

UNA METODOLOGIA PARA OPTIMIZACION TOPOLOGICA ESTRUCTURAL CON MULTIPLES MATERIALES

Augusto A. Romero^a, Sebastian M. Giusti^b

^aDepartamento de Ingeniería Mecánica - GIDMA. Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba. Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria. C.P.A. X5016ZAA. Córdoba Capital. Córdoba. Argentina. augusto.romero@gmail.com

^bDepartamento de Ingeniería Civil - GIDMA. Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba. CONICET Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria. C.P.A. X5016ZAA. Córdoba Capital. Córdoba. Argentina. sgiusti@civil.frc.utn.edu.ar

Palabras Clave: Vector Level-Set, dominios multi-materiales, Optimización Estructural, Derivada Topológica.

Resumen: En este trabajo se propone un método para la resolución de problemas de optimización topológica estructural considerando diferentes materiales. El método se fundamenta en la representación geométrica del dominio con el uso de funciones de level-set. Para la nucleación y evolución de las curvas de level-set, se utilizará un procedimiento basado en el concepto de derivada topológica. En particular, el método consta de la definición de diferentes funciones level-set, donde cada una de ellas se corresponde con uno de los materiales considerados en el proceso de optimización. Con el conjunto de todas las funciones level-set se construye un vector level-set, que representa la distribución de todos los materiales considerados en el dominio de análisis. Este vector es actualizado mediante un algoritmo de optimización basado en los conceptos de análisis de sensibilidad topológica. El algoritmo de optimización fue escrito en Matlab. Se presentan los conceptos fundamentales del método, el desarrollo del algoritmo y diversos ejemplos numéricos de aplicación a problemas de optimización estructural topológica.

1. INTRODUCCIÓN

Las exigencias en el desarrollo y diseño de nuevos productos y componentes mecánicos, se han acrecentado en las últimas décadas. Con ello se han desarrollado, técnicas, métodos y herramientas para poder hacer frente a los nuevos desafíos de diseño y construcción.

La optimización topológica es un área que ha brindado grandes aportes a la optimización estructural. Muchos trabajos, métodos y técnicas abordan la problemática de la distribución óptima de material dentro de un espacio determinado con el fin de obtener estructuras con distintos tipos de requerimientos. Clásicamente este problema es abordado considerando la distribución de un único material y considerando al restante espacio de diseño como vacío. No obstante, una de las grandes limitaciones que enfrentaban estos métodos es su incapacidad de obtener estructuras utilizando diferentes materiales. Diversos casos de la ingeniería requieren la utilización de varios materiales en la construcción de un componente o estructura y también en el diseño de materiales compuestos. Esta problemática es la motivación de este trabajo.

En los últimos años se han desarrollado algunos métodos de optimización topológica estructural considerando múltiples materiales. Algunos resultados obtenidos en optimización estructural multimaterial de mecanismos flexibles se muestran en las publicaciones (Wang, Wang, & Yulin, 2005) y (Yin & Ananthasuresh, 2001), mientras que el problema de obtención de estructuras con máxima rigidez utilizando múltiples materiales se trata en (Wang & Wang, 2004). Cabe destacar que todos estos trabajos utilizan el método SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) para obtener la distribución óptima de material que garantice ser el mínimo de un funcional de costo. En este trabajo se presenta un método de optimización estructural topológica multimaterial basado en conceptos de análisis de sensibilidad topológica (derivada topológica), para obtener estructuras de máxima rigidez y mínimo peso.

Este trabajo está ordenado de la siguiente manera. En la Sección 2 se presenta la formulación del problema, donde se establece el funcional de costo a minimizar, se muestra como serán modeladas las diferentes fases de los materiales y se presenta el concepto de derivada topológica. La descripción de la metodología de optimización propuesta en este trabajo y un diagrama de flujo del algoritmo utilizado es exhibida en la Sección 3. En la Sección 4 se muestran dos ejemplos de aplicación, donde se discuten los resultados, la eficiencia y robustez del algoritmo propuesto. El trabajo finaliza en la Sección 5, donde se colocan los comentarios y apreciaciones finales.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Elasticidad

En esta sección se describe el modelo asociado a un problema elástico en dominios caracterizados por contener múltiples fases materiales.

2.1.1 Dominios con un único material

Considérese un dominio abierto y limitado $\Omega \in \mathbb{R}^2$ representando un sólido elástico sujeto a un proceso de deformación lineal. Asumiendo pequeñas deformaciones, la función que representa la energía potencial total del sistema mecánico, en ausencia de fuerzas de cuerpo, se escribe como:

$$Epot(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla u^s - \int_{\Gamma_N} \bar{t} \cdot u, \quad (1)$$

donde u representa el campo de desplazamientos y \bar{t} es una fuerza de tracción externa actuando en la frontera Γ_N . El campo de desplazamientos en la frontera Γ_D satisface la condición $u|_{\Gamma_D} = \bar{u}$, siendo \bar{u} un desplazamiento prescrito. Además nótese que $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ y $\overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_D} = \partial\Omega$. El tensor de tensión de Cauchy en (1) se define como:

$$\sigma(u) = \mathbb{C} \nabla u^s, \quad (2)$$

donde ∇u^s es usado para denotar la parte simétrica del gradiente del campo de desplazamientos, entonces

$$\nabla u^s = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T). \quad (3)$$

Además, \mathbb{C} denota el tensor elástico de cuarto orden que, para el caso de un cuerpo elástico isotrópico, está dado por:

$$\mathbb{C} = 2\mu \mathbb{I} + \lambda (I \otimes I), \quad (4)$$

con μ y λ siendo los coeficientes de Lamé. Se puede escribir la anterior ecuación en términos de las constantes ingenieriles E (módulo de Young) y ν (coeficiente de Poisson) como:

$$\mathbb{C} = \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu)\mathbb{I} + \nu(I \otimes I)]. \quad (5)$$

El campo u es la solución del siguiente problema variacional: encuéntrase $u \in \mathcal{U}$, tal que

$$\int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla \eta^s = \int_{\Gamma_N} \bar{t} \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}. \quad (6)$$

En el problema variacional (6), el conjunto \mathcal{U} y el espacio \mathcal{V} se definen como

$$\mathcal{U} = \{\phi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2): \phi = \bar{u} \text{ en } \Gamma_D\} \text{ y } \mathcal{V} = \{\phi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2): \phi = 0 \text{ en } \Gamma_D\}. \quad (7)$$

2.1.2 Dominio incluyendo múltiples fases de material

En esta sección se mostrará la ecuación de estado que resuelve el problema de elasticidad lineal isotrópica cuando hay dos fases materiales. Los resultados obtenidos, son extensibles a múltiples fases materiales. Considerando ahora que en el dominio Ω se introdujo una inclusión de una fase material diferente denotada como $\omega_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon(\hat{x})$, con radio ε y centrada en el punto \hat{x} en Ω , la energía potencial total ahora puede escribirse como:

$$Epot_{\chi_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon^s - \int_{\Gamma_N} \bar{t} \cdot u_\varepsilon, \quad (8)$$

aquí u_ε y σ_ε se refieren al campo de desplazamientos y al tensor de tensiones, respectivamente, asociados al dominio con la nueva configuración de fases. El tensor de tensión se escribe:

$$\sigma_\varepsilon(u) = \gamma^M \mathbb{C} \nabla u_\varepsilon^s, \quad (9)$$

siendo γ^M el parámetro de contraste en las propiedades constitutivas de las fases, definido como

$$\gamma^M = \begin{cases} 1 & \text{en } \Omega \setminus \overline{\mathcal{B}_\varepsilon} \\ \gamma & \text{en } \mathcal{B}_\varepsilon \end{cases}, \quad (10)$$

con γ , el valor del contraste. En esta configuración, el campo de desplazamientos satisface un problema variacional análogo al descrito en la ecuación (6) como ser: encuéntrase $u \in \mathcal{U}_\varepsilon$ tal que

$$\int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta^s = \int_{\Gamma_N} \bar{t} \cdot \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon. \quad (11)$$

El conjunto \mathcal{U}_ε y el espacio \mathcal{V}_ε se definen como

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{\phi \in \mathcal{U}: \llbracket \phi \rrbracket = 0 \text{ en } \partial \mathcal{B}_\varepsilon\} \text{ y } \mathcal{V}_\varepsilon = \{\phi \in \mathcal{V}: \llbracket \phi \rrbracket = 0 \text{ en } \partial \mathcal{B}_\varepsilon\}, \quad (12)$$

donde el operador $\llbracket \cdot \rrbracket$ es introducido para denotar el salto (\cdot) por sobre la frontera de la perturbación.

2.3 Modelización de las fases materiales

Para representar el dominio de proyecto, se lo particiona en m fases materiales ω_i , tal que:

$$\bigcup_{i=1}^m \omega_i = \Omega \quad (13)$$

Sobre cada fase material puede existir sólo un material, ya que la superposición o solapamiento de materiales no tiene sentido físico, por ende:

$$\omega_i \cap \omega_j = \emptyset \text{ con } i \neq j. \quad (14)$$

Para poder representar las fases materiales intervinientes en el dominio de proyecto es necesario la utilización de funciones características. A cada fase se le atribuye una función indicatriz ϕ_i . Cada función característica es definida como

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \omega_i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (15)$$

Para un problema de 2 fases materiales y una fase vacío se entiende:

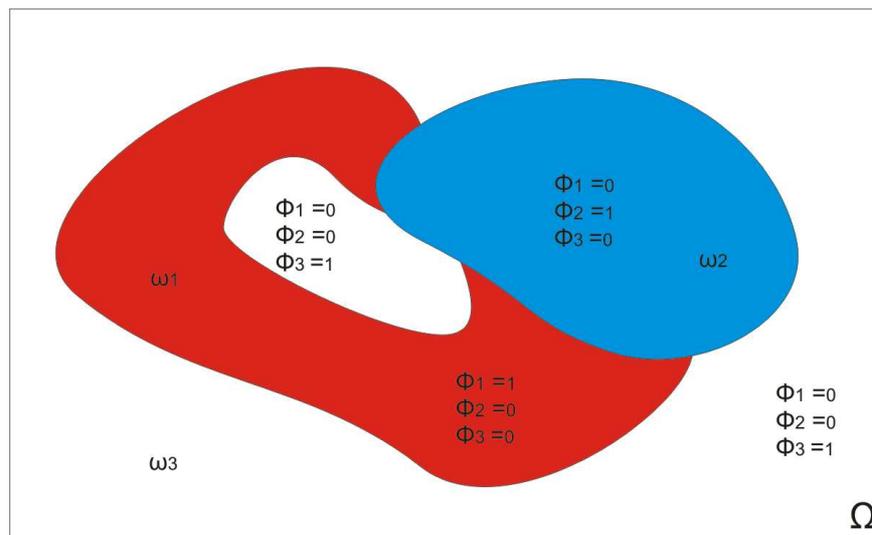


Figura 1 – Tres fases materiales representadas por las funciones características.

2.4 Derivada topológica

Los métodos de homogeneización son posiblemente los más utilizados para la optimización topológica. Estos consisten en caracterizar la topología a través de su densidad, es decir, los huecos se identifican con regiones de densidad nula. De esta forma la solución del programa resulta en una distribución ficticia de material, siendo necesario utilizar métodos de penalización y filtrado para obtener un resultado de utilidad ingenieril.

Un método alternativo de optimización topológica son los basados en Análisis de Sensibilidad Topológica. Esta familia de métodos apunta a resolver las limitaciones de los métodos basados en técnicas de homogeneización, y su idea principal es la evaluación de la sensibilidad de una dada función de costo ante la creación de una cavidad o hueco. La derivada topológica representa el término de primer orden de la expansión asintótica de una dada función con respecto a una perturbación singular. Ha sido aplicada en problemas de optimización (Amstutz, Novotny, & de Souza Neto, 2012), problemas inversos (Hintermüller, Laurain, & Novotny, 2012), procesamiento de imágenes (Hintermüller & Laurain, 2009), modelado multiescala de propiedades constitutivas (Giusti, Novotny, de Souza Neto, & Feijóo, 2009). En esta sección se presentan los conceptos básicos del análisis de sensibilidad topológica y de la derivada topológica.

Consideremos un dominio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, sujeto a una perturbación no suave confinada en una pequeña región $\varpi_\varepsilon(\hat{x}) = \hat{x} + \varpi\varepsilon$, de tamaño ε , como se ve en la Figura 2.

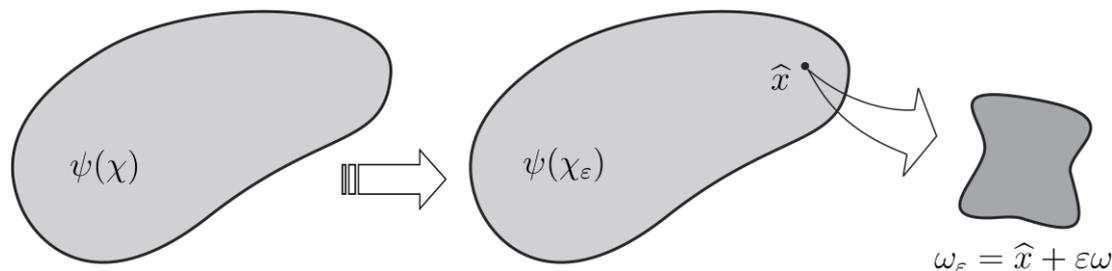


Figura 2 – Concepto de derivada topológica.

Aquí, \hat{x} es un punto arbitrario de Ω y ϖ un dominio fijo y limitado en \mathbb{R}^2 . Asociado al dominio Ω , introducimos una función característica $x \rightarrow \chi(x), x \in \mathbb{R}^2$, con $\chi = \mathbb{1}_\Omega$. También para el dominio topológicamente perturbado podemos definir una función característica de la forma $x \rightarrow \chi_\varepsilon(\hat{x}; x)$. Si la perturbación es dada por una perforación, la función característica puede ser escrita en forma $\chi_\varepsilon(\hat{x}) = \mathbb{1}_\Omega - \mathbb{1}_{\varpi_\varepsilon(\hat{x})}$ y el dominio perforado es obtenido como $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \varpi_\varepsilon$. Ahora asumiendo la siguiente expansión topológica asintótica de una función de costo $\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x}))$, asociada al dominio topológicamente perturbado,

$$\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) = \psi(\chi) + f(\varepsilon)D_T\psi(\hat{x}) + o(f(\varepsilon)), \quad (16)$$

la función $\hat{x} \rightarrow D_T\psi(\hat{x})$ es llamada derivada topológica de ψ en \hat{x} . En (16), $\psi(x)$ es la función de costo asociado al dominio original no perturbado y $f(\varepsilon)$ es una función positiva tal que $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Operando en (16) tenemos

$$\frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi)}{f(\varepsilon)} = D_T\psi(\hat{x}) + \frac{o(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)}. \quad (17)$$

En el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en la anterior expresión anterior lleva a la definición de la derivada topológica

$$D_T\psi(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\chi_\varepsilon(\hat{x})) - \psi(\chi)}{f(\varepsilon)}. \quad (18)$$

Teorema 1. La derivada topológica del funcional de energía potencial total mostrado en (1) es dada por:

$$\begin{aligned} Dt(Epot) = & \frac{1}{2E_1} \frac{(1 - \gamma_{jk})}{1 + \left(\frac{3-\mu}{1+\mu}\right) \cdot \gamma_{jk}} 4(\sigma_x^2 + 2\tau_{xy}^2 + \sigma_y^2) \\ & + \frac{1}{2E_1} \frac{(1 - \gamma_{jk})}{1 + \left(\frac{3-\mu}{1+\mu}\right) \cdot \gamma_{jk}} \frac{\left(\gamma_{jk} \left(\left(\frac{3-\mu}{1+\mu}\right) - 2\frac{(1+\mu)}{(1-\mu)} \right) - 1\right)}{\left(1 + \frac{(1+\mu)}{(1-\mu)} \gamma_{jk}\right)} (\sigma_x + \sigma_y)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

donde γ_{jk} representa el factor de contraste entre las propiedades constitutivas de las fases j y k , E_1 es el módulo de Young del material correspondiente a la fase 1, y $(\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y)$ representan las componentes del tensor de tensión σ asociado al punto donde se está midiendo la sensibilidad.

Prueba. El lector interesado en la prueba detallada de este teorema, refiérase a (Novotny & Sokolowski, 2013).

Es importante mencionar que la derivada topológica (19) mide la sensibilidad del funcional de costo cuando el material con módulo de elasticidad E_1 es intercambiado por un material con modulo $\gamma_{jk}E_1$. Esto quiere decir que siempre esta derivada mide la sensibilidad a un cambio entre dos materiales.

3. PROCEDIMIENTO DE OPTIMIZACION

Para realizar la optimización topológica estructural considerando la introducción de múltiples materiales, se realizará una adaptación del algoritmo propuesto por Amstutz & André (Amstutz & H., 2006). Este algoritmo utiliza la información generada por la derivada topológica para crear una dirección factible de descenso. El tamaño del paso en cada etapa del algoritmo es determinada mediante una búsqueda lineal. La representación geométrica de las fases constituyentes se realiza a través de curvas de level-set. Siguiendo los lineamientos antes mencionados se procedió a codificar el algoritmo de la siguiente manera:

3.1 Evolución de las fases

- Definición del problema:

En un archivo de entrada de datos se procede a definir la geometría inicial, el sistema de cargas, las condiciones de apoyos y los materiales de proyecto, clasificados como:

- Material 1 – M1 (“duro”), es el material que posee el valor del módulo de Young más elevado.
- Material 2 – M2 (“blando”), es el material con menor valor en el módulo de Young.
- Material 3 – M3 (vacío), es un material ficticio utilizado para mimetizar la ausencia de material en una determinada región del dominio de proyecto.

Serán utilizadas 3 funciones level-set diferentes para modelar la evolución de las distintas fases materiales a lo largo del proceso de optimización. Estas funciones son inicializadas con los siguientes valores:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -1 \text{ en todo el dominio} \\ \varphi_2 = \emptyset \\ \varphi_3 = \emptyset \end{cases} \quad (20)$$

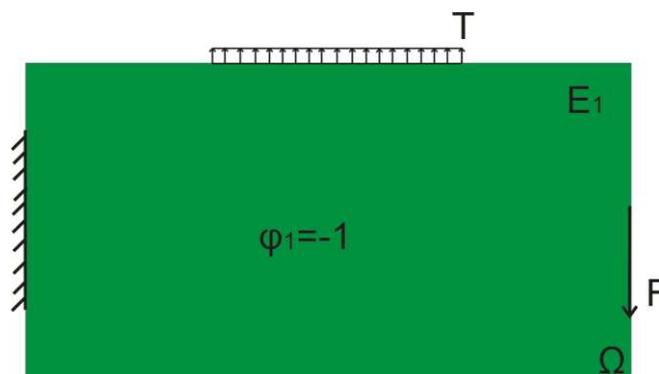


Figura 3 – Condiciones iniciales en un dominio de material M1.

- 1ra Etapa de Optimización:

Durante la primera etapa de optimización, se permite la evolución de la fase material M1 frente a la fase material M3 (vacío) hasta obtener una topología óptima. Durante este proceso la función level-set adquiere los siguientes valores:

$$\varphi_1 \begin{cases} < 0 & \text{para } x \in \omega_1 \\ \geq 0 & \text{para el resto del dominio} \end{cases} \quad (21)$$

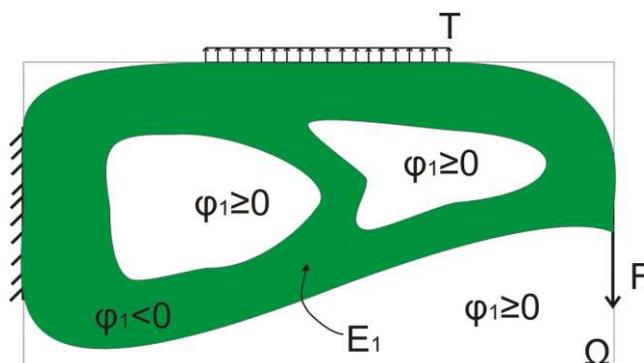


Figura 4–Funciones level-set en una topología obtenida en la primera etapa de optimización.

- 2da Etapa de Optimización:

Se restringe el dominio de proyecto a la topología obtenida en la etapa anterior. Se define una nueva función level-set sobre este dominio de proyecto. En esta etapa se permite la evolución de la fase material M2 con respecto a la fase material M1. Durante este proceso la función level-set adquiere los siguientes valores:

$$\varphi_2 \begin{cases} < 0 & \text{para } x \in \omega_1 \\ \geq 0 & \text{para } x \in \omega_2 \\ \neq & \text{para cualquier } x \in \omega_3 \end{cases} \quad (22)$$

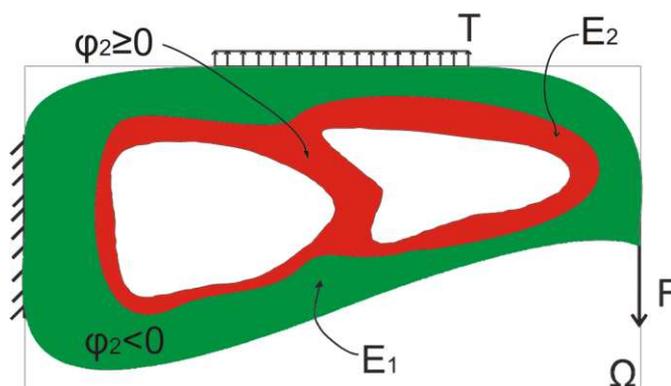


Figura 5 - Funciones level-set en una topología obtenida en la segunda etapa de optimización.

- 3ra Etapa de Optimización

Por último, se toma como dominio de proyecto, los sectores donde están presentes las fases materiales M2 y M3 (vacío). Se define sobre estas regiones una tercer y última función level-

set y se la hace evolucionar hasta encontrar una topología óptima. Durante este proceso la función level-set adquiere los siguientes valores:

$$\varphi_3 \begin{cases} < 0 & \text{para } x \in \omega_2 \\ \geq 0 & \text{para } x \in \omega_3 \\ \neq & \text{para cualquier } x \in \omega_1 \end{cases} \quad (23)$$

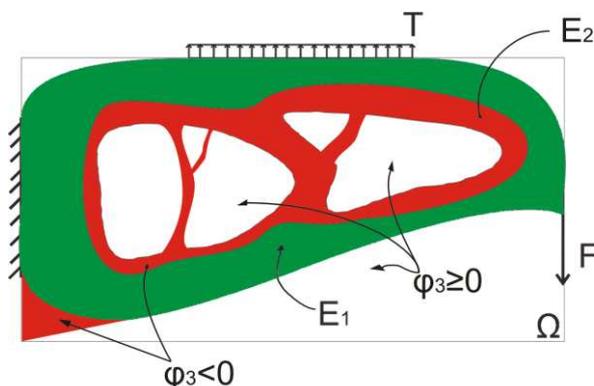


Figura 6 - Funciones level-set en una topología obtenida en la tercera etapa de optimización.

Es importante destacar que en cada una de las etapas citadas anteriormente, solo son considerados dos materiales para la definición de la topología óptima. Esta estrategia computacional adoptada le confiere mayor estabilidad al algoritmo de optimización.

3.2 Construcción de funciones características

En todas las etapas de optimización descritas anteriormente, las funciones level-set son utilizadas para configurar correctamente las funciones indicatrices de las fases materiales. Este procedimiento se muestra en lo que sigue.

Primera etapa:

$$\text{para un punto } x, \text{ si } \begin{cases} \varphi_1(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = 1 \\ \Phi_2 = 0 \\ \Phi_3 = 0 \end{cases} \\ \varphi_1(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \\ \Phi_3 = 1 \end{cases} \end{cases} \quad (24)$$

Segunda etapa:

$$\text{para un punto } x \text{ donde } \varphi_1(x) < 0, \text{ si } \begin{cases} \varphi_2(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = 1 \\ \Phi_2 = 0 \\ \Phi_3 = 0 \end{cases} \\ \varphi_2(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 1 \\ \Phi_3 = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (25)$$

Tercera etapa:

$$\text{para un punto } x \text{ donde } \varphi_1(x) \geq 0 \wedge \varphi_1(x) < 0 \text{ con } \varphi_2(x) \geq 0, \text{ si } \begin{cases} \varphi_3(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 1 \\ \Phi_3 = 0 \end{cases} \\ \varphi_3(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \\ \Phi_3 = 1 \end{cases} \end{cases} \quad (26)$$

3.3 Codificación

Para modelar computacionalmente el problema de optimización se utilizó un software de elementos finitos. La malla de elementos finitos proporciona una discretización del dominio de proyecto sobre la cual es posible la definición de las funciones level-set y las funciones características. Además la solución del campo de desplazamientos dado por el MEF (método de elementos finitos) es necesaria para la evaluación de la función de costo y la derivada topológica asociada.

El problema de optimización se escribe como

$$\begin{aligned} \min \quad & Epot \\ \text{S.A.} \quad & g_i = Vol_i > 0 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (27)$$

La construcción de la función de costo a minimizar se realiza sobre un esquema de penalización lineal de la siguiente manera

$$\min J(u) = Epot(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i Vol_i, \quad (28)$$

donde $J(u)$ es la función de costo a minimizar, $Epot(u)$ la energía potencial total del sistema, λ_i es el factor de penalización asociado a la norma del volumen Vol_i del material "i". Los valores de los factores de penalización λ_i definirán la fracción de volumen final de cada fase material al final del proceso de optimización global. De hecho, para obtener una fracción de volumen específica para una fase material "i" el valor del coeficiente de penalización asociado a esa fase debe ser ajustado de forma manual al inicio del proceso de optimización. Es importante mencionar que la variable de diseño en (28) es la propia topología del problema, entendiendo como tal, a la distribución de material de cada fase considerada. Donde el campo de desplazamiento u , solución de (11), es utilizado para calcular el funcional $Epot(u)$, asociado a la configuración topológica actual, en cada iteración del algoritmo.

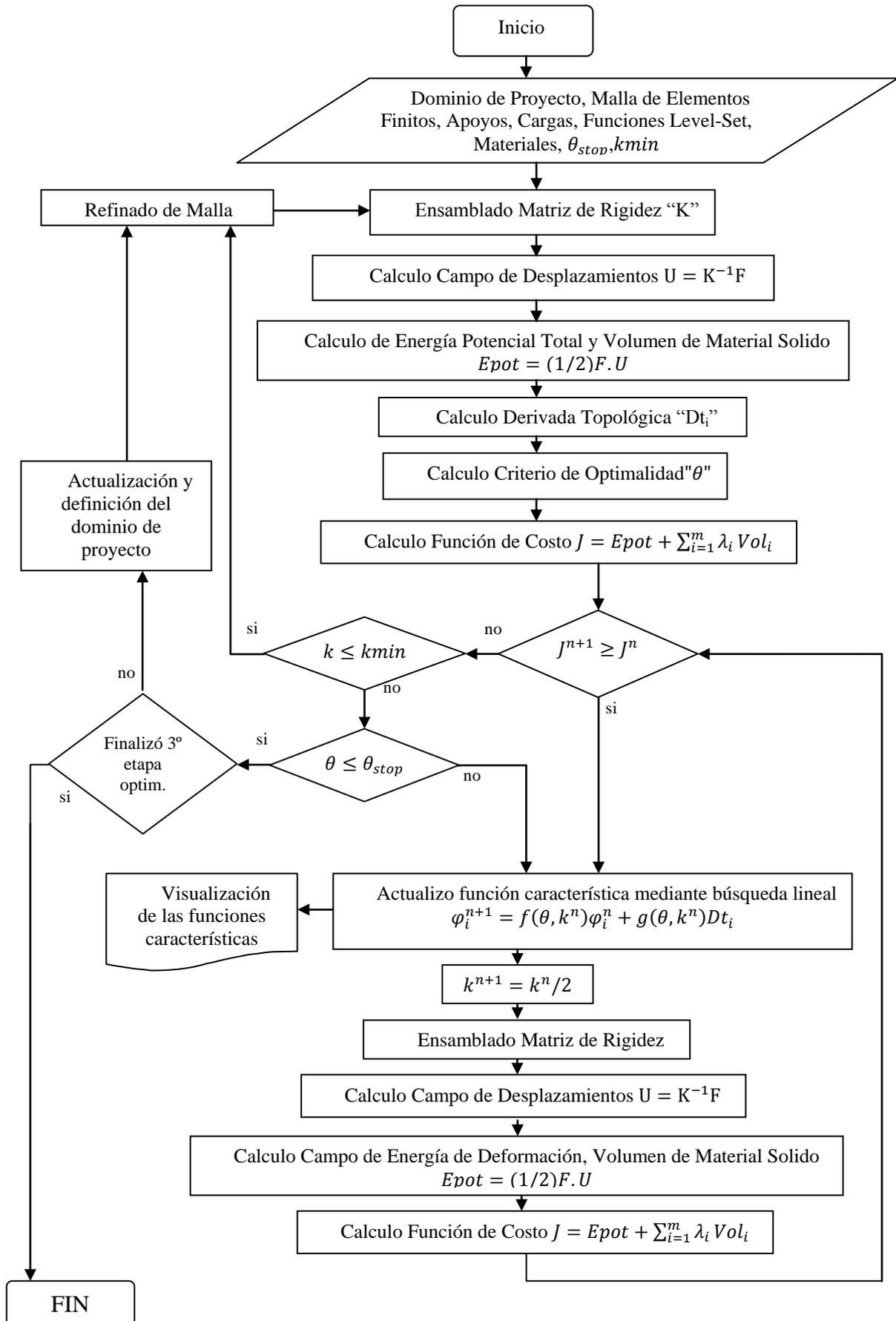
Aprovechando la propiedad de linealidad del operador derivada topológica, la derivada topológica de (28) se escribe como:

$$Dt(J(u)) = Dt(Epot(u)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i Dt(Vol_i) \quad (29)$$

donde

$$Dt(Vol_i) = (\gamma_{ik} - 1) \quad (30)$$

Para resolver el problema de optimización (28), se utilizó el algoritmo desarrollado en (Amstutz & H., 2006), que se presenta esquemáticamente en el siguiente diagrama de flujo:



4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se mostrarán 2 ejemplos numéricos de aplicación del procedimiento de optimización multimaterial descrito anteriormente, con el objetivo de obtener estructuras con máxima rigidez y menor volumen posible. En este tipo de problemas la función de costo a minimizar es la energía potencial total del sólido, ec. (28).

Siendo que para estos ejemplos numéricos solamente se considerarán las tres fases materiales descritas en la Sección 3.1, la función costo a minimizar es dada de la siguiente manera:

$$J = E_{pot} + \lambda_1 Vol_1 + \lambda_2 Vol_2 \quad (31)$$

En todos los casos desarrollados la estructura está sometida a estados de tensión plana.

Se discretiza el dominio mediante una malla de elementos finitos. La malla está compuesta por elementos triangulares de deformación constante (CST). En la Figura 7 se muestra la malla inicial utilizada.



Figura 7 – Malla de elementos finitos sobre un dominio ejemplo.

En los dos ejemplos las propiedades constitutivas de los materiales son: módulos elásticos $E_1 = 200\text{GPa}$, $E_2 = 100\text{GPa}$ y $E_3 = 0.001 * E_1$; y el coeficiente de Poisson para todos los materiales está definido en $\mu = 0.3$. La carga utilizada en los ejemplos tiene el valor de 100 N.

4.1 Problema de las dos barras

El primer ejemplo consta de un dominio rectangular de relación de aspecto 2x1 (alto y ancho en [m]) discretizado inicialmente con 64 elementos triangulares CST. Sometido a la carga sobre el punto medio del lado derecho de la estructura rectangular, la cual se encuentra empotrada en su lado izquierdo. Los parámetros de penalización para cada una de las fases materiales M1 y M2 son: $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 3$. La evolución de las fases materiales durante el proceso de optimización es el mostrado en las siguientes figuras.

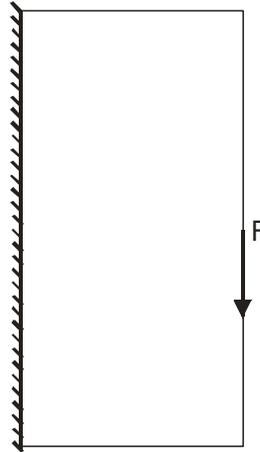


Figura 8 – Ejemplo 1: geometría y condiciones iniciales.

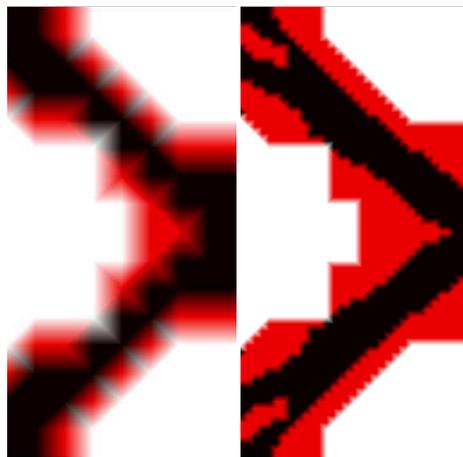


Figura 9 – Evolución de las fases materiales en la segunda etapa de optimización.

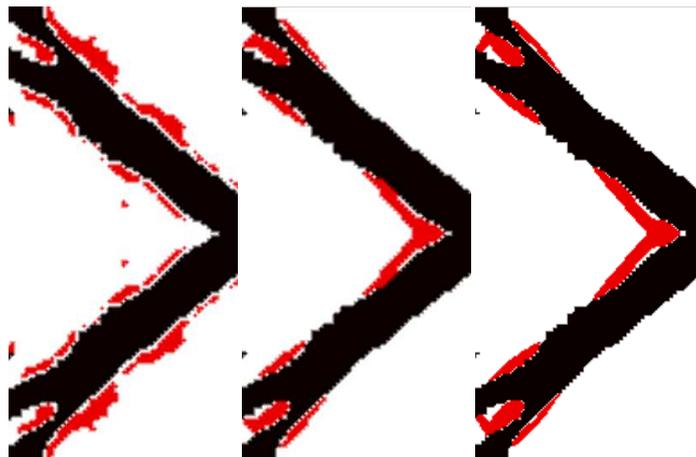


Figura 10 – Evolución de las fases materiales en la 3ra etapa de optimización.

En las imágenes anteriores se observa la distribución de material M1 en color negro, material M2 en rojo y el vacío en color blanco.

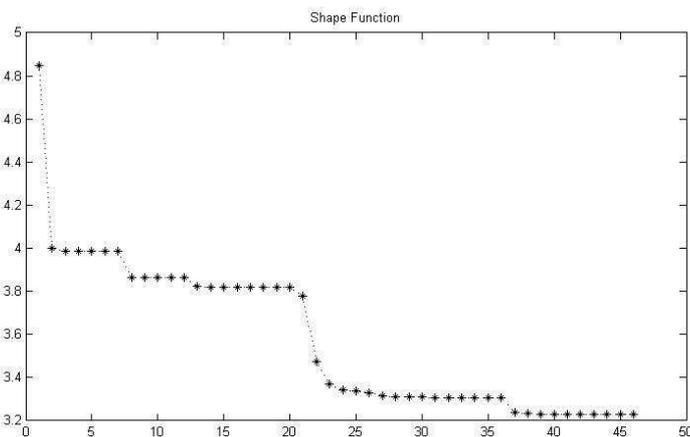


Figura 11 – Función de costo normalizada con su valor inicial vs iteraciones.

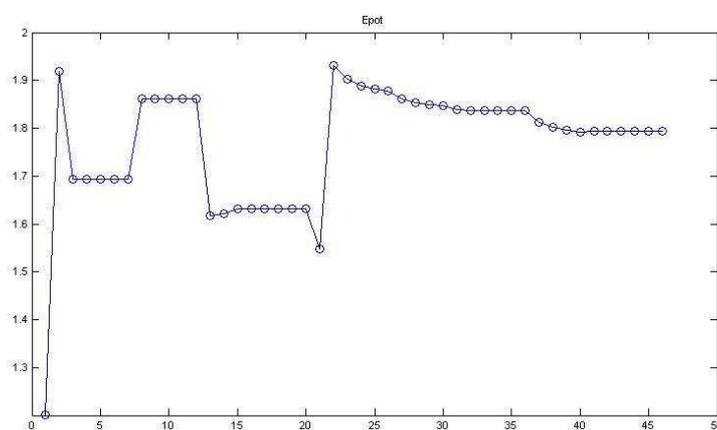


Figura 12 – Energía de deformación normalizada a su valor inicial vs iteraciones.

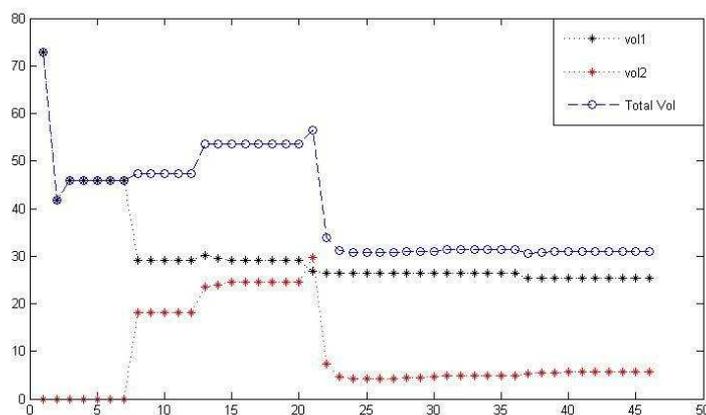


Figura 13 – Fracciones de volúmenes de cada fase material y fracción de volumen.

Durante la primera etapa de optimización (iteración 1 a 7), la función de costo baja como era de esperarse y se estabiliza en la iteración n° 2, la fracción de volumen total y de material 1 o “duro” siguen el mismo comportamiento. La energía potencial sube ya que la estructura se flexibiliza. Cuando se cumple con el criterio de optimalidad en esta etapa, se procede a la etapa de optimización siguiente.

En la segunda etapa, la fase material M2 emerge. La fracción de volumen de este crece durante las siguientes 14 iteraciones, aumentando también la fracción de volumen total. A lo

largo de esta fase de optimización la función de costo mantiene un comportamiento decreciente, mientras que la energía potencial oscila en valores comprendidos entre 1.83 y 1.6 veces la energía de deformación inicial.

Es importante destacar como el algoritmo ubica la fase material M2 frente a la fase material M1. En esta etapa el dominio de proyecto se encuentra restringido a la topología final obtenida en la etapa anterior, por lo que la evolución del material “blando” no puede escapar a estas fronteras establecidas. Es de observar que el algoritmo intenta orientar el flujo de fuerzas internas de manera de reducir su intensidad y evitando, en lo posible, cambios bruscos en su dirección desde las fuerzas activas hacia las reactivas, como se ve en la Figura 9. Es por ello que crea un “canal” o núcleo de material M1, por donde la mayor cantidad de flujo de fuerzas pase por él, ya que este es más rígido y es el que absorberá la mayor cantidad de esfuerzos, y deja por exclusión el resto del dominio compuesto por material de menor módulo de elasticidad.

En el transcurso de la tercera fase de optimización, a partir de la iteración 22, se visualizan los cambios topológicos más drásticos. Aquí se controla la evolución de material M2 frente al vacío (material M3) y el dominio de proyecto queda restringido a los puntos donde solo se encuentra material M2 y vacío. En las imágenes mostradas en la Figura 10 se puede ver como el proceso de optimización avanza eliminando zonas de material poco aprovechado (poco tensionado), haciendo migrar estos esfuerzos internos hacia el núcleo de la estructura sólida. Esto conduce con un descenso acusado en la función de costo, ya que las fracciones de volúmenes de material M2 y totales se han reducido notablemente, y con un aumento sustancial de la energía de deformación, dado que la estructura ha perdido rigidez. Aun así este incremento energético no compite con el decremento que genera la reducción de la fracción de volumen de material M2 en la función de costo. Las zonas donde el material M2 permanece, representan topologías que mantienen la rigidez de la estructura. En efecto, la topología del material M2 se encuentra levemente curvada a lo que sería una barra totalmente recta. El algoritmo trata de corregir esta curvatura introduciendo material M2 en estas zonas con el objeto de que el flujo de fuerzas no se vea desviado.

Durante este último proceso la energía de deformación fue bajando paulatinamente al igual que la función de costo. La fracción de volumen de M1, M2 y volumen total que se obtuvieron al final del proceso de optimización fueron $Vol_1 = 0.27$, $Vol_2 = 0.05$ y $Vol = 0.32$.

4.3 Viga en Voladizo

El siguiente ejemplo consta de un dominio rectangular de relación de aspecto 1x2 (alto y ancho en [m]) discretizado inicialmente utilizando 256 elementos triangulares CST y sometido a una carga vertical sobre el punto medio del lado derecho de la estructura rectangular, la cual se encuentra empotrada en su lado izquierdo. Los factores de penalización son $\lambda_1 = 4.5$ y $\lambda_2 = 3$. La evolución de las fases materiales durante el proceso de optimización es el mostrado en las siguientes figuras.



Figura 14 – Ejemplo 2: geometría y condiciones iniciales.



Figura 15 – Evolución de topología durante la 1ra etapa de optimización

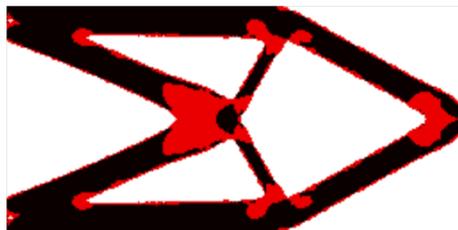


Figura 16 – Evolución de material M2 frente a material M1 durante la 2da etapa de optimización.

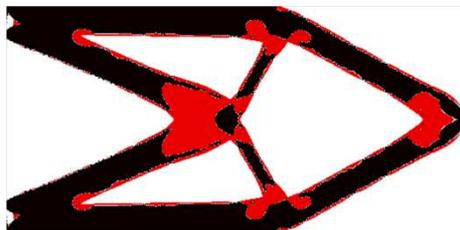


Figura 17 - Evolución de material M2 frente a vacío durante la 3da etapa de optimización.

De la misma manera que en el ejemplo anterior, se presenta en negro el material M1, en rojo el material M2 y en blanco el vacío en Figura 15 a Figura 17. Las gráficas siguientes muestran el progreso de la función de costo, energía potencial y fracciones volumétricas a lo largo del proceso de optimización.

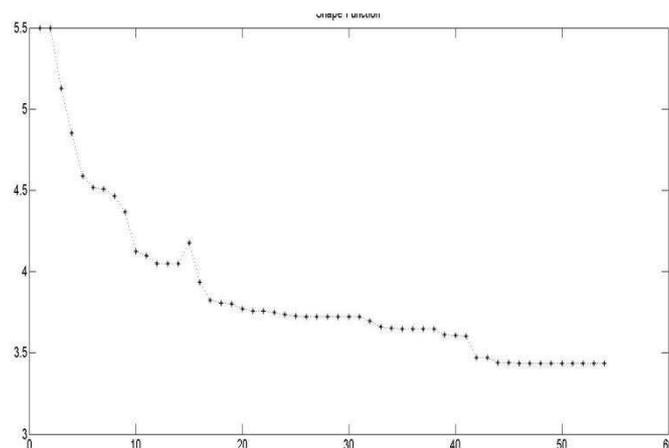


Figura 18 – Función de costo normalizada a la función de costo inicial vs iteraciones (2do ejemplo).

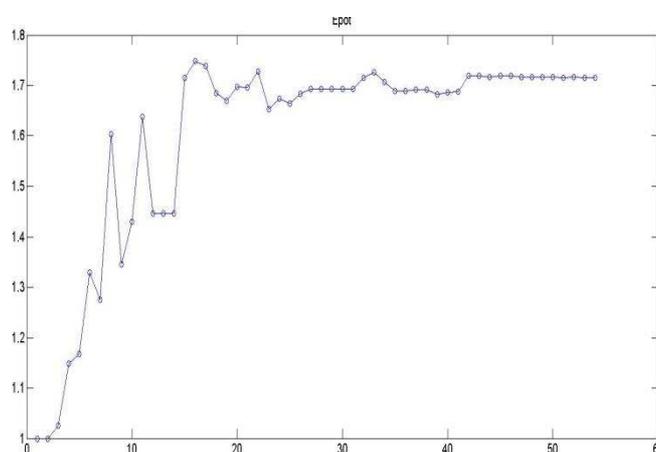


Figura 19 – Energía potencial normalizada a la energía inicial vs iteraciones (2do ejemplo).

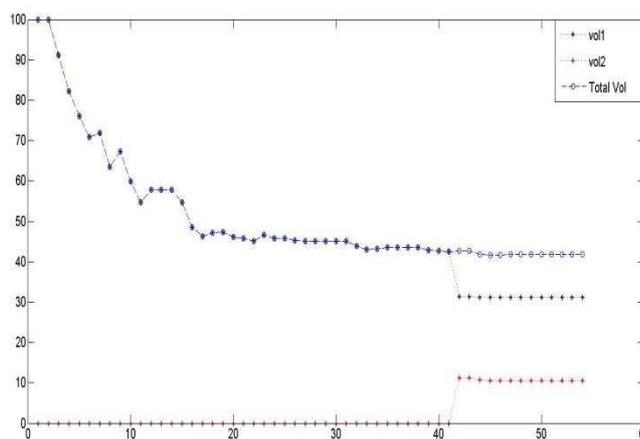


Figura 20 – Fracciones volumétricas de cada material y total (2do ejemplo).

Luego de iniciado el procedimiento de optimización, la primera etapa consume 40 iteraciones antes de entrar en convergencia y proseguir con la siguiente. Durante esta etapa fue necesario refinar la malla 3 veces antes de encontrar una topología óptima, a diferencia del ejemplo anterior, el cual consumo pocas iteraciones y con una malla mas gruesa. La energía de potencial total se vio incrementada hasta estabilizarse alrededor de la iteracion n°

20, conforme la función de costo sufría un comportamiento similar mientras se veía minimizada.

Al entrar en la segunda etapa de optimización, el material M2 surge en zonas de alta concentración de tensiones, tales como ángulos vivos y nudos donde convergen muchas barras. Esto flexibiliza la estructura por lo que la energía potencial se ve aumentada. El intercambio entre material M2 por material M1 hace decrecer la función de costo.

Esta etapa solo dura 2 iteraciones y entra rápidamente en convergencia. Durante la tercera fase de optimización, no se observan cambios topológicos de importancia, sino refinamientos pequeños de la interfaz material M2 y vacío, y eliminación de material cerca de los empotramientos.

La fracción de volumen de material M1, material M2 y volumen total que se obtuvieron al final del proceso de optimización fueron $Vol_1 = 0.35$, $Vol_2 = 0.1$ y $Vol = 0.45$.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se adaptó la metodología clásica de optimización topológica estructural, que utiliza a la derivada topológica como una dirección factible de descenso, para considerar más de una fase material. En particular, como función costo a minimizar fue considerada la energía potencial total con una restricción de volumen. Esto permite obtener estructuras de máxima rigidez para un valor de volumen establecido. Los resultados obtenidos computacionalmente indican que la distribución óptima de materiales tiende a reducir la concentración de tensiones, colocando material en las regiones susceptibles a este fenómeno, evitando cambios bruscos de dirección en el flujo de esfuerzos internos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo recibió el apoyo del programa de proyectos de investigación y desarrollo de la Universidad Tecnológica Nacional (PID/UTN-1420) y del CONICET. Los autores agradecen el apoyo económico brindado por estas instituciones.

REFERENCIAS

- Amstutz, S., & H., A. (2006). A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 216(2): 573-588 (2006).
- Amstutz, S., Novotny, A. A., & de Souza Neto, E. A. (2012). Topological derivative-based topology optimization of structures subject to Drucker-Prager stress constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 233-236, 123-136.
- Giusti, S. M., Novotny, A. A., de Souza Neto, E. A., & Feijóo, R. (2009). Sensitivity of the macroscopic elasticity tensor to topological microstructural changes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57 (3), 555–570.
- Hintermüller, M., & Laurain, A. (2009). Multiphase image segmentation and modulation recovery based on shape and topological sensitivity. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 35, 1–22.
- Hintermüller, M., Laurain, A., & Novotny, A. A. (2012). Second-order topological expansion for electrical impedance tomography. *Advances in Computational Mathematics*, 36 (2), 235–265.
- Novotny, A., & Sokolowski, J. (2013). *Topological Derivatives in Shape Optimization. Series on Interaccion of Mechanics and Mathematics*. Springer.

- Wang, M. Y., & Wang, X. (2004). “Color” level sets: a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* , 193 (2004) 469–496.
- Wang, M. Y., Wang, X., & Yulin. (2005). Design of Multi-Material Compliant Mechanisms Using Level Set Methods.
- Yin, L., & Ananthasuresh, G. (2001). Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme. *Struct Multidisc Optim* 2, Springer-Verlag , 23, 49–62.