaciones en un sistema curvilíneo.

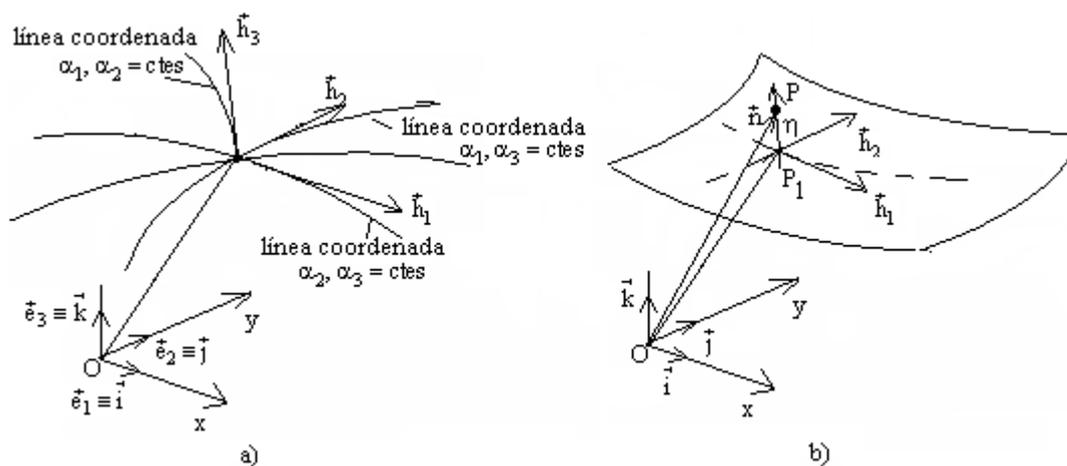


Figura4: Sistema de Referencia intrínseco a la lámina en la superficie media.

Las expresiones que relacionan deformaciones y desplazamientos en coordenadas curvilíneas son [Rekach \(1978\)](#):

$$\varepsilon_{\alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \frac{v_n}{\sqrt{g_{nn}g_{ii}}} \frac{\partial \sqrt{g_{ii}}}{\partial \alpha_n}$$

$$\gamma_{ij} = \sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{jj}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \sqrt{\frac{g_{jj}}{g_{ii}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{v_j}{\sqrt{g_{jj}}} \right), \quad (60)$$

donde ε_{α_i} son las deformaciones longitudinales, γ_{ij} son los deslizamientos, g_{ij} son las componentes del tensor métrico del espacio laminar, α_i son las coordenadas intrínsecas de la superficie y v_i son los corrimientos. Estas expresiones escritas en forma indicial, están escrita ya en componentes físicas por lo que podemos interpolar directamente los desplazamientos. Si las desarrollamos completamente tenemos:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{\sqrt{g_{33}g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \alpha_3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3}{\sqrt{g_{33}g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \alpha_3}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} + \frac{u_1}{\sqrt{g_{11}g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{\sqrt{g_{22}g_{33}}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \alpha_2} \quad (61)$$

$$\gamma_{12} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right)$$

$$\gamma_{13} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{u_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \sqrt{\frac{g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_3}{\sqrt{g_{33}}} \right)$$

$$\gamma_{23} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{u_2}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \sqrt{\frac{g_{33}}{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_3}{\sqrt{g_{33}}} \right).$$

A la hora de plantear el MEF en coordenadas curvilíneas, nos interesa escribir estas ecuaciones, en la medida de lo posible, en forma matricial para desplazamientos y deformaciones. Aquí vamos a hacer la aproximación consistente en asimilar las componentes del tensor métrico del espacio laminar g_{ij} al de la superficie media a_{ij} . Por lo que los elementos a_{ij} toman la forma descrita en la ecuación (28). Escribimos pues,

$$\{\varepsilon^o\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1^o \\ \varepsilon_2^o \\ \varepsilon_3^o \\ \gamma_{12}^o \\ \gamma_{23}^o \\ \gamma_{13}^o \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{\sqrt{a_{33}a_{11}}} \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial \alpha_3} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial \alpha_3} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} + \frac{u_1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \frac{\partial \sqrt{a_{33}}}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{33}}}{\partial \alpha_2} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{u_1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{u_2}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial \alpha_1} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3} - \frac{u_2}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - \frac{u_3}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{33}}}{\partial \alpha_2} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} - \frac{u_1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - \frac{u_3}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \frac{\partial \sqrt{a_{33}}}{\partial \alpha_1} \end{array} \right\} \quad (62)$$

Esta expresión la podemos escribir de una forma más ceñida:

$$\{\varepsilon^o\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial \alpha_1} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial \sqrt{a_{33}}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \sqrt{a_{33}}}{\partial \alpha_2} & 0 \\ -\frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial \alpha_2} & -\frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial \alpha_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{a_{33}a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial \alpha_3} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial \alpha_3} & 0 & 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{array} \right\} \quad (63)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{,\alpha_1}^1 \\ u_{,\alpha_2}^1 \\ u_{,\alpha_3}^1 \\ u_{,\alpha_1}^2 \\ u_{,\alpha_2}^2 \\ u_{,\alpha_3}^2 \\ u_{,\alpha_1}^3 \\ u_{,\alpha_2}^3 \\ u_{,\alpha_3}^3 \end{pmatrix}$$

Donde los corrimientos los discretizamos, como es habitual, mediante nuestras funciones de forma N_i .

Llegados a este punto tenemos que hacer notar que ahora tenemos tres sistemas de referencia distintos. El sistema de referencia cartesiano $\{x \ y \ z\}$, el sistema de referencia isoparamétrico $\{\xi \ \eta \ \zeta\}$ y el sistema de referencia tangente a la superficie media $\{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3\}$.

En este caso, para evaluar

$$[\mathbf{k}_e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta \quad (64)$$

Tenemos que tener en cuenta que $[\mathbf{B}]$ es función de $\{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3\}$ por lo que necesitamos 2 cambios de sistema de referencia:

$$\{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3\} \rightarrow \{\xi \ \eta \ \zeta\} \quad (65)$$

$$\{\xi \ \eta \ \zeta\} \rightarrow \{x \ y \ z\} \quad (66)$$

La matriz D es la usual de la elasticidad tridimensional.

Para el cálculo de la matriz de masas hemos seguido el mismo procedimiento descrito anteriormente.

8 BLOQUEO POR CORTE, MEMBRANAL, VOLUMETRICO Y DE CURVATURA

Es conocido que el MEF, al tratarse de un método numérico, adolece de una serie de defectos que empobrecen la solución obtenida. La rigidización de la matriz de rigidez para espesores delgados (bloqueo de cortante), es bien conocida para elementos lámina. El bloqueo membranar que aparece para elementos con curvatura también se agudiza para espesores de lámina delgados. En los elementos finitos tridimensionales aparecen además dos tipos de bloqueo más de la matriz de rigidez.

Por un lado el bloqueo de curvatura que se manifiesta con más intensidad para mallas distorsionadas y el bloqueo volumétrico que aparece para procesos cercanos a la incompresibilidad.

- Bloqueo por cortante y de membrana: Predominante en los elementos de bajo orden, nuestro elemento muestra buen comportamiento para espesores de lámina delgados; bastante mejor que el homólogo de 8 nodos en sus innumerables versiones.
- Bloqueo de curvatura: Se agudiza para mallas distorsionadas. Optando por un sistema de referencia intrínseco a la superficie de referencia de la lámina se mejora este aspecto en la formulación del elemento.
- Un estudio detallado de estos problemas donde exponen distintas técnicas para evitar el bloqueo (en el elemento finito de 8 nodos) y adaptables al elemento de 20 nodos lo podemos encontrar en los trabajos de [Hauptmann \(1998\)](#), [Alves de Sousa \(2006\)](#) o [Schwarze \(2009\)](#).

9 RESULTADOS OBTENIDOS

Lo primero que tenemos que advertir es que mientras para un análisis estático las soluciones obtenidas en cuanto a corrimientos es bastante similar en ambos casos, en el análisis dinámico, las frecuencias obtenidas en los primeros modos de vibración varían de manera apreciable sobre todo cuando las curvaturas aumentan.

Para probar la bondad de nuestro trabajo hemos probado previamente las dos versiones del elemento con el paraboloides hiperbólico del cual se conocen soluciones acorde a los trabajos de [Narita y Leissa \(1984\)](#) y [Chakravorty \(1995 a,b\)](#) pero que utilizaron elementos tipo lámina. El test del paraboloides hiperbólico es bastante exigente tanto por el tipo de superficie (doble curvatura) como por las condiciones de sustentación.

Los datos que hemos utilizado para el ejemplo son: Paraboloides hiperbólico de bordes curvos de planta cuadrada de 1*1 m de lado, espesor constante de 0.01 m, radios de curvatura iguales y de signo contrario de valor $R=2$ m y 1 metro de flecha en las parábolas de los bordes, $E=10.92 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, coeficiente de Poisson 0.30, densidad $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$, sometida a una carga uniformemente distribuida de 20 kN/m^2 y articulado fijo en las cuatro esquinas. En todos los casos hemos utilizado la matriz de masas concentrada propuesta por los autores.

La frecuencia asociada al primer modo de vibración del paraboloides hiperbólico según la formulación clásica es de 17, 53rad/s. Los resultados obtenidos por los autores antes nombrados son:

- Narita-Leissa: 17.16 rad/s
- Chakravorty : 17.25 rad/s

Los corrimientos asociados al primer modo de vibración son (ver [Figura 5](#)):

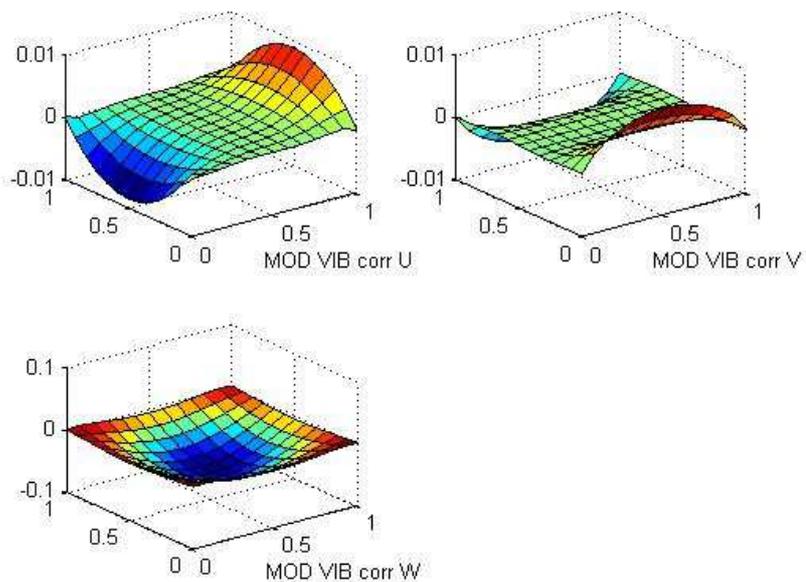


Figura 5: Corrimientos asociados al primer modo de vibración del Paraboloide Hiperbólico. Formulación clásica.

Si utilizamos la formulación alternativa presente en este artículo tenemos que la frecuencia asociada al primer modo de vibración es de 17,05rad/s y los corrimientos asociados al primer modo de vibración son en este caso (únicamente hemos cambiado la vista de la lámina, ver Figura 6):

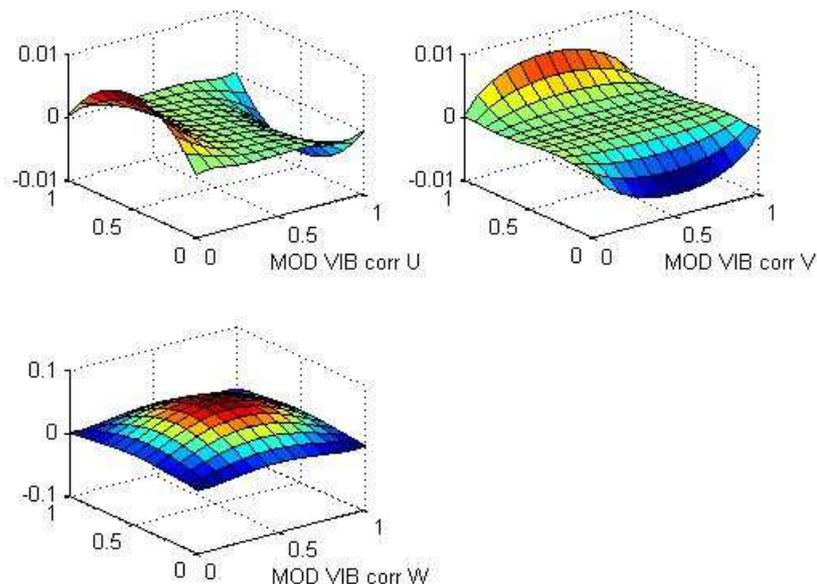


Figura 6: Corrimientos asociados al primer modo de vibración del Paraboloide Hiperbólico. Formulación en coordenadas curvilíneas.

Vistos los resultados, la eficiencia de ambos elementos es bastante alta (menos de un 1% de error) en ambos casos. También hemos probado la matriz de masas consistente. Los errores obtenidos respecto de las soluciones de Narita y Leissa o Chakravorty rondan el 3%.

Paraboloide elíptico de planta cuadrada de 10*10 m de lado con 2,5m de flecha en las parábolas de los bordes, espesor constante de 0.08 m, $E=21000000 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson 0.30, peso específico $\rho = 24 \text{ kN/m}^3$, sometida a una carga uniformemente distribuida de 20 kN/m^2 y condiciones mixtas de apoyo en sus bordes.

En este caso, nos fijamos que las curvaturas son mucho mayores que en el ejemplo anterior y que el utilizar la versión clásica del elemento o la propuesta por los autores hace variar la solución.

A continuación presentamos los corrimientos u , v y w asociados al primer modo de vibración mediante la formulación clásica del elemento y matriz concentrada propuesta por los autores (ver Figura 7):

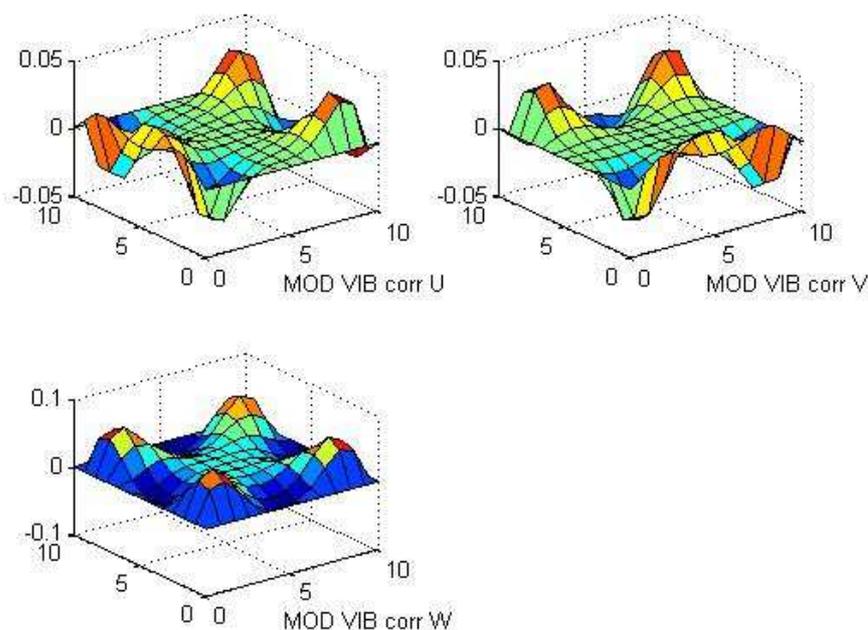


Figura 7: Representación gráfica del 1º modo de vibración. Formulación clásica

El primer modo de vibración tiene asignada una frecuencia de 353.8396 rad/s. Los valores de las 5 primeras frecuencias fundamentales son, en este caso:

353.8396 rad/s, 364.0470 rad/s, 364.0471 rad/s, 373.1142 rad/s, 390.0157 rad/s.

Si tenemos en cuenta la formulación del elemento adoptando el sistema curvilíneo tangente a la superficie media los corrimientos asociados al primer modo de vibración se muestran en la siguiente figura (ver Figura 8).

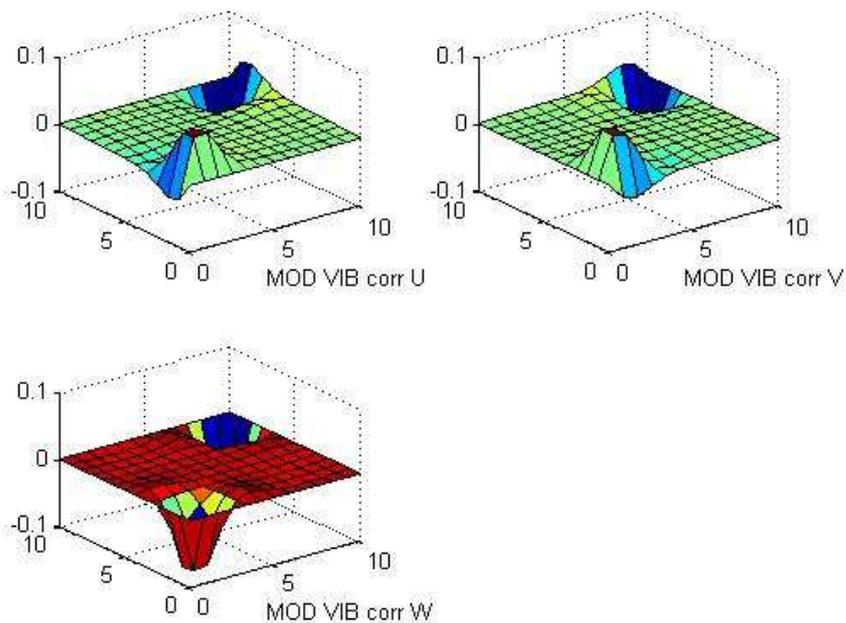


Figura 8: Representación gráfica del 1° modo de vibración. Formulación Propuesta.

Vemos que en este caso las diferencias son bastante mayores. Las frecuencias obtenidas en este caso son:

310.9571 rad/s , 311.3424 rad/s , 324.4821 rad/s , 324.6731 rad/s , 380.4881 rad/s.

Como vemos, las diferencias en los primeros modos de vibración son significativas. Debido a la escasez de resultados respecto esta superficie necesitamos seguir trabajando en el tema y comparar en futuros trabajos los resultados obtenidos con otros tipos de elementos finitos.

10 CONCLUSIONES

Hemos obtenido las frecuencias de vibración para el paraboloido elíptico y hemos representado los corrimientos asociados al primer modo de vibración (que no hemos encontrado en la literatura existente). Para ello hemos utilizado tanto la formulación clásica del elemento de 20 nodos como otra considerando las relaciones deformación-desplazamiento en un sistema curvilíneo tangente a la superficie media de la lámina (con objeto de mejorar su comportamiento frente al bloqueo de curvatura y poder integrar adecuadamente en el espesor). Hemos optado por la formulación de la matriz de masas concentrada pero teniendo en cuenta la geometría del elemento y la contribución de cada nodo, teniendo en cuenta consideraciones de simetría y la propia geometría del elemento, comparándolo con la matriz de masas consistente.

Como trabajos futuros podemos citar:

- Extensión del problema al comportamiento no lineal geométrico y constitutivo.
- Estudiar más en profundidad las ecuaciones de equilibrio que se han planteado en los primeros epígrafes. Se hace demasiada incidencia en los métodos de elementos finitos pero quizá sería interesante, dada la potencia actual de los ordenadores, estudiar un método potente mediante diferencias finitas para resolver estas ecuaciones.

- El elemento finito de 20 nodos y su aplicación a estructuras laminares ha sido poco estudiado, en conocimiento de los autores, por lo que se debería intentar trasladar toda la experiencia de las técnicas antibloqueo al mismo.

REFERENCIAS

- Ahmad S., Irons B., and Zienkiewicz O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 419-451, 1970.
- Alhazza K. and Alhazza A. A review of the vibrations of plates and shells. *The Shock and Vibration Digest*; 36(5):377–395, 2004.
- Alves de Sousa R.J.A., Cardoso R.P.R., Valente R.A.F., Yoon J.W., Gracio J.J., and Jorge R.M.N. A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness part II: nonlinear applications. *Int J Numer Methods Eng*, 67:160–188, 2006.
- Beles A. and Soare M. *Elliptic and Hyperbolic Paraboloidal Shells used in Constructions*. Christie and Partners, 1976.
- Chakravorty D. and Bandyopadhyay J. On the free vibration of shallow shells. *Journal of Sound and Vibration*, 185(4):673–684, 1995a.
- Chakravorty D., Bandyopadhyay J.N., and Sinha, P.K. Free vibration of point-supported laminated doubly curved shells-a finite element approach. *Comput Struct*, 54(2):191–8, 1995b.
- Hauptmann R., and Schweizerhof K. A systematic development of solid-shell element formulations for linear and nonlinear analyses employing only displacement degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:49–70, 1998.
- Itskov M. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers: With Applications to Continuum Mechanics*. Springer, 2009.
- Leissa, A. W. *Vibration of Shells*. Acoustical Society of America. Sewickly, 1993.
- Liew K. and Lim C. Vibratory behaviour of doubly curved shallow shells of curvilinear planform. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(12):1277–1283, 1995.
- Liew K. and Lim C. Vibration of doubly-curved shallow shells. *Acta Mechanica*, 114:95–119, 1996.
- Naghdi P.M. *Foundations of elastic shell theory*, I.N. Sneddon, R. Hill (Eds.), Progress in Solid Mechanics, Volume 4. North-Holland, Amsterdam, 1963.
- Narita Y. and Leissa A.W. Vibrations of corner point supported shallow shells of rectangular planform. *Earthq Eng Struct D*, 12(5):651–61, 1984.
- Rekach V. G. *Manual of the theory of Elasticity*. Mir Moscú 1978.
- Schwarze M. and Reese S. A reduced integration solid-shell finite element based on the EAS and the ANS concept-Geometrically linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(10):1322-55, 2009.
- Soedel W. *Vibrations of Shells and Plates*, Marcel Dekker. New York. 1993.
- Stavridis, L. Dynamic analysis of shallow shells of rectangular base. *Journal of Sound and Vibration*, 218(5):861–882, 1998.
- Stavridis L. and Armenakas A. Analysis of shallow shells with rectangular projection. *Applications. Journal of Engineering Mechanics*, 114(6):943–952, 1988.
- Yang H., Saigal S., Masud A. and Kapania R. A survey of recent shell finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:101–127, 2004.

Zienkiewicz, O. C. and Taylor, L.R. *El Método de los Elementos Finitos. Mecánica de Sólidos* McGraw-Hill, 2000.