

OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA ESTRUCTURAL CONSIDERANDO LA CONTRIBUCIÓN DEL CAMPO DE ROTACION

Andrés R. Valdez^a, Sebastián M. Giusti^b

^a Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba. Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria. C.P.A. X5016ZAA. Córdoba Capital. Córdoba. Argentina. andres10valdez@hotmail.com

^b Departamento de Ingeniería Civil. Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba. CONICET Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria. C.P.A. X5016ZAA. Córdoba Capital. Córdoba. Argentina. sgiusti@civil.frc.utn.edu.ar

Palabras Clave: Elasticidad Bidimensional, Rotación Nodal Libre, Optimización topológica, Derivada topológica.

Resumen. Los elementos finitos clásicos utilizados en la resolución de la ecuación de elasticidad en estado plano no incorporan en su formulación, como grado de libertad, a la rotación de sus nodos; sino que esta rotación puede ser calculada a partir de los desplazamientos relativos entre los mismos. En otras palabras, es una consecuencia de los desplazamientos nodales. Por otro lado, pocos elementos finitos incorporan en su formulación a la rotación nodal como grado de libertad. En este trabajo, se propone inicialmente describir un elemento finito teniendo en cuenta la rotación de sus nodos. De esta manera el estado de la deformación del sólido es calculado de la manera usual, tomando la parte simétrica del gradiente del desplazamiento. Para incorporar la rotación de cada nodo como grado de libertad, resulta necesario rescribir la energía potencial total en términos de los tres grados de libertad. A seguir, se determinan las condiciones de contorno admisibles por la formulación variacional del problema. Luego, es presentada una discusión acerca de las consecuencias cinemáticas de esta nueva formulación. Una vez descrito el elemento finito que incorpora al campo de rotación del sólido, se presenta su aplicación al problema de optimización topológica estructural. Finalmente, se presenta un estudio comparativo de los resultados obtenidos con el clásico elemento finito CST (constant strain triangle). El algoritmo de optimización empleado, utiliza a la derivada topológica del problema como una dirección de descenso viable para minimizar la energía potencial total de un sólido elástico.

1 INTRODUCCIÓN.

Los elementos finitos más utilizados para resolver la ecuación de elasticidad lineal isotrópica bidimensional son, entre otros, los denominados CST (constant strain triangle), los cuales no consideran a la rotación del nodo como un grado de libertad propio. Sino que describen a la rotación nodal o elemental como una consecuencia de los desplazamientos nodales. Esto quiere decir que toda rotación nodal está condicionada a los desplazamientos nodales. Sin embargo, a mediados de la década de los 80's, [Allman 1984](#) comienza a desarrollar un elemento finito para elasticidad plana con la incorporación de la rotación del nodo como un grado de libertad a ser calculado. Los desarrollos y validaciones numéricas de este elemento finito pueden consultarse en [Allman 1988](#), [Allman 1987](#). Cabe destacar que Allman en 1993 publica un trabajo donde demuestra que su formulación discreta que incorpora a la rotación como grado de libertad en el elemento deriva de un proceso de minimización de un funcional energía potencial total equivalente al de un sólido elástico, vea [Allman 1993](#). Esto indica que existe un principio variacional asociado a la cinemática del elemento finito que considera la rotación nodal como grado de libertad. En ese trabajo son establecidas las condiciones bajo las cuales su formulación energética es equivalente a la formulación variacional del problema de elasticidad plana bidimensional. En todos sus trabajos Allman muestra que el elemento finito desarrollado tiene mejor orden de convergencia que el clásico CST y otros elementos finitos propuestos para resolver la ecuación de elasticidad plana, vea [Allman1988](#).

La optimización topológica estructural es un área de investigación ampliamente desarrollada y que ha tenido una amplia difusión a partir de la incorporación de técnicas computacionales robustas y eficientes. En este sentido, la amplia difusión obtenida se debe a la utilización de técnicas de resolución por el método de los elementos finitos. Permitiendo, además, la aplicación de técnicas robustas y eficientes a problemas altamente complejos. En el caso particular de sistemas elásticos, uno de los elementos finitos más utilizados en la resolución de problemas de optimización estructural es el CST.

En este trabajo se propone comparar los resultados obtenidos de un proceso de optimización topológica estructural cuando se resuelve la ecuación de estado con dos elementos finitos diferentes, a saber, CST y el propuesto por Allman. En efecto, se busca establecer la influencia del campo de rotación nodal en la topología final de una estructura. Para ello será utilizado un algoritmo de optimización basado en el concepto de derivada topológica [J. Sokolowski & A. Zochowski 1999](#), [S. Amstutz & H. Andrä 2006](#), [A.A. Novotny & Sokolowski 2013](#). La derivada topológica es una función escalar que mide la sensibilidad de un funcional costo cuando una perturbación singular es introducida en un punto arbitrario del sólido. Este concepto es el apropiado para estudiar problema de cambios de topología y se ha mostrado robusto y eficiente en diversas aplicaciones de optimización [S. Amstutz, S. M. Giusti, A. A. Novotny, E. A. de Souza Neto 2010](#), [A.A. Novotny, R.A. Feijóo, C. Padra & E. Taroco 2003](#).

Este trabajo está ordenado de la siguiente manera. En la Sección 2 se formula el problema de elasticidad plana y se presentan las bases del elemento finito con rotación nodal. El problema de optimización es formulado en la Sección 3, donde se presentan los conceptos fundamentales de derivada topológica. La Sección 4 está dedicada a la comparación de los resultados obtenidos. Para ello, se desarrollan dos ejemplos de optimización topológica estructural. El trabajo finaliza en la Sección 5, donde son presentadas las apreciaciones y

conclusiones finales.

2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

Lo usual en mecánica del continuo es describir el problema a estudiar mediante una formulación basada en algún principio variacional. En particular la elasticidad lineal isotrópica recurre a escribir un principio variacional basándose en la conservación de la energía potencial total. Los términos que componen la energía potencial total son, a saber, la energía de deformación del sólido, el trabajo de fuerzas conservativas de cuerpo y el trabajo de fuerzas aplicadas en el contorno del cuerpo. La energía potencial total del sólido elástico que se está estudiando es dada por:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\sigma(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) - 2 \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\partial\Omega_N} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) \partial S, \quad (1)$$

Donde el operador $\varepsilon(\mathbf{u})$ es un tensor de segundo orden cuya simetría se asegura solo para pequeñas deformaciones, bajo esta condición su expresión se reduce a:

$$\varepsilon = \text{Sym}(\nabla \mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u} \quad (2)$$

El operador $\sigma(\mathbf{u})$ es un tensor de segundo orden que devuelve el estado tensional del cuerpo en el punto en el que se evalúa. La simetría del mismo se asegura tanto para grandes como para pequeñas deformaciones debido a que la cantidad de movimiento angular debe conservarse. La relación constitutiva que vincula ambos conceptos es la siguiente:

$$\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{C} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \quad (3)$$

Donde \mathbf{C} es el tensor de cuarto orden utilizado para describir la respuesta constitutiva del sólido.

Para el caso de elasticidad lineal isotrópica, el tensor de cuarto orden puede caracterizarse por dos coeficientes: el módulo de Young y coeficiente de Poisson. Entonces para un estado de deformación que no genere variación en el potencial termodinámico del cuerpo, [Landau & Lifshitz 1969](#), el estado tensional asociado a una deformación pequeña es:

$$\sigma = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left(\varepsilon + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot \text{tr}(\varepsilon) I \right) \quad (4)$$

La solución que minimiza el funcional energético descrito en la ecuación (1), recibe el nombre de ecuación de Euler o ecuación de estado, del sólido elástico, su expresión es la siguiente formulación fuerte:

$$(S) = \begin{cases} \text{Div } \sigma(\mathbf{u}) & = \mathbf{P} & \text{en } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u})_n & = \mathbf{t} & \text{sobre } \partial\Omega_N \\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_i & = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

donde \mathbf{t} es una tracción externa aplicada en una parte del borde del dominio y \mathbf{u}_i es una condición de apoyo en otra parte del borde. A partir de haber descrito la ecuación de estado que minimiza el funcional energético, lo que se encuentra es la solución que satisface simultáneamente el conjunto de ecuaciones dadas por (5), a esa solución se la caracteriza por las siguientes componentes:

$$\mathbf{u} = [u, v]^T \quad (6)$$

donde u y v son las componentes del campo de desplazamientos \mathbf{u} medidas en las direcciones del sistema coordenado.

Dado un elemento triangular clásico podemos escribir la longitud de uno de sus lados como combinación lineal de la longitud de los otros dos. Para ello la base de trabajo dada por $[\xi_1; \xi_2]^T$ nos sirve para escribir la longitud del tercer lado. La siguiente figura muestra como es la disposición del elemento triangular, respecto del sistema de referencia global y local.

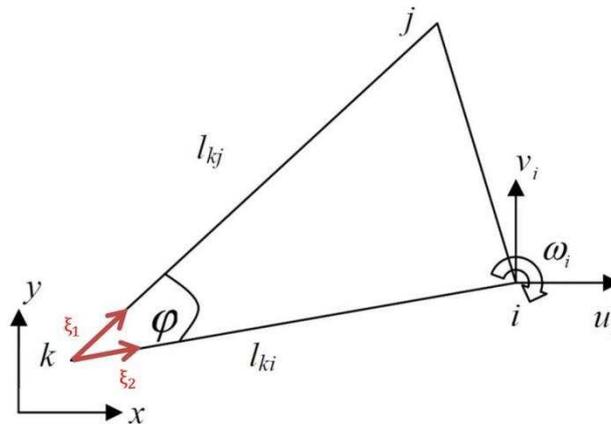


Figura 1: Sistemas de referencias en un elemento triangular

Para una cinemática de pequeñas deformaciones se procede a encontrar la biyección entre la longitud del lado combinación lineal en estado deformado y en estado sin deformar. Para encontrar dicha variación de longitud, consideramos incrementos diferenciales de los lados, cuyo vértice común es k,

$$d\xi_3^2 = (l_{3k} \cdot d\xi_1)^2 + (l_{3j} \cdot d\xi_2)^2 + 2 \cdot l_{3k} \cdot l_{3j} \cdot d\xi_1 \cdot d\xi_2 \cdot \cos \gamma_{ij} \quad (7)$$

Escribiendo en forma matricial la ecuación (7), se llega a que el tensor es simétrico, y además invertible, dado que su determinante es no nulo. Entonces:

$$d\xi_3^2 = \begin{bmatrix} l_{3j}^2 & l_{3k} \cdot l_{3j} \cdot \cos \gamma_{ij} \\ l_{3k} \cdot l_{3j} \cdot \cos \gamma_{ij} & l_{3k}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\xi_1^2 \\ d\xi_2^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

El tensor en cuestión que hace el mapeo entre lo deformado y lo original es

$$a = \begin{bmatrix} l_{3j}^2 & l_{3k} \cdot l_{3j} \cdot \cos \gamma_{ij} \\ l_{3k} \cdot l_{3j} \cdot \cos \gamma_{ij} & l_{3k}^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

El determinante de este tensor es no nulo lo cual lo hace invertible,

$$\det(a) = 4 \cdot A^2 \quad (10)$$

Donde A denota el área del elemento triangular. A partir de conocer la existencia de la inversa del tensor a , es posible estudiar la deformación basándonos en la configuración original (sin deformar).

Como es usual en el método de los elementos finitos, las componentes del campo desplazamiento se escriben como función de las funciones de forma y de los valores nodales de desplazamiento. Allman a esta interpolación le agrega la contribución de la rotación del nodo respecto de la rotación del baricentro del triángulo. Entonces cada componente de \mathbf{u} se

escribe como:

$$\begin{aligned}
 u &= u_1 \cdot \xi_1 + u_2 \cdot \xi_2 + u_3 \cdot \xi_3 + \frac{1}{2} \cdot l_{12} \cdot \text{Cos } \gamma_{12} \cdot (\omega_2 - \omega_1) \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 + \frac{1}{2} \cdot l_{32} \\
 &\quad \cdot \text{Cos } \gamma_{32} \cdot (\omega_3 - \omega_2) \cdot \xi_3 \cdot \xi_2 + \frac{1}{2} \cdot l_{13} \cdot \text{Cos } \gamma_{13} \cdot (\omega_1 - \omega_3) \cdot \xi_1 \cdot \xi_3 \\
 v &= v_1 \cdot \xi_1 + v_2 \cdot \xi_2 + v_3 \cdot \xi_3 + \frac{1}{2} \cdot l_{12} \cdot \text{Sin } \gamma_{12} \cdot (\omega_2 - \omega_1) \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 + \frac{1}{2} \cdot l_{32} \\
 &\quad \cdot \text{Sin } \gamma_{32} \cdot (\omega_3 - \omega_2) \cdot \xi_3 \cdot \xi_2 + \frac{1}{2} \cdot l_{13} \cdot \text{Sin } \gamma_{13} \cdot (\omega_1 - \omega_3) \cdot \xi_1 \cdot \xi_3
 \end{aligned} \tag{11}$$

Empleando las propiedades geométricas del triángulo, se tiene que:

$$\text{Cos } \gamma_{ij} = \frac{y_j - y_i}{l_{ij}} ; \text{Sin } \gamma_{ij} = \frac{x_j - x_i}{l_{ij}} \tag{12}$$

Por una cuestión de notación hacemos uso de las siguientes definiciones;

$$y_{ji} = y_j - y_i ; x_{ji} = x_j - x_i \rightarrow l_{ij} = \sqrt{y_{ji}^2 + x_{ji}^2} \tag{13}$$

Entonces habiendo determinado, los desplazamientos nodales y definiendo las funciones de forma como las usuales de una formulación isoparamétrica de un triángulo como se ve en [Hughes T.J.R 1987](#), se tiene que las componentes del campo desplazamiento puede escribirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 u &= u_1 \cdot \xi_1 + u_2 \cdot \xi_2 + u_3 \cdot \xi_3 + \omega_1 \frac{y_{13} \cdot \xi_1 \cdot \xi_3 - y_{21} \cdot \xi_2 \cdot \xi_1}{2} \\
 &\quad + \omega_2 \frac{y_{21} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 - y_{32} \cdot \xi_2 \cdot \xi_3}{2} + \omega_3 \frac{y_{32} \cdot \xi_3 \cdot \xi_2 - y_{13} \cdot \xi_3 \cdot \xi_1}{2} \\
 v &= v_1 \cdot \xi_1 + v_2 \cdot \xi_2 + v_3 \cdot \xi_3 + \omega_1 \frac{x_{21} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 - x_{13} \cdot \xi_3 \cdot \xi_1}{2} \\
 &\quad + \omega_2 \frac{x_{32} \cdot \xi_3 \cdot \xi_2 - x_{21} \cdot \xi_2 \cdot \xi_1}{2} + \omega_3 \frac{x_{13} \cdot \xi_3 \cdot \xi_1 - x_{32} \cdot \xi_3 \cdot \xi_2}{2}
 \end{aligned} \tag{14}$$

De esta manera a la interpolación lineal de los desplazamientos nodales clásicos se deben agregar los valores de las rotaciones del nodo respecto del baricentro del triángulo.

Debido a la cinemática de este elemento, la deformación que sufre un lado arbitrario del mismo, ya no se visualiza como una variación en su longitud sino que la contribución de la rotación hace que el lado adquiera curvatura. Esto es consecuencia de trabajar con una interpolación de mayor orden.

El campo de desplazamientos definido por \mathbf{u} , minimiza un determinado funcional energético dado por el principio variacional que se describe más adelante; el cual utilizamos en mecánica del continuo para describir los efectos termodinámicos de la deformación bajo cargas en un cuerpo.

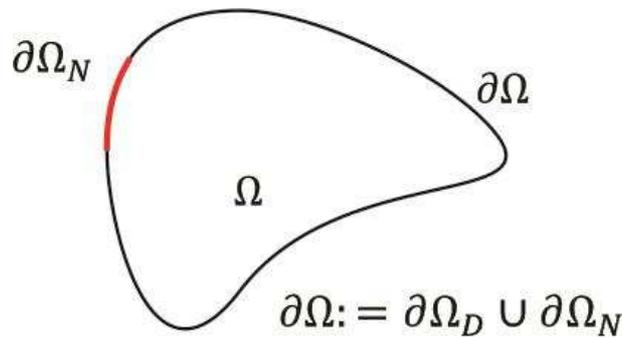


Figura 2: Dominio de estudio en elasticidad lineal

Sobre el cuerpo definido por el dominio Ω , se aplican cargas de cuerpo, las cuales alteran su estado energético. Además, sobre el contorno de Neumann, denotado por $\partial\Omega_N$ se aplican fuerzas que provocan tracciones. La función a minimizar está dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\sigma(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) - 2 \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\partial\Omega_N} (\sigma_{nn} \cdot u_n + \sigma_{nt} \cdot u_t) \partial S \quad (15)$$

La segunda integral evalúa los efectos de la tensión normal en dos direcciones, una normal al contorno y la otra tangencial al contorno de Neumann como lo establece [Hughes T.J.R 1987](#). Donde las componentes normal y tangencial son definidas como;

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \sigma \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \sigma_{nt} = \sigma \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t}) \end{cases} \quad (16)$$

La descomposición de la componente normal de este tensor en dirección normal y tangencial debe cumplir

$$\sigma_n = \sigma_{nn} \cdot \mathbf{n} + \sigma_{nt} \cdot \mathbf{t} \quad (17)$$

Donde los vectores (\mathbf{n}, \mathbf{t}) definen la dirección normal y tangencial al contorno, como puede verse en la siguiente figura.

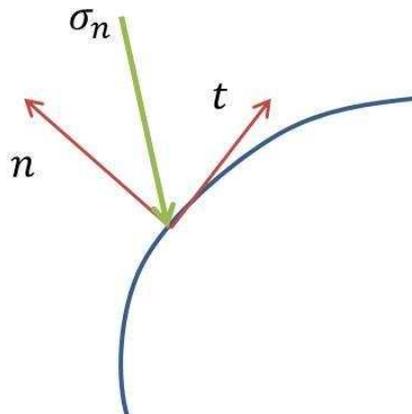


Figura 3: Descomposición de la componente normal de la tensión sobre el contorno del cuerpo

Considerando un desplazamiento virtual denotado como $[\tilde{u}_n; \tilde{u}_t]^T$, el trabajo virtual asociado; no provoca cambios en el estado energético del sistema, dado que se define este campo en donde no hay cargas de tracción en contorno, vea [Allman 1993](#). Así, el funcional a minimizar resulta:

$$\begin{aligned} \pi_M = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \epsilon(\mathbf{u}) - 2 \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_N} \sigma(\mathbf{u})_n (\tilde{u}_n + \tilde{u}_t) \, dS \\ + \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{u})_n (\tilde{u}_n - u_n) + \sigma(\mathbf{u})_n (\tilde{u}_t - u_t) \, dS \end{aligned} \quad (18)$$

Mediante técnicas clásicas de minimización de funcional de más de una variable se logra encontrar que el funcional π_M tiene su mínimo en cualquier dirección cuando su derivada se anula para cualquier incremento. De acuerdo a esto;

$$\begin{cases} \delta \mathbf{u} = \mathbf{u} + \alpha \mathbf{w} \\ \delta \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} + \alpha \mathbf{v} \end{cases} \rightarrow \frac{d\pi_M}{d\alpha} = 0 \therefore \pi_M \text{ es equipotencial en toda dirección} \quad (19)$$

La forma débil del problema asociado se puede escribir del siguiente modo. Dada $P: = \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ encuentre $\mathbf{u} \in \delta_i$ tal que para toda variación de $\{w; v\} \in V_i$, donde V_i espacio de variaciones correspondientes, contenidas en un espacio discreto que converge conforme al espacio continuo.

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_M}{d\alpha} = 0 \rightarrow \int_{\Omega} [C \cdot \nabla^s(\mathbf{u}) \cdot \nabla^s(\mathbf{w}) - 2 \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{w}] \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_N} C \cdot \{\nabla^s(w_n) \cdot (\tilde{u}_n + \tilde{u}_t) + \\ \nabla^s(u_n) \cdot (v_n - v_t)\} \, dS + \int_{\partial\Omega} C \cdot \{\nabla^s(w_n) \cdot (\tilde{u}_n - u_n) + \nabla^s(u_n) \cdot (v_n - w_n) + \\ \nabla^s(w_n) \cdot (\tilde{u}_t - u_t)\} \, dS = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Entonces el problema ahora se puede formular tanto en forma débil como en fuerte. En particular, la ecuación que resulta del proceso de minimizar el funcional se conoce como ecuación de equilibrio. Entonces la formulación fuerte de este problema se expresa a continuación.

$$(F) = \begin{cases} \text{Div } \sigma(\mathbf{u}) & = \mathbf{P} & \text{en } \Omega \\ \tilde{u}_n + \tilde{u}_t & = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_N \\ \sigma(\mathbf{u})_n & = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ \tilde{u}_n + \tilde{u}_t - (u_n + u_t) & = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (21)$$

En la ecuación de estado anterior puede verse una característica propia del elemento desarrollado en [Allman 1987](#) la cual considera al grado de libertad rotacional como un grado de libertad solo válido para aproximar mejor a la solución del método de los elementos finitos pudiendo pre establecer rotaciones pero negándole al usuario de este elemento la introducción de cargas que provoquen la rotación como lo sería un momento, ver [Allman 1993](#).

3 PROCEDIMIENTO DE OPTIMIZACIÓN.

Para entender el funcionamiento del algoritmo de optimización implementado, debe caracterizarse el problema de Elasticidad lineal isotrópica bifásica. La siguiente figura muestra como son los dominios de estudio.

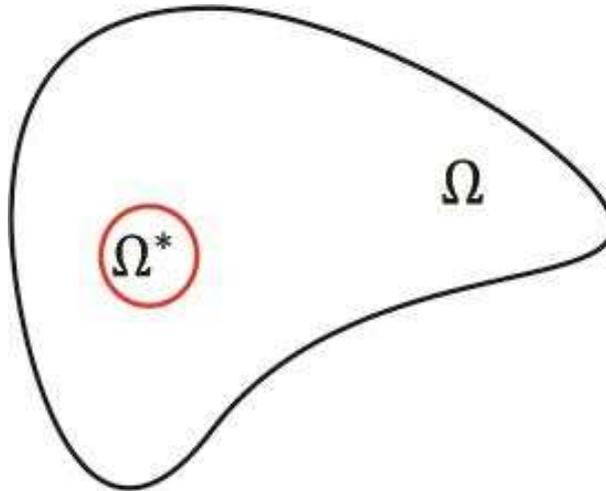


Figura 4: Representación de una perturbación en dominio continuo homogéneo

La respuesta constitutiva del cuerpo se caracteriza por tener un valor diferente para cada dominio; de acuerdo a esto podemos escribir;

$$C = \begin{cases} C & \text{En } \Omega \setminus \Omega^* \\ \gamma \cdot C & \text{En } \Omega^* \end{cases} \quad (22)$$

Por tener una diferente respuesta constitutiva, existirán diferentes valores de estados tensionales. En particular en la frontera de la inclusión Ω^* se establece que el campo de desplazamientos es continuo,

$$[[\mathbf{u}]] = 0 \quad (22)$$

El funcional a minimizar en el proceso de optimización es la energía potencial total, dada por la suma de la energía interna de deformación y el trabajo de las fuerzas externas, entonces;

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \partial S \quad (23)$$

El algoritmo de optimización utilizado se fundamenta en construir una dirección de descenso viable a partir de la información provista por la derivada topológica. Esta derivada mide la sensibilidad de un determinado funcional de forma a la introducción de una perturbación singular en su dominio. Así siendo, permite estudiar rigurosamente cambios topológicos de un sistema, ver [Novotny, A.A. & Sokolowski, 2013](#).

Teorema 1. La expansión asintótica topológica de la energía potencial total, dada por ecuación (23) es:

$$J_{\epsilon}(u_{\epsilon}) = J(u) + f(\epsilon)H\sigma(\mathbf{u}) \cdot \sigma(\mathbf{u}) + O(\epsilon) \quad (24)$$

donde el primer término corresponde a la energía potencial del sistema sin inclusión, el segundo término es la tasa de cambio de energía potencial cuando se introduce una inclusión en un punto arbitrario del dominio (derivada topológica), y el tercero contiene los elementos de mayor orden de la expansión. Además, $\sigma(\mathbf{u})$ representa el estado tensional del punto donde se está evaluando la sensibilidad y \mathbf{u} es el campo desplazamiento. El tensor de cuarto

orden H es función de los parámetros constitutivos del problema y se escribe como:

$$H = -\frac{1}{2E} \left[\frac{1-\gamma}{1+\alpha\cdot\gamma} \right] \left(4I - \frac{1-\gamma(\alpha-2\beta)}{1+\beta\gamma} (I \otimes I) \right) \quad (25)$$

Donde los coeficientes α y β valen respectivamente;

$$\alpha = \frac{1+\mu}{1-\mu} \text{ y } \beta = \frac{3-\mu}{1+\mu} \quad (26)$$

Prueba. La demostración detallada del teorema puede encontrarse en [Novotny, A.A. & Sokolowski, 2013](#)

El problema de optimización a resolver puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & J(\mathbf{u}) \\ \text{Tal que} & \|\Omega\| > 0 \end{array} \quad (27)$$

Ese problema será resuelto empleando técnicas clásicas de penalización. Entonces el problema a resolver puede escribirse equivalentemente como,

$$\text{Minimizar } L(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) + \lambda \|\Omega\| \quad (28)$$

Donde λ es un multiplicador de Lagrange que debe ajustarse manualmente para obtener la fracción de volumen deseada. La derivada topológica asociada al funcional $L(\mathbf{u})$ es dada por

$$D_T L(\mathbf{u}) = H\sigma(\mathbf{u}) \cdot \sigma(\mathbf{u}) \pm \lambda \quad (29)$$

Donde el cambio de signo del multiplicador obedece a la siguiente regla: positivo si se evalúa el progreso de la fase de material duro, y negativo si se evalúa el progreso del material blando.

El algoritmo de optimización implementado sigue los lineamientos antes descriptos. Como la solución de Allman y la solución clásica CST son ambas soluciones de la ecuación de Euler (5), puedo comparar los desempeños del optimizador considerando ambos elementos.

4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

En esta Sección son presentados dos ejemplos de aplicación, donde será utilizado el procedimiento de optimización antes descripto, pero considerando los dos elementos finitos analizados en la resolución de la ecuación de estado (5). El objetivo es realizar una comparación de los resultados obtenidos con ambos elementos.

En ambos ejemplos será utilizado un material con los siguientes parámetros característicos de la respuesta constitutiva: Módulo de Young $E = 10000$; Coeficiente de Poisson $\mu = 0.3$ y contraste material $\gamma = 1 \times 10^{-3}$. Además, como condición de Neumann se considera una carga puntual $P = 1$, colocada en diferentes posiciones según el ejemplo.

En todas las figuras, la parte en negro representa la distribución de material con Módulo de Young E y la parte en blanco es utilizada para mimetizar al vacío (ausencia de material).

4.1 Ejemplo 1.

Este primer ejemplo consiste en una viga cuadrada en voladizo, donde la carga puntual es aplicada en el vértice superior derecho en dirección vertical, según Fig. 5. Esta viga se encuentra empotrada en todo su lado izquierdo, la línea gruesa de color negro en las figuras representa la condición de empotramiento.

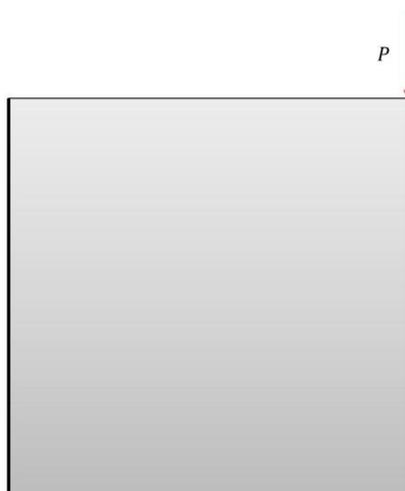


Figura 5: Esquema estructural del ejemplo de aplicación primero. Se representa el empotramiento del lado izquierdo con una línea continua

Las topologías óptimas obtenidas para los elementos finitos analizados se muestran en la Figura 6.

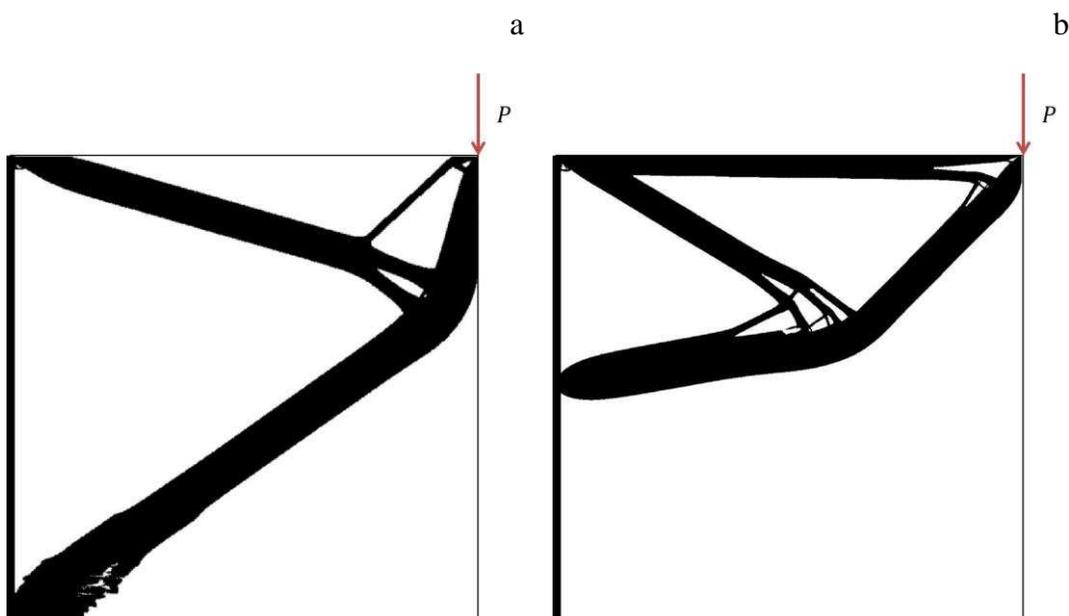


Figura 6: a) Topología óptima lograda con elemento de Allman, b) Topología óptima lograda con elemento clásico CST.

En la figura siguiente se muestra el valor de la función costo a lo largo del procedimiento de optimización, para cada uno de los elementos analizados.

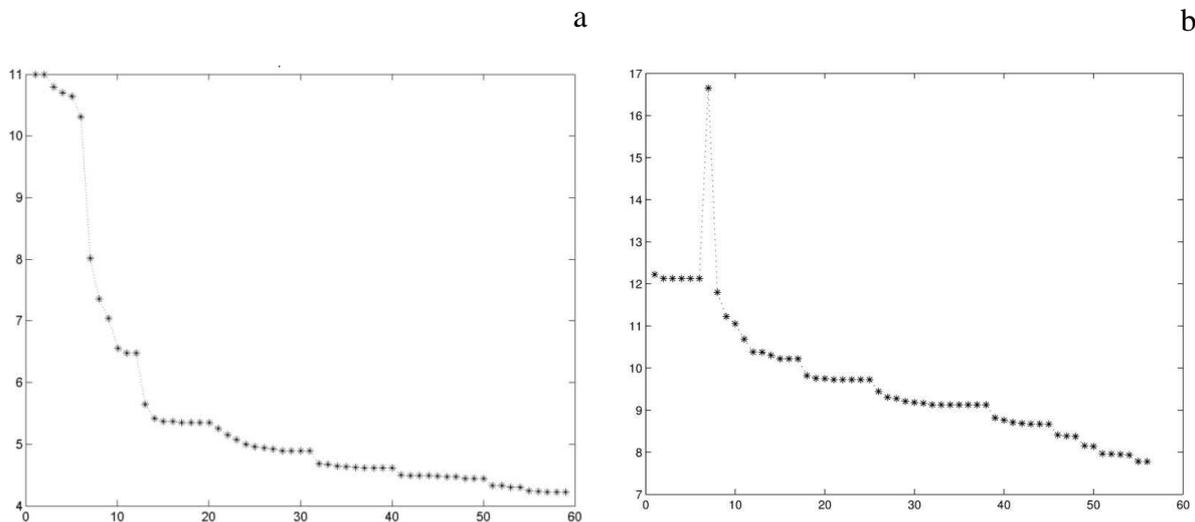


Figura 6: a) Función costo empleando el elemento de Allman, b) Función costo utilizando el elemento CST.

En relación a las topologías obtenidas, podemos concluir que la influencia del campo de rotaciones es obvia, ya que se obtienen topologías totalmente diferentes. Los valores de energía potencial total obtenidos para la topología del elemento de Allman es menor que la lograda con el CST, ver Fig. 6.

4.2 Ejemplo 2.

En este ejemplo se optimizará una viga simplemente apoyada con una carga puntual colocada a la mitad de su lado inferior. La relación de aspecto del dominio de análisis es 2x1 (la base mide 100 unidades de longitud y la altura 50 unidades de longitud). La siguiente figura muestra la disposición de cargas y vínculos para este problema.

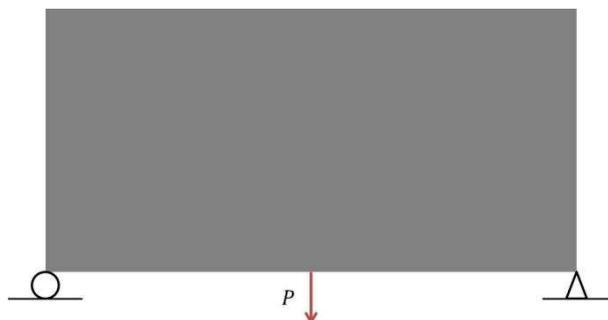


Figura 7: Esquema estructural del ejemplo de aplicación segundo.

Las topologías óptimas obtenidas para los elementos finitos analizados se muestran en la Figura 8.

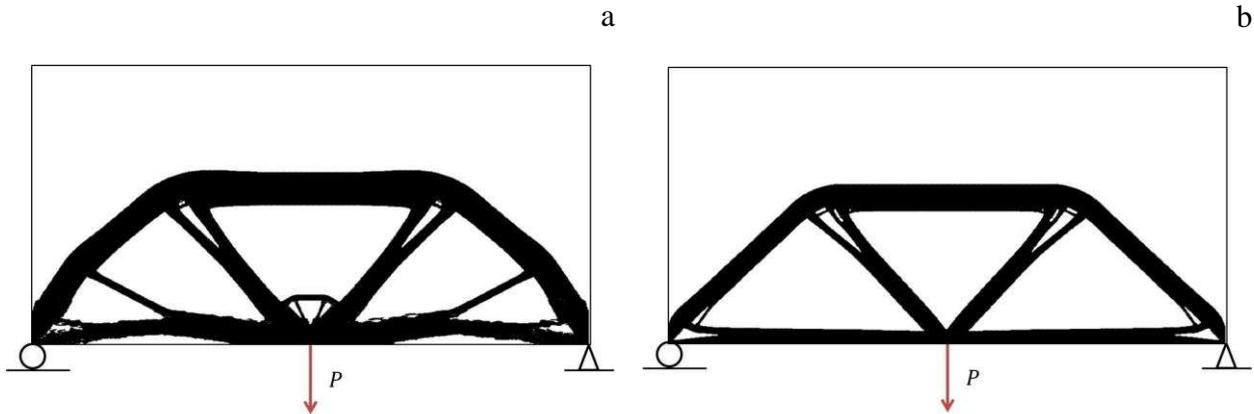


Figura 8: a) Topología óptima lograda con elemento de Allman, b) Topología óptima lograda con elemento clásico CST.

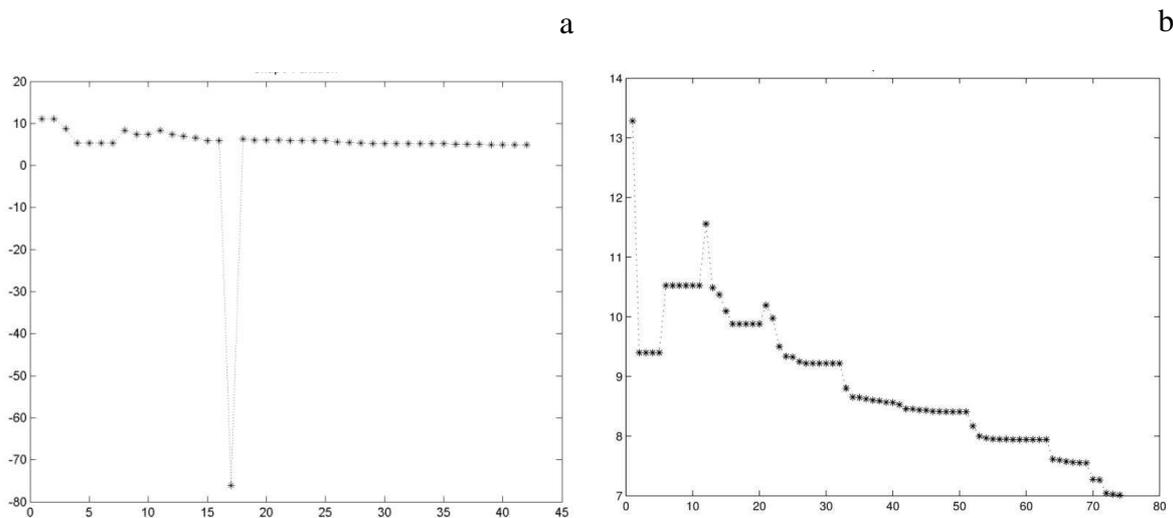


Figura 9: a) Función costo empleando el elemento de Allman, b) Función costo utilizando el elemento CST.

En este caso también podemos concluir que la influencia del campo de rotaciones es obvia, ya que las topologías son totalmente diferentes. En general, el CST indica que la topología óptima deber contener elementos rectos, similar a un reticulado, y el elemento de Allman indica que la topología óptima debe ser con elementos que desarrollen alguna curvatura. Además, aquí también los valores de energía potencial total obtenidos para la topología del elemento de Allman es menor que la lograda con el CST, ver Fig. 9.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una comparación de los resultados obtenidos de un procedimiento de optimización topológica estructural cuando el campo de rotación nodal es considerado como un grado de libertad en un problema de elasticidad plana. La comparación fue realizada considerando el clásico elemento finito CST y el desarrollado por Allman 1984. En ese elemento, la rotación de los nodos es incorporada en la formulación discreta del problema al utilizar una aproximación lineal para el desplazamiento y una cuadrática para las rotaciones.

Una de las características principales del elemento propuesto por Allman es no admitir una condición de Neumann en el grado de libertad rotacional, lo cual significa que no pueden imponerse cargas asociadas a las rotaciones (momento) como condición de contorno. Ya sobre los contornos de Dirichlet el elemento acepta rotaciones nodales prescriptas. Otra característica importante es que los desplazamientos normales a los lados del elemento son incompatibles, por lo que la convergencia de los resultados en esa dirección no es la óptima.

Para el procedimiento de optimización topológica fue utilizado el concepto de derivada topológica, aplicado al funcional de energía potencial total del sistema. Esta derivada fue utilizada como una dirección de descenso viable en un algoritmo de optimización vía funciones de level-set.

Los ejemplos realizados muestran las notables diferencias de topologías obtenidas de los dos elementos finitos. Además, las soluciones óptimas obtenidas con el elemento de Allman se corresponden con un valor de energía menor que el CST. Esto indica que con el elemento de Allman es posible obtener mejores resultados, desde el punto de vista de la optimización, que con un elemento del tipo CST. Esto nos permite concluir que la contribución del campo de rotación nodal tiene una influencia importante en la solución de la ecuación de estado, ya que es posible obtener estructuras más flexibles.

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo recibió el apoyo del programa de proyectos de investigación y desarrollo de la Universidad Tecnológica Nacional (PID/UTN-1420) y del CONICET. Los autores agradecen el apoyo económico brindado por estas instituciones.

REFERENCIAS

- Allman, D.J. A Compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Computers & Structures* 19: 1-8, 1984.
- Allman, D.J. The constant strain triangle with drilling rotations: a simple prospect for Shell analysis. *The mathematics of finite elements and applications VI MAFELAP* 233-240, 1987.
- Allman, D.J. Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 262: 645-2655, 1988.
- Allman, D.J. Variational validation of a membrane finite element with drilling rotations. *Communication in Numerical Method in Engineering*, 9: 345-351, 1993.
- Amstutz S. & André H. A new algorithm for topology optimization using a level-set method.

- Journal of Computational Physics, 216(2): 573-588, 2006.
- Amstutz S., Giusti S.M., Novotny A.A., de Souza Neto E.A. Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstructures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(6): 733-756, 2010.
- Hughes T.J.R. The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall. 1987.
- Landau & Lifshitz Física Teórica volumen 7 Teoría de la Elasticidad Reverté. 1969.
- Novotny A.A., Feijóo R.A., Padra C. & Taroco E. Topological sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:803-829, 2003.
- Novotny, A.A. & Sokolowski, J. Topological Derivatives in Shape Optimization. Series on Interaccion of Mechanics and Mathematics. Springer. 2013.
- Sokolowski J. & Zochowski A. On topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37:1251-1272, 1999.