

## ROTURA DE FIBRAS EN HORMIGONES REFORZADOS CON FIBRAS

Facundo Isla<sup>a</sup>, Bibiana Luccioni<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Estructuras “Arturo M. Guzmán”, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Independencia 1800, 4000 S.M. de Tucumán, Argentina, <http://www.herrera.unt.edu.ar/iest>, [fisla@herrera.unt.edu.ar](mailto:fisla@herrera.unt.edu.ar), [bluccioni@herrera.unt.edu.ar](mailto:bluccioni@herrera.unt.edu.ar)*

<sup>b</sup>*CONICET*

**Keywords:** Hormigón, Fibras, Acero, Deslizamiento, Compuesto, Rotura.

**Resumen.** Experimentalmente se ha observado una diferencia en la respuesta del arrancamiento de una fibra de acero con ganchos desde una matriz de mortero y una matriz de hormigón. En este fenómeno cobra mucha importancia la deformación del gancho y la deformación y/o rotura de la matriz circundante al mismo. Es importante tener en cuenta esta diferencia cuando se utiliza una probeta de arrancamiento de mortero y luego se pretende extrapolar los resultados para predecir el arrancamiento de fibras de una matriz de hormigón.

En este trabajo se estudia el fenómeno de deslizamiento considerando a la fibra como un cuerpo deformable, donde principalmente se analiza la posible rotura de la misma. Dentro de este marco se estudia la influencia del agregado grueso, principal diferencia en la composición del hormigón respecto del mortero.

Para la validación del modelo se simulan numéricamente ensayos de arrancamiento de fibras. Posteriormente se utilizan estos resultados de arrancamiento para modelar el comportamiento del hormigón reforzado con fibras mediante una modificación de la teoría de mezclas de sustancias anisótropas. Se simulan ensayos de caracterización flexión. La comparación de los resultados numéricos con los experimentales permite comprobar las bondades del modelo numérico propuesto.

## 1 INTRODUCCIÓN

Se ha observado en ensayos de arrancamiento de fibras (Isla, *et al.*, 2012) que las mismas pueden romperse o cortarse, que la matriz también se puede romper y la respuesta de arrancamiento de una fibra de acero con ganchos desde una matriz de mortero es distinta a la respuesta de arrancamiento de ese mismo tipo fibra desde una matriz de hormigón. Es importante tener en cuenta esa diferencia si se usa una probeta de arrancamiento de mortero y luego se pretende extrapolar los resultados para predecir el arrancamiento de fibras de una matriz de hormigón. En Figura 1 se presentan los ensayos de arrancamiento de 7 especímenes con fibras con gancho y matriz de mortero (P01, P02, P03, P04, P05, P11 y P12) y, Figura 2 se muestran ensayos de arrancamiento de 5 especímenes con fibras con ganchos y matriz de hormigón (C06, C07, C08, C09 y C10).

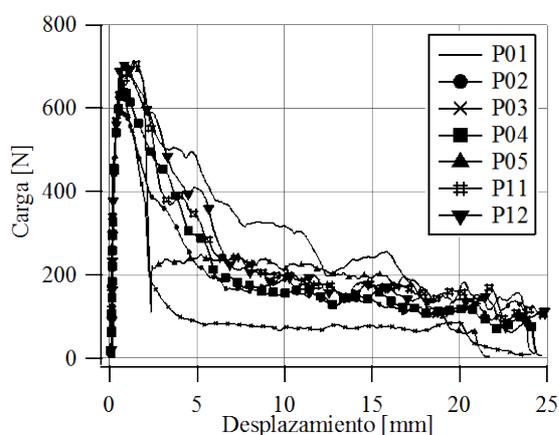


Figura 1: Curvas de arrancamiento. Fibras con gancho a  $0^\circ$ , matriz mortero.

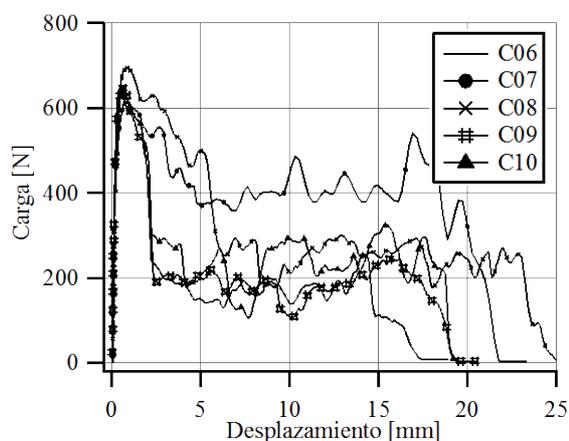


Figura 2: Curvas de arrancamiento. Fibras con gancho a  $0^\circ$ , matriz hormigón.

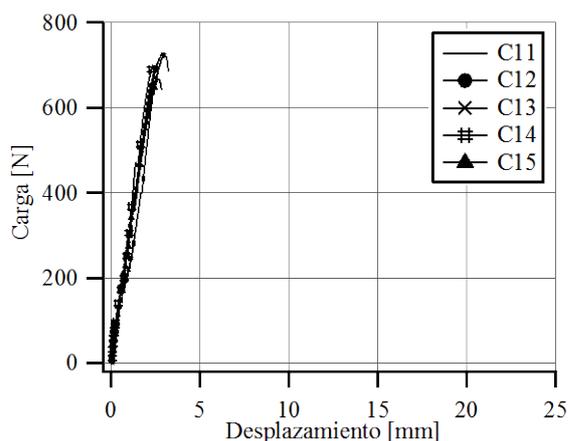


Figura 3: Curvas de arrancamiento. Fibras con gancho a  $30^\circ$ , matriz hormigón.

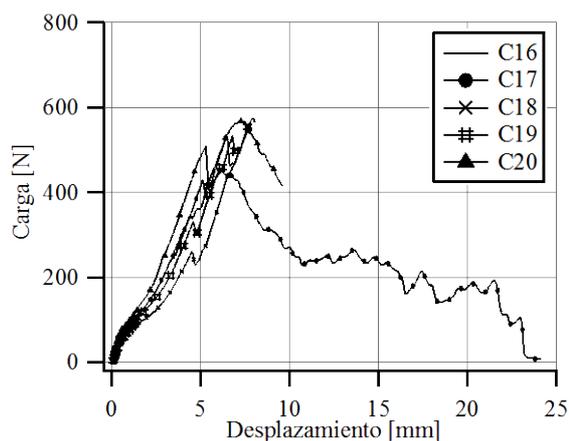


Figura 4: Curvas de arrancamiento. Fibras con gancho a  $60^\circ$ , matriz hormigón.

La diferencia en el comportamiento entre la matriz de mortero y la de hormigón se atribuye a la presencia del agregado grueso en el hormigón que tiene diferente resistencia que entre éste y el mortero. Los tramos curvos de la fibra, deben deformarse más en las zonas donde la matriz presenta mayor resistencia (mayor dureza). En la matriz de mortero que presenta resistencia uniforme, las curvas carga-desplazamiento son más suaves. Mientras que en una matriz de hormigón en el que el agregado es más resistente que el mortero, las curvas

carga-desplazamiento son más irregulares y presentan valores de carga más elevados después del pico.

La rotura de las fibras, es un fenómeno importante que, en general, no es considerado en los modelos actuales de arrancamiento. Dependiendo de la resistencia de la matriz y el estado de tensiones de la misma, de las características geométricas y mecánicas de la fibra, se puede producir la rotura de la fibra en la zona del gancho. Posteriormente a esta rotura, la fibra puede seguir transmitiendo carga a la matriz. La curva carga-desplazamiento se caracteriza por presentar una caída brusca de la carga (ver Figura 1 ensayos P03, P05 y, Figura 2 ensayos C06, C09, C10). La matriz se rompe generalmente cuando la fibra está inclinada (Bentur, *et al.*, 1996; Robins, *et al.*, 2002; Cunha, *et al.*, 2007; Cunha, *et al.*, 2008; Laranjeira, *et al.*, 2010). En estos casos también puede producirse la rotura de la fibra, pero fuera de la matriz, con lo cual la fibra deja de transmitir carga. En Figura 3 se muestran los ensayos de arrancamiento de 5 especímenes con fibras con gancho, inclinadas  $30^\circ$  y matriz de hormigón (C11, C12, C13, C14 y C15) y, en Figura 4 se muestran los ensayos de arrancamiento de 5 especímenes con fibras con gancho, inclinadas  $60^\circ$  y matriz de hormigón (C16, C17, C18, C19 y C20).

## 2 MODELO DE ARRANCAMIENTO

El modelo teórico desarrollado en este trabajo se basa en el propuesto por Chanvillard (1999), usado y modificado por diversos autores Sujivorakul y Naaman (2003), Isla y Luccioni (2009), Zile y Zile (2013), considera el deslizamiento de la fibra  $\delta$ , despreciando la deformación axial. Se obtiene mediante el planteo del Principio de Trabajos Virtuales, donde se consideran las fuerzas tangenciales que actúan en la interfaz fibra-matriz  $T_{fm}$ , la fuerza aplicada  $P$  que genera el arrancamiento y la energía de deformación de la fibra (ver Figura 5). El modelo se define mediante la siguiente expresión:

$$P = \int_L \left( \frac{d\Delta C(s + \delta)}{d\delta} M(s) + T_{fm}(s) \right) ds \quad (1)$$

donde  $L$  es la longitud interfaz,  $s$  es la coordenada sobre el eje de la fibra,  $d\delta$  es un diferencial de deslizamiento,  $d\Delta C(s + \delta)$  es un diferencial del cambio de curvatura para un cierto deslizamiento  $\delta$ ,  $M(s)$  es el momento flector y  $T_{fm}(s)$  es la resultante por unidad de longitud de las fuerzas tangenciales que actúan en interfaz fibra-matriz.

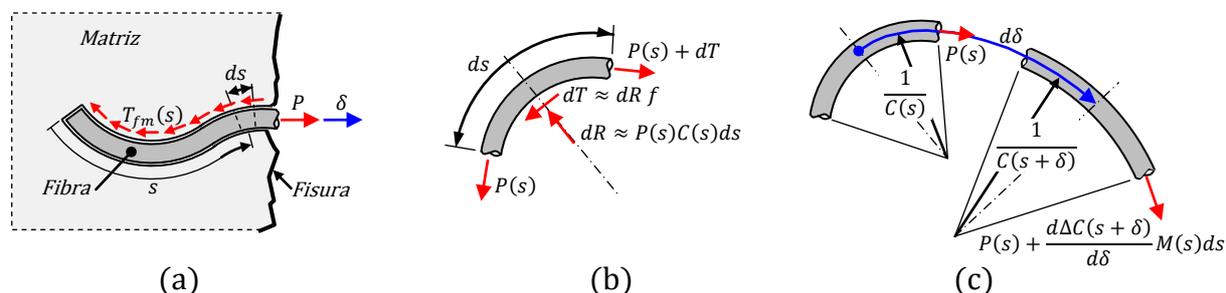


Figura 5: Mecanismos que contribuyen en la resistencia al arrancamiento de la fibra. (a) Fuerzas externas en la fibra. (b) Fricción debida a cambio de dirección. (c) Aporte debido a deformación por cambio de curvatura.

### 2.1. Deformación de la fibra

La deformación de la fibra considerada está asociada al cambio de curvatura, la cual produce momentos flectores  $M(s)$ , la deformación axial uniforme por estiramiento de la fibra

se considera despreciable. El cambio de curvatura, se define como  $\Delta C(s + \delta) = C(s + \delta) - C(s)$ , donde  $C(s)$  es la curvatura en la coordenada  $s$  antes del deslizamiento y  $C(s + \delta)$  es la curvatura en la coordenada  $s$  para un cierto deslizamiento  $\delta$ . A partir de esta definición se puede establecer que:

$$\frac{d\Delta C(s + \delta)}{d\delta} = \frac{dC(s + \delta)}{d\delta} \quad (2)$$

El momento flector se estima como,  $M(s) = EI \Delta C(s + \delta)$  y no puede ser mayor a un cierto momento umbral  $M_u$  Ec.(3), que está en función del momento plástico  $M_p = f_y \Phi_f^3 / 6$ , la normal plástica  $N_p = \pi f_y \Phi_f^2 / 4$  (donde  $f_y$  es la tensión de fluencia y  $\Phi_f$  diámetro de la fibra) y la fuerza axial  $P(s)$  que actúan en esa sección.

$$M_u = M_p \left( 1 - 0.05852 (N/N_p) - 0.68776 (N/N_p)^2 - 0.25373 (N/N_p)^3 \right) \quad (3)$$

La Ec.(3) es un ajuste numérico con un polinomio de tercer grado al diagrama de interacción Momento-Normal, para distintas posición del eje neutro.

## 2.2. Interacción en interfaz fibra-matriz $T_{fm}$

Se propone la siguiente expresión para la resultante de las fuerzas tangenciales que actúan en interfaz fibra-matriz  $T_{fm}$ :

$$T_{fm}(s) \begin{cases} = T_1(s) & \text{si } C(s) = 0 \text{ ó } C(s + \delta) \neq 0 \\ = T_2(s) & \text{si } C(s) \neq 0 \text{ y } C(s + \delta) - C(s) \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

donde  $T_1$  considera la resistencia aportada por el efecto *misfit*. Este efecto es una presión de fijación en la fibra, con origen en la retracción de la matriz durante el proceso de fraguado de la misma (Pinchin y Tabor, 1978; Naaman, *et al.*, 1991).  $T_1$  también considera el cambio de dirección de la fuerza axial y estado tensional de la matriz (Isla y Luccioni, 2009).  $T_2$  tiene en cuenta la resistencia aportada por los tramos curvos que no se pueden enderezar completamente, los mismos se observan como irregularidades en la fibra una vez extraída. Como expresa la Ec.(4), las componentes  $T_1$  y  $T_2$  no se superponen.

### 2.2.1. Componente $T_1$

Esta componente se define según la Ec.(5) (Isla y Luccioni, 2009). El primer término corresponde al efecto *misfit*. El segundo término está relacionado con el cambio de dirección en la fuerza axial. El tercer término es la fuerza tangencial generada por la presión de la matriz sobre la fibra con origen en un estado multiaxial de la matriz.

$$T_1(s) = \tau_d(s) \psi + P(s) C(s + \delta) f + (-\tilde{\sigma}) \psi f \quad (5)$$

donde  $\tau_d$  (Isla y Luccioni, 2009) es la tensión de corte en la interfaz generada por el efecto *misfit*,  $\psi$  es el perímetro de la fibra,  $P(s)$  es la fuerza axial evaluada desde el extremo de la fibra hasta la coordenada  $s$  (mediante Ec.(1) con límite de integración entre 0 y  $s$ ),  $f$  el coeficiente de roce dinámico,  $\tilde{\sigma}$  es una componente de tensión radial promedio de compresión con origen en un estado multiaxial de la matriz.

### 2.2.2. Componente $T_2$

Durante el deslizamiento de la fibra los tramos curvos no se enderezan completamente (ver Figura 6), quedando los mismos como irregularidades en el eje de la fibra. Estas

irregularidades serán mayores a menor resistencia de la matriz y viceversa. Las mismas generan una resistencia al deslizamiento, que no puede ser evaluada mediante las fuerzas tangenciales incluidas en la Ec.(5).

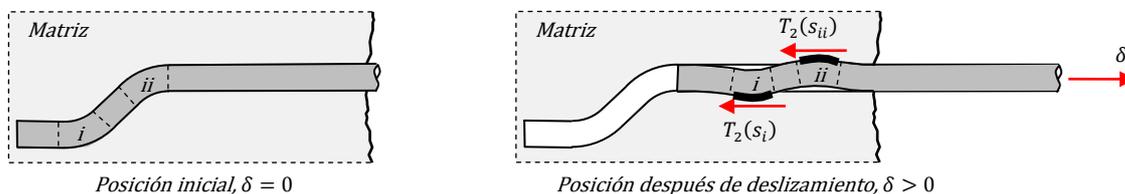


Figura 6: Efecto de las curvaturas irreducibles

Se propone evaluar este efecto mediante un valor de resistencia al arrancamiento por unidad de longitud  $t_2$ , proporcional a la curvatura inicial y calibrada con resultados experimentales.

$$T_2(s) = t_2 C(s) \tag{6}$$

$$t_2 = \frac{\bar{P}}{\left(\sum_{i=1}^n L_{ci}\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i\right)} \tag{7}$$

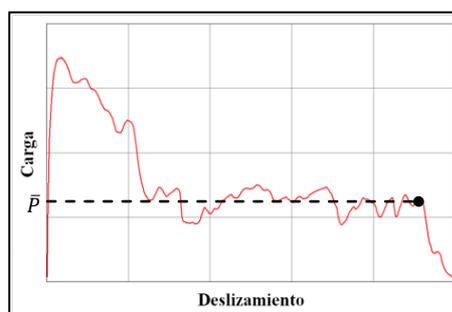


Figura 7: Curva arrancamiento de fibras. Determinación de  $\bar{P}$ .

donde  $\bar{P}$  es el valor de carga correspondiente al desplazamiento inmediatamente antes que el gancho empieza a salir de la matriz (ver Figura 7).  $n$  es la cantidad de tramos curvos,  $L_{ci}$  y  $C_i$  es la longitud y curvatura media de cada tramo curvo respectivamente. Estos tres últimos parámetros se definen según la geometría inicial de la fibra.

Cuando se tiene una matriz heterogénea, como en el caso de algunos hormigones donde el mortero es de menor resistencia que el agregado grueso, se presenta una gran variación en la curva carga-desplazamiento después del pico (ver Figura 2). Esto se atribuye a que las irregularidades de la fibra interactúan con zonas de la matriz de diferente resistencia (mortero y agregado).

### 2.3. Consideración de la inclinación de las fibras

El modelo presentado en el apartado anterior corresponde al arrancamiento de una fibra normal a la fisura. En general, en el hormigón reforzado con fibras (HRF), las fibras están dispuestas en distintas orientaciones respecto de las caras de las fisuras. El principal inconveniente al estudiar el arrancamiento de fibras inclinadas, es la poca información experimental que se dispone sobre la geometría de la fibra en las proximidades de la fisura (ver Figura 8), la cual varía a medida que aumenta la apertura de fisura  $\tilde{\delta}$ . En la fibra se genera un cambio de dirección  $\hat{\varphi}$ , lo cual aumenta la resistencia al arrancamiento y produce solicitaciones en la matriz. Estas solicitaciones pueden generar la rotura de la matriz en las zonas próximas a la fisura, reduciendo la longitud de la interfaz fibra-matriz y alterando aún más geometría inicial de la fibra. En la Figura 8-(a) y Figura 8-(b), se muestra la forma de la fibra antes y en la después de un deslizamiento  $\delta$ , respectivamente. También se muestra,

mediante una ampliación de (b), el sector por donde sale la fibra y los efectos que produce. Se considera que la matriz se rompe en una longitud  $L_{rm}$  y se genera un tramo curvo de longitud  $L_\varphi$ . En este tramo curvo se pierde parte del contacto con la matriz (zona superior), mientras que en el tramo adyacente a la derecha, se pierde completamente el contacto con la matriz y además se lo considera recto. La longitud de la interfaz fibra-matriz que no resulta afectada por el cambio de dirección de la fibra, se designa con  $L_{fm}$ . La rotura de la matriz y la generación del tramo curvo, producen que la apertura de fisura  $\tilde{\delta}$  sea mayor que el deslizamiento  $\delta$ .

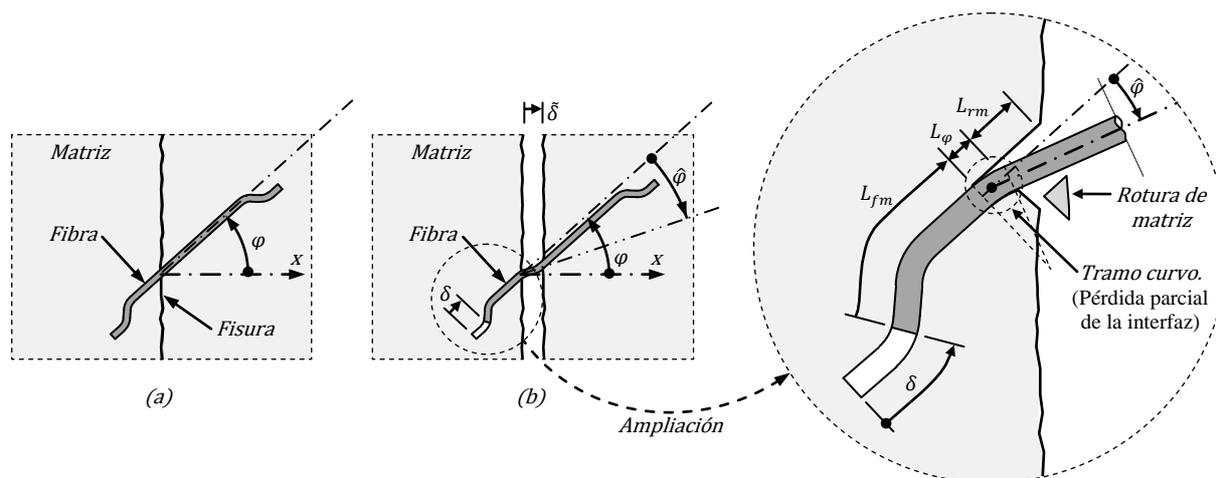


Figura 8: Geometría de fibra inclinada. (a) Sin apertura de fisura, (b) Con apertura de fisura.

En la Figura 9-(a) se muestra el tramo curvo y las fuerzas que actúan en este. Planteando el equilibrio de fuerzas, donde  $T_\varphi = R_\varphi f$ , se obtiene la fuerza radial  $R_\varphi$ :

$$R_\varphi = \frac{2 P \operatorname{sen}(\hat{\varphi}/2)}{1 + f \operatorname{tg}(\hat{\varphi}/2)} \quad (8)$$

En la Figura 9-(b) se muestra a la fuerza radial  $R_\varphi$  donde se asume que la misma se distribuye uniformemente en el tramo curvo. El máximo valor que puede alcanzar esta fuerza distribuida  $r_\varphi$ , está asociado a la resistencia a compresión de la matriz  $f_c$ , resultando  $r_\varphi = f_c \varnothing_f$ , donde  $\varnothing_f$  es diámetro de la fibra. Entonces se puede definir  $R_\varphi = f_c \varnothing_f L_\varphi$  y mediante esta expresión se puede obtener la longitud del tramo curvo  $L_\varphi$ :

$$L_\varphi = \frac{R_\varphi}{f_c \varnothing_f} \quad (9)$$

Luego con la longitud  $L_\varphi$  y a la amplitud angular  $\hat{\varphi}$  del tramo, se puede estimar el radio de curvatura  $\rho_\varphi$  del mismo:

$$\rho_\varphi = \frac{L_\varphi}{\hat{\varphi}} \quad (10)$$

En la Figura 9-(c) se muestra como se considera la variación de la curvatura en el tramo curvo y la distribución de momento. Se asume una variación lineal para la curvatura  $C(s)$ , lo cual conduce a que el momento  $M(s)$  tenga una distribución lineal, siendo nulo en los extremos. El momento  $M(s)$  no puede superar el momento umbral  $M_u$  Ec.(3).

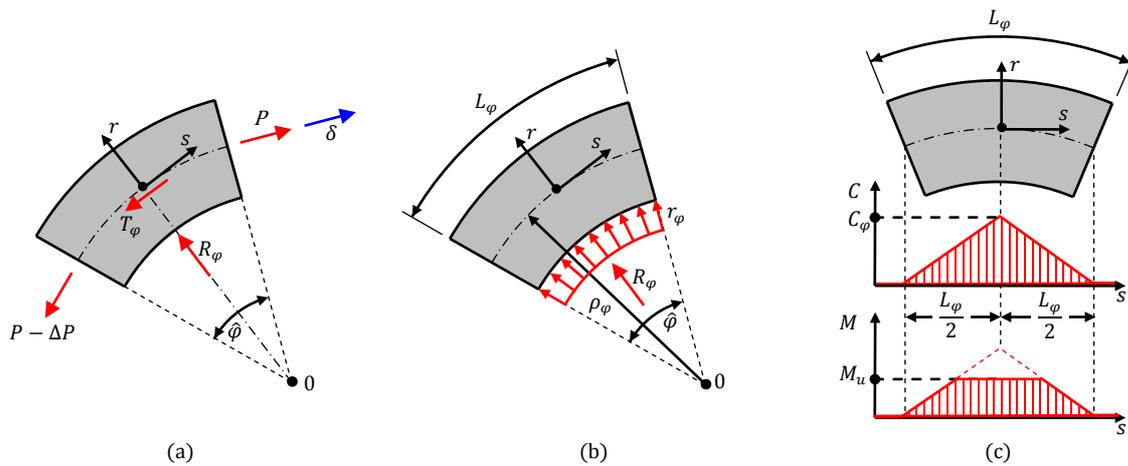


Figura 9: Tramo curvo generado por cambio de dirección en fibra inclinada. (a) Fuerzas que actúan. (b) Distribución de la fuerza radial  $R_\varphi$ . (c) Variación considerada de la curvatura en tramos curvos y distribución del momento  $M(s)$ .

En la Figura 10 se muestra la geometría de la fibra inclinada en la zona de la fisura. En base a esta se determinara el ángulo de cambio de dirección de la fibra  $\hat{\varphi}$  y, la relación entre el deslizamiento  $\delta$  y la apertura de fisura  $\tilde{\delta}$

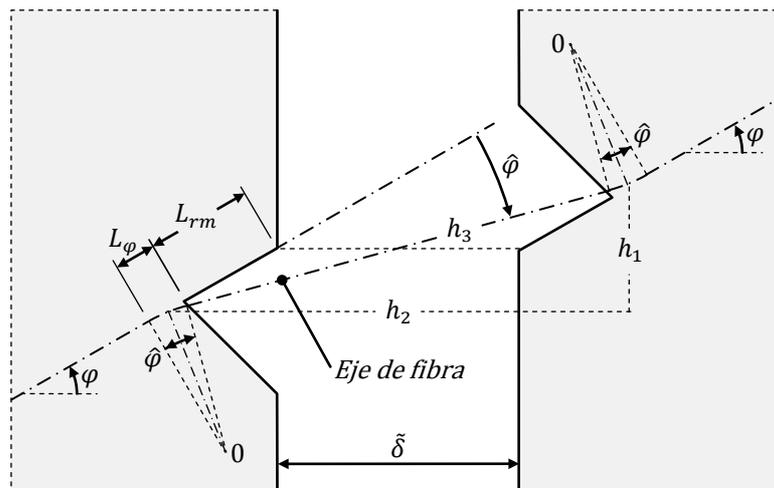


Figura 10: Geometría de fibra inclinada.

$$h_1 = (\alpha - 1)(L_\varphi + 2 L_{rm}) \text{sen}(\varphi) \quad (11)$$

$$h_3 = (1 + \varepsilon) \left( \alpha \left( \frac{L_\varphi}{2} + L_{rm} \right) + \delta \right) \quad (12)$$

$$h_2 = \sqrt{h_3^2 - h_1^2} \quad (13)$$

$$\hat{\varphi} = \varphi - \text{arctg} \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \quad (14)$$

El coeficiente  $\alpha$  define la geometría de la fibra en el arrancamiento,  $\alpha = 1$  en ensayos de arrancamiento donde la fibra esta embebida en un extremo en la matriz y  $\alpha = 2$  en ensayos de arrancamiento donde ambos extremos de la fibra están embebidos en la matriz o en el caso de

HRF (hormigón reforzado con fibras). En la Ec.(12),  $\varepsilon$  es la deformación axial del eje de la fibra en la zona de la fisura.

De la geometría definida en la Figura 10 se establece la siguiente relación entre el deslizamiento  $\delta$  y la apertura de fisura  $\tilde{\delta}$ :

$$\tilde{\delta} \approx h_2 - \alpha \left( \frac{L_\varphi}{2} + L_{rm} \right) \cos(\varphi) \quad (15)$$

## 2.4. Modelo de arrancamiento de fibras inclinadas

El límite de integración de la Ec.(1) se puede separar según tres zonas características de la fibra. La primera zona  $(0, L_0 - \delta - L_{rm} - L_\varphi)$  comprende la interfaz fibra-matriz que no es afectada por el cambio de dirección de la fibra. La segunda zona  $(L_0 - \delta - L_{rm} - L_\varphi, L_0 - \delta - L_{rm})$  es el tramo curvo generado por el cambio de dirección de la fibra debido al arrancamiento no alineado con la misma. La tercera zona  $(L_0 - \delta - L_{rm}, L_0)$  es la adyacente al tramo curvo y se asume que es un tramo recto.

$$\begin{aligned} P = & \int_0^{L_0 - \delta - L_{rm} - L_\varphi} \left( \frac{dC(s + \delta)}{d\delta} M(s) + T_{fm}(s) \right) ds \\ & + \int_{L_0 - \delta - L_{rm} - L_\varphi}^{L_0 - \delta - L_{rm}} \left( \frac{dC(s + \delta)}{d\delta} M(s) + T_{fm}(s) \right) ds \\ & + \int_{L_0 - \delta - L_{rm}}^{L_0} \left( \frac{dC(s + \delta)}{d\delta} M(s) + T_{fm}(s) \right) ds \end{aligned} \quad (16)$$

La primera zona es el caso general de deslizamiento, donde participan todas las componentes que aportan resistencia al arrancamiento. La integral se resuelve desde el extremo de la fibra hacia la fisura, para cada deslizamiento  $\delta$ , teniendo en cuenta que el integrando depende  $P(s)$ .

La segunda zona es un tramo curvo, donde se ha perdido parte de la interfaz fibra-matriz en el perímetro de la fibra (ver Figura 8). Esta pérdida de interfaz tiene efecto en las fuerzas tangenciales que actúan en la zona, donde resulta que  $T_{fm}(s) = P(s) C(s + \delta) f$ . La integral de esta fuerza tangencial por unidad de longitud  $T_{fm}(s)$ , en el correspondiente intervalo, es equivalente a  $R_\varphi f$ , donde  $R_\varphi$  es la fuerza radial debida al cambio de dirección de la fuerza axial  $P$  (ver Figura 9). En esta zona también se tiene el aporte de la deformación de la fibra por cambio de curvatura. Según lo considerado en la Figura 9-(c),  $dC(s + \delta)/d\delta = 2C_\varphi/L_\varphi$ , para simplificar el cálculo se considerara  $M(s)$  uniforme en el tramo y se lo designa con  $M_\varphi$  ( $C_\varphi$ ,  $L_\varphi$  y  $M_\varphi$ , son la curvatura, la longitud y el momento umbral  $M_u$  en el tramo curvo respectivamente, ver Figura 9). Integrando, el aporte de la deformación de la fibra, resulta igual a  $2 C_\varphi M_\varphi$ .

La tercera zona no está en contacto con la matriz (no hay interfaz fibra-matriz,  $T_{fm}(s) = 0$ ) y además se asume que es un tramo recto ( $dC(s + \delta)/d\delta = 0$ ), por lo cual esta zona no aporta resistencia en el arrancamiento de la fibra.

Reemplazando los resultados de las integrales en Ec.(16) se obtiene:

$$P = \int_0^{L_0 - \delta - L_{rm} - L_\varphi} \left( \frac{dC(s + \delta)}{d\delta} M(s) + T_{fm}(s) \right) ds + R_\varphi f + 2C_\varphi M_\varphi \quad (17)$$

Al reemplazar Ec.(8) en Ec.(17) y despejar la fuerza axial de la fibra  $P$ , finalmente se obtiene un modelo de arrancamiento para fibras inclinadas:

$$P = F_{fm}(f, \hat{\varphi}) \left( \int_0^{L_0 - \delta - L_{rm} - L_\varphi} \left( \frac{dC(s + \delta)}{d\delta} M(s) + T_{fm}(s) \right) ds + 2C_\varphi M_\varphi \right) \quad (18)$$

$$F_{fm}(f, \hat{\varphi}) = \left( 1 - \frac{2f \operatorname{sen}(\hat{\varphi}/2)}{1 + f \operatorname{tg}(\hat{\varphi}/2)} \right)^{-1} \quad (19)$$

## 2.5. Rotura de matriz

Cuando la fibra o un tramo de la misma está inclinado respecto a la superficie de la fisura, se puede producir la rotura de la matriz. Experimentalmente se observa que la superficie de rotura que genera una fibra inclinada se puede asemejar a una superficie cónica. Se adopta entonces una superficie cónica compuesta (ver Figura 11) que depende de la orientación de la fibra  $\varphi$  y la longitud de interfaz perdida en la rotura  $L_{rm}$ . Para determinar  $L_{rm}$  es necesario analizar las fuerzas que actúan en la porción de matriz a romperse, obteniendo una relación entre la fuerza de arrancamiento y la longitud de interfaz perdida en la rotura (ver Ec.(22)).

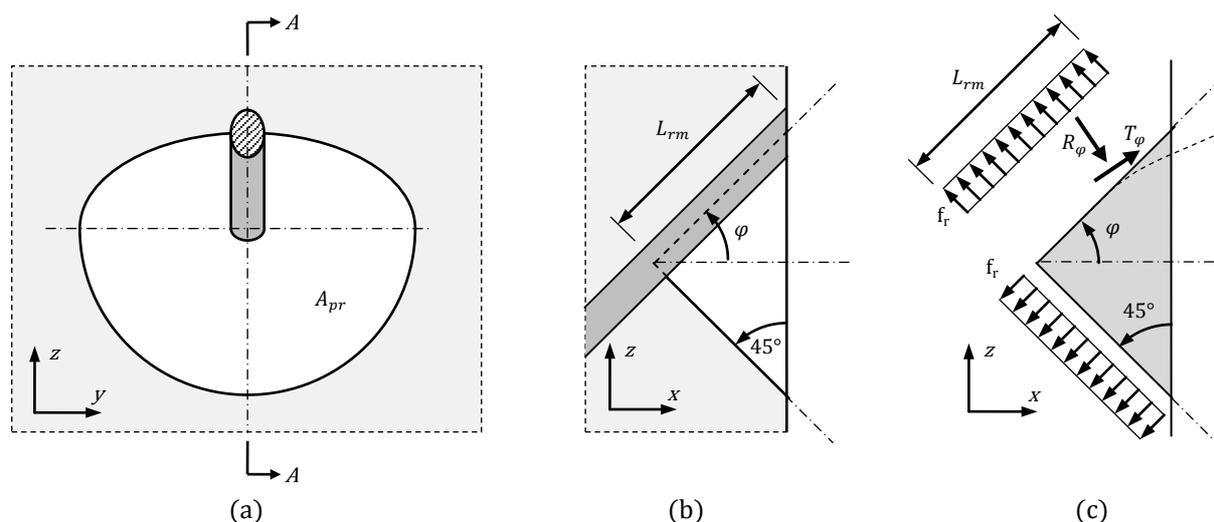


Figura 11: Superficie de rotura adoptada. (a) Vista frontal. (b) Corte AA. (c) Fuerzas que actúan en la porción de matriz a romperse

Área proyectada de la superficie de rotura sobre el plano de fisura:

$$A_{pr} = 0,5 \pi L_{rm}^2 \cos(\varphi) (\cos(\varphi) + \operatorname{sen}(\varphi)) \quad (20)$$

Equilibrio de fuerzas en la porción de matriz a romperse:

$$R_\varphi \operatorname{sen}(\varphi - \hat{\varphi}/2) + T_\varphi \cos(\varphi - \hat{\varphi}/2) - f_r A_{pr} = 0 \quad (21)$$

donde  $R_\varphi$  se define según Ec.(8), su dirección es  $(\pi/2 - \varphi + \hat{\varphi}/2)$  respecto de la horizontal. Reemplazando Ec.(8) en Ec.(21), conociendo que  $T_\varphi = R_\varphi f$  y ordenando, se obtiene la fuerza axial  $P$  de la fibra que genera una rotura de matriz  $L_{rm}$ :

$$P = f_t L_{rm}^2 F_{rm}(f, \varphi, \hat{\varphi}) \quad (22)$$

$$F_{rm}(f, \varphi, \hat{\varphi}) = \frac{\pi(1 + f \operatorname{tg}(\hat{\varphi}/2)) \cos(\varphi) (\cos(\varphi) + \operatorname{sen}(\varphi))}{4(\operatorname{sen}(\varphi - \hat{\varphi}/2) + f \cos(\varphi - \hat{\varphi}/2)) \operatorname{sen}(\hat{\varphi}/2)} \quad (23)$$

### 2.6. Rotura de fibra

En este trabajo para el estudio de rotura de la fibra se diferencias dos casos: (a) La fuerza axial  $P(s)$  es menor a la normal plástica  $N_p$  y (b) La fuerza axial  $P(s)$  es igual a la normal plástica  $N_p$ .

En el caso (a) el eje de la fibra no se deforma, pero si aparecen deformaciones plásticas por cambio de curvatura, que pueden llevar a la rotura de la fibra.

En el caso (b), en una cierta coordenada  $s$ , la fibra alcanza la fuerza máxima que puede admitir. El tramo de fibra comprendido entre el extremo y la coordenada  $s$  no desliza y el tramo posterior a esta coordenada tendrá un deslizamiento debido de la deformación plástica del eje de la fibra. En estas condiciones el modelo de arrancamiento propuesto no se puede aplicar, pero tampoco es necesario hacerlo ya que se conoce la fuerza que soporta la fibra  $P = N_p$  y la apertura de fisura correspondiente  $\tilde{\delta} = \delta + \varepsilon(L_o - s)$ .

Para evaluar la rotura de la fibra, teniendo en cuenta el estado de deformación, tensión y la forma de la sección, se propone usar el *Trabajo Plástico* generado en la sección de fibra en estudio  $W_f^p$ . El criterio de rotura se escribe como:

$$W_f^p - \tilde{W}_f^p = 0 \quad (24)$$

donde  $\tilde{W}_f^p$  es el trabajo plástico límite que se alcanza en un ensayo uniaxial y se debe verificar que  $W_f^p - \tilde{W}_f^p \leq 0$ . El trabajo plástico generado en toda la sección es:

$$W_f^p = \int_{A_f} w_f^p dA = \int_{A_f} \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p dA \quad (25)$$

donde  $A_f$  es el área de la sección transversal de la fibra,  $w_f^p$  es el trabajo plástico por unidad de área. En el caso uniaxial perfectamente plástico, considerando como simplificación la tensión uniforme tanto en tracción como en compresión, resulta  $w_f^p = \sigma(r, t)\varepsilon^p(r, t)$ ,  $\sigma(r, t)$  y  $\varepsilon^p(r, t)$  son la tensión y deformación plástica en la coordenada  $(r, t)$  de la sección, su distribución en  $t$  es uniforme y la distribución en  $r$  se indicada en la Figura 12.

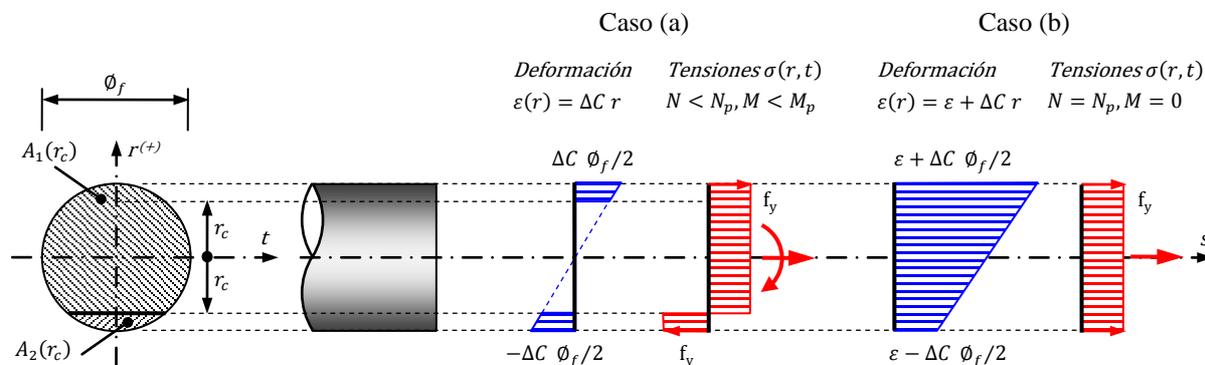


Figura 12: Distribución de tensiones y deformaciones para el planteo de los diagramas de interacción momento-normal y estimación de la densidad de energía de deformación.

El trabajo plástico límite de la sección de fibra  $\tilde{W}_f^p$  se calcula como:

$$\tilde{W}_f^p = f_y A_f \varepsilon_{rot} \quad (26)$$

donde  $\varepsilon_{rot}$  es la deformación localizada que genera la rotura en el ensayo de tracción uniaxial.

El parámetro  $\varepsilon_{rot}$  debe determinarse experimentalmente, pero una vez definido es único para el tipo de la fibra. Numéricamente (ver Tabla 5) se estimó que debería ser próximo a  $\varepsilon_{rot} = 0.19$ , para generar la rotura de la fibra en la zona del gancho.

Una vez que se rompe, se pierde una longitud de fibra  $L_{rf} = s$ , donde  $s$  es la coordenada para la cual se cumple el criterio de rotura.

Resolviendo la Ec.(25) para los caso (a) y (b) se obtienen las Ec.(27) y Ec. (28) respectivamente. En el caso (a) la integral del trabajo plástico por unidad de área, en la sección de fibra dentro del intervalo  $(-r_c, r_c)$  es nula.

$$W_f^p = f_y \Delta C \frac{4}{3} \left( \sqrt{(\phi_f/2)^2 - r_c^2} \right)^3 \quad (27)$$

$$W_f^p = f_y \left( \Delta C \pi (\phi_f/2)^3 + A_f (\varepsilon^p - \Delta C \phi_f/2) \right) \quad (28)$$

donde  $f_y$  es la tensión de fluencia de la fibra,  $\Delta C$  es el cambio de curvatura respecto a la geometría inicial de la fibra,  $\phi_f$  es el diámetro de la fibra y  $r_c$  es la posición del eje neutro (ver Figura 12). Este último se define en forma implícita mediante la Ec.(29).

$$0 = \frac{\pi N}{2 N_p} + \arcsen \left( \frac{2}{\phi_f} r_c \right) + \left( \frac{2}{\phi_f} r_c \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{\phi_f} r_c \right)^2} \quad (29)$$

Resolver la Ec.(29) para obtener  $r_c$  requiere aplicar un método iterativo. En este trabajo para evitar el método iterativo se usa la Ec.(30) que da una buena aproximación para  $r_c$ , en el intervalo  $[-\phi_f/2, 0]$  y fue propuesta en base a un ajuste numérico de la Ec.(29):

$$r_c \approx -\frac{\phi_f}{20} \left( \frac{11}{\pi} \arcsen \left( \frac{N}{N_p} \right) + \frac{9 N}{2 N_p} \right) \quad (30)$$

### 3 MODELO PARA HRF

Se puede considerar al HRF (hormigón reforzado con fibras) como un material compuesto formado por una matriz frágil de hormigón con fibras cortas dispersas en la misma que pueden despegarse y deslizarse. En general las fibras no están distribuidas de manera aleatoria sino que siguen cierta distribución preferencial relacionada con la forma de colado del HRF y el molde. Una de las maneras más simples de modelar un compuesto usando información de la mesoescala es a través de la teoría de mezclas.

La teoría de mezclas para materiales permite considerar el comportamiento simultáneo de todas las fases de un compuesto y a partir de la combinación de los mismos obtener el comportamiento del conjunto. Cada una de las sustancias básicas puede tener una ley constitutiva propia, isótropa u ortótropa. Se basa en las siguientes hipótesis: i)-En cada volumen infinitesimal del compuesto participan el conjunto de sustancias componentes. ii)-Cada componente contribuye en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica. iii)-El volumen ocupado por cada componente es menor que el volumen ocupado por el compuesto. iv)-Todos los componentes poseen la misma

deformación (ecuación de cierre o compatibilidad). Esta última, en pequeñas deformaciones, particularizada para el caso de compuesto formado por matriz y fibra se escribe como:

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})_m = (\varepsilon_{ij})_f \quad (31)$$

donde  $\varepsilon_{ij}$ ,  $(\varepsilon_{ij})_m$  y  $(\varepsilon_{ij})_f$  son los tensores de deformación del conjunto (HRF), de la matriz de hormigón y de las fibras respectivamente. Esta hipótesis Ec.(31) es una restricción muy fuerte que no se cumple en el caso del HRF, en que se conoce a priori que las fibras se deslizan respecto de la matriz. Sin embargo, se puede considerar ese deslizamiento relativo de manera indirecta, modificando la ecuación constitutiva de las fibras (Luccioni y López, 2002).

Por otro lado, la densidad de energía libre por unidad de volumen del compuesto puede escribirse como (Truesdell y Toupin, 1960):

$$\Psi(\varepsilon_{ij}, \alpha_i) = \sum_{c=1}^n k_c \Psi_c(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ci}) = k_m \Psi_m(\varepsilon_{ij}, \alpha_{mi}) + k_f \Psi_f(\varepsilon_{ij}, \alpha_{fi}) \quad (32)$$

donde  $\Psi_c(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ci})$  es la energía libre por unidad de volumen correspondiente a cada una de las sustancias componentes,  $k_c = dV_c/dV$  su fracción de volumen y  $\alpha_{ci}$  un conjunto de variables internas correspondiente a dicha componente.

La ecuación constitutiva secante puede obtenerse a partir de las relaciones de Coleman que garantizan el cumplimiento de la desigualdad de Clasius Duhem (Lubliner, 1972):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{kl}, \alpha_k)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial \Psi_c(\varepsilon_{kl}, \alpha_{kc})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c (\sigma_{ij})_c \quad (33)$$

donde las tensiones en cada una de las componentes  $(\sigma_{ij})_c$  se obtienen de las ecuaciones constitutivas correspondientes.

### 3.1. Modelación de la matriz

En este trabajo se utiliza para modelar el hormigón la parte plástica del modelo de daño plástico modificado (Luccioni y Rougier, 2005), que permite simular el comportamiento de materiales friccionales del tipo del hormigón bajo distintos estados de carga incluyendo altos niveles de confinamiento.

### 3.2. Modelación de las fibras

Si bien el acero del cual están hechas las fibras puede considerarse como un material isótropo, la geometría de las fibras y la posibilidad de deslizarse sólo en la dirección axial de las mismas hacen que el comportamiento de las fibras sea marcadamente ortótropo. Por esa razón se utiliza un modelo elastoplástico ortótropo para describir su comportamiento. El tratamiento de la ortotropía se realiza mediante el concepto de mapeo de espacios (Betten, 1988; Luccioni, *et al.*, 1995), en el cual se puede utilizar un modelo isótropo para representar el comportamiento inelástico de las fibras en un espacio isótropo ficticio. Dentro de las deformaciones permanentes de las fibras se incluyen las deformaciones inelásticas de la interfaz fibra-matriz y de esta forma se incluye el deslizamiento relativo dentro de las ecuaciones constitutivas de las fibras. Se utiliza un modelo de tipo elastoplástico para representar las deformaciones inelásticas. Es un enfoque similar al de Luccioni y López (2002) pero en este caso solo se define una función de discontinuidad o umbral de comportamiento inelástico.

### 3.2.1. Modelo elastoplástico isótropo para las fibras

La ecuación constitutiva secante de las fibras se escribe como:

$$(\sigma_{ij})_f = (C_{ijkl})_f \left( (\varepsilon_{kl})_f - (\varepsilon_{kl}^{pd})_f \right) \quad (34)$$

donde  $(C_{ijkl})_f$  es la rigidez elástica y  $(\varepsilon_{kl}^{pd})_f$  representa la deformación inelástica de la fibra.

Para definir el umbral de comportamiento inelástico  $F$  (función umbral de plasticidad-deslizamiento convexa, Maugin (1992)) se usa una función de discontinuidad similar a la función de fluencia de la teoría de la plasticidad:

$$F \left( (\sigma_{ij})_f, \kappa^{pd} \right) = f \left( (\sigma_{ij})_f \right) - K(\kappa^{pd}) \leq 0 \quad (35)$$

donde  $K(\kappa^{pd})$  representa la tensión de arrancamiento en función de una variable de endurecimiento inelástica y se obtiene del *modelo de arrancamiento de fibras*.  $f$  es la tensión equivalente que se define como en el criterio de Von Mises y se puede expresar en función segundo invariante del tensor desviador de tensiones  $J_2$ :

$$f \left( (\sigma_{ij})_f \right) = \sqrt{3J_2} \quad (36)$$

La evolución de las deformaciones inelásticas se obtiene a través de una regla de flujo:

$$(\dot{\varepsilon}_{ij}^{pd})_f = \dot{\lambda}^{pd} \frac{\partial G}{\partial (\sigma_{ij})_f} \quad (37)$$

donde  $G$  es la función de potencial y debe ser convexa;  $\lambda^{pd}$  es el parámetro de consistencia de plasticidad-deslizamiento. En este trabajo se usa flujo asociado, utilizando como criterios de umbral y potencial la función de Von Mises. La evolución de la variable interna se obtiene como:

$$\dot{\kappa}^{pd} = \dot{\lambda}^{pd} h_{ij}^{pd} \frac{\partial G}{\partial (\sigma_{ij})_f} = h_{ij}^{pd} (\dot{\varepsilon}_{ij}^{pd})_f = \frac{1}{g_{pd}} (\sigma_{ij})_f (\dot{\varepsilon}_{ij}^{pd})_f \quad (38)$$

donde  $g_{pd} = G_{pd}/L_e$  es la máxima densidad de energía disipada en el arrancamiento de fibra,  $G_{pd}$  es la energía disipada de arrancamiento de fibra y  $L_e$  es la longitud característica del elemento finito.

Las condiciones de carga-descarga se derivan de las condiciones de Kun Tucker para problemas con restricciones unilaterales:

$$\dot{\lambda}^{pd} \geq 0 \quad F \leq 0 \quad \dot{\lambda}^{pd} F = 0 \quad (39)$$

### 3.2.2. Consideración de la ortotropía

La formulación ortótropa parte de la hipótesis de que existen dos espacios (Betten, 1988; Luccioni, et al., 1995): un espacio ortótropo real y un espacio isótropo ficticio. Los tensores de tensión en ambos espacios están relacionados mediante una transformación del tipo:

$$\tau_{kl} = A_{klij} \sigma_{ij} \quad (40)$$

donde  $\tau_{kl}$  y  $\sigma_{ij}$  son los tensores de tensión en los espacios isótropo ficticio y ortótropo real respectivamente.  $A_{klij}$  es un tensor de cuarto orden, que contiene la información sobre la ortotropía del material que debe ser obtenida a partir de ensayos. Existen distintas alternativas

para definir el tensor  $A_{klij}$  (Oller, *et al.*, 1995; Car, *et al.*, 1999; Oller, *et al.*, 2003). La manera más simple de hacerlo es a través de un tensor diagonal de cuarto orden (Toledo, *et al.*, 2008) y es la manera en la cual se lo utiliza en este trabajo:

$$A_{klij} = \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{km} \delta_{ln} \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}_{mn}} \quad (41)$$

donde  $\bar{\tau}$  es el umbral de comportamiento inelástico en el espacio isótropo ficticio (idéntico en todas direcciones) y  $\bar{\sigma}_{mn}$  es el valor de dicho umbral en la dirección  $m$  en el plano de normal  $n$  en el espacio ortótropo real. La transformación Ec. (40) permite utilizar funciones de umbral de comportamiento inelástico  $\bar{F}$  y funciones de potencial  $\bar{G}$  del espacio isótropo ficticio para definir las funciones umbral  $F$  y potencial  $G$  del espacio ortótropo real:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = \bar{F}(\tau_{ij}, \bar{\kappa}) = 0 \quad (42)$$

$$G(\sigma_{ij}, \kappa) = \bar{G}(\tau_{ij}, \bar{\kappa}) \quad (43)$$

donde  $\kappa$  y  $\bar{\kappa}$  son variables internas correspondientes a los espacios ortótropo real y isótropo ficticio respectivamente.

A partir de la Ec.(41) y Ec.(42), la tensión equivalente  $f$  definida en el espacio ortótropo real, se puede expresar en función segundo invariante del tensor desviador de tensiones  $\bar{J}_2$  en el espacio isótropo ficticio:

$$f((\sigma_{ij})_f) = \bar{f}((\tau_{ij})_f) = \sqrt{3\bar{J}_2} \quad (44)$$

donde  $\bar{f}$  la tensión equivalente en el espacio isótropo ficticio.

A partir de la Ec.(41) y Ec.(43), la evolución de la deformación inelástica en el espacio real  $(\dot{\varepsilon}_{ij}^{pd})_f$ , se pueden calcular mediante:

$$(\dot{\varepsilon}_{ij}^{pd})_f = \dot{\lambda}_f^{pd} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda}_f^{pd} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \tau_{kl}} A_{klij} \quad (45)$$

En Ec.(45) se puede observar que el flujo inelástico se orienta en la dirección de menor resistencia.

Definiendo adecuadamente las componentes del tensor  $A_{klij}$  se puede lograr que las fibras deslicen (experimenten deformaciones inelásticas) sólo en la dirección axial. En general el tensor de transformación se define en las direcciones principales de ortotropía de las fibras y luego se rota a coordenadas globales:

$$A_{klij} = a_{im} a_{jn} a_{kr} a_{ls} \hat{A}_{mnr} \quad (46)$$

donde  $a_{im}$ ,  $a_{jn}$ ,  $a_{kr}$ ,  $a_{ls}$  son cosenos directores que definen la orientación de la fibra y  $\hat{A}_{mnr}$  representa al tensor  $A_{klij}$  en coordenadas locales:

$$\hat{A}_{mnr} = \delta_{mv} \delta_{nw} \delta_{rv} \delta_{sw} \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}_{vw}} \quad (47)$$

$$\bar{\sigma}_{vw} = (1000 - 999\delta_{v1}\delta_{w1})\bar{\tau} \quad (48)$$

### 3.2.3. Determinación de $K(\kappa^{pd})$

A partir de las curvas de arrancamiento de fibras, se construye la curva de endurecimiento  $K(\kappa^{pd})$ . La curva de arrancamiento de fibra, es una relación carga-desplazamiento, donde el

desplazamiento es representado por la apertura de fisura  $\tilde{\delta}$ . Para construir la curva de endurecimiento se eliminan las deformaciones elásticas de la fibra contenidas en la apertura de fisuras, obteniendo la apertura inelástica de fisura  $\tilde{\delta}^{pd}$ . Esta última contiene el deslizamiento de la fibra  $\delta$  y además, en fibras inclinadas incluye el efecto de rotura de matriz.

Para cada valor de apertura de fisura  $(\tilde{\delta})_i$ , se calcula la tensión axial de la fibra  $(\sigma_P)_i$ , que es equivalente al valor de la función de endurecimiento  $(K)_i$ . También se calcula la apertura inelástica de fisura  $(\tilde{\delta}^{pd})_i$ , a partir de la cual se determina el valor de la variable de endurecimiento  $(\kappa^{pd})_i$  correspondiente. Entonces el valor de la función de endurecimiento se calcula como:

$$(K)_i = (\sigma_P)_i = P((\tilde{\delta})_i)/A_f \quad (49)$$

donde  $P((\tilde{\delta})_i)$  es la fuerza de arrancamiento para una cierta apertura de fisura y  $A_f$  es la sección transversal de la fibra.

La variable de endurecimiento  $\kappa^{pd}$  se calcula como una relación de áreas por debajo de la curva de arrancamiento de fibra expresada en *Tensión-Apertura inelástica de fisura* ( $\sigma_P$  vs.  $\tilde{\delta}^{pd}$ ):

$$(\kappa^{pd})_i = \frac{1}{\tilde{G}_{pd}} \int_0^{(\tilde{\delta}^{pd})_i} \sigma_P d\tilde{\delta}^{pd} \quad (50)$$

donde  $\tilde{G}_{pd}$  es el área total bajo la curva de arrancamiento de fibra expresada en  $\sigma_P$  vs.  $\tilde{\delta}^{pd}$ .

## 4 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

### 4.1. Modelo de Arrancamiento

El modelo desarrollado para arrancamiento de fibras inclinadas presenta dos incógnitas, la fuerza de arrancamiento  $P$  y la longitud de interfaz perdida por rotura de matriz  $L_{rm}$ . Para resolver el modelo se dispone de las Ec.(18) y Ec.(22), a través de un método iterativo se puede obtener la solución. En Tabla 1 se esquematiza el algoritmo correspondiente.

Al evaluar la fuerza aplicada mediante la Ec.(18), para un cierto deslizamiento  $\delta$ , se debe integrar sobre el eje de la fibra desde el extremo hacia la fisura, iniciando con una fuerza axial nula. La integral se resuelve numéricamente, para lo cual se discretiza la longitud embebida de la fibra en  $N$  partes (ver Tabla 1, Pasos [3] a [6]). En este trabajo en lugar de usar un método iterativo para encontrar la solución de Ec.(18) y Ec.(22), se usa el siguiente procedimiento: Dado un cierto deslizamiento  $\delta$ , se calcula la fuerza axial para cada coordenada  $s_n$  (coordenada del baricentro del incremento de longitud  $n$  de fibra), donde también se evalúa el cambio de dirección de la fibra  $\hat{\varphi}$  y como este cambio modifica la geometría del sector de fibra en la fisura (ver Tabla 1, Paso[10]) y, se controla que la fuerza axial no supere la fuerza necesaria para romper la matriz en una longitud  $L_{rm} = L_o - s - \delta - L_\varphi$  calculada con Ec.(22). Cuando las fuerzas calculadas mediante las ecuaciones Ec.(18) y Ec.(22) se igualan, se obtiene la solución para  $P$  y  $L_{rm}$ . Simultáneamente se evalúa la rotura de la fibra calculando el trabajo plástico en cada coordenada  $s_n$ . Si la fibra se rompe en la coordenada  $s_n$ , se define el incremento de longitud en el cual se produjo la rotura  $n_{rf} = n$ , se determina la longitud perdida de fibra  $L_{rf}$  y se recalcula la integral tomando como límite inferior de la misma  $L_{rf}$ .

Si la fuerza axial, evaluada en la coordenada  $s_n$  es igual a la fuerza normal plástica  $N_p$ , la resistencia al arrancamiento es superior a la fuerza axial que puede transmitir la fibra. Esto indica que el extremo de la fibra no deslizará y la misma sufrirá deformaciones plásticas en el eje, pudiendo alcanzar la rotura.

Tabla 1: Algoritmo para Modelo de Arrancamiento de Fibras

<b>Inicialización de Parámetros</b>	
[1]	$k = 0, \delta_0 = 0, \Delta s = L_o/N, \Delta\delta \leq \Delta s, s_0 = 0, n_{rf} = 0, L_{rf} = 0, \tilde{\delta} = 0, \tilde{W}_f^p, t_2$
<b>Aplicación del incremento k de deslizamiento</b>	
[2]	$k = k + 1, \delta_k = \delta_{k-1} + \Delta\delta, n = n_{rf}$
<b>Integración de modelo de arrancamiento entre <math>s_0</math> y <math>s_n</math></b>	
[3]	$\bar{P}_0(\delta_k) = 0$
[4]	$n = n + 1, s_n = n \Delta s, C(s_n), C(s_n + \delta), \frac{dC(s_n + \delta)}{d\delta}, \tau_d(s_n), M_u(\bar{P}_{n-1}), M(s_n)$
[5]	$T_{fm}(s_n) \begin{cases} = \tau_d(s_n) \psi + \bar{P}_{n-1} C(s_n + \delta) f + (-\tilde{\sigma}) \psi f & \text{si } C(s_n) = 0 \text{ ó } C(s_n + \delta) \neq 0 \\ = t_2 C(s_n) & \text{si } C(s_n) \neq 0 \text{ y } C(s_n + \delta) - C(s_n) \neq 0 \end{cases}$
[6]	$\bar{P}_n(\delta_k) = \bar{P}_{n-1}(\delta_k) + \left[ \frac{dC(s_n + \delta)}{d\delta} M(s_n) + T_{fm}(s_n) \right] \Delta s$
<b>Análisis de Rotura de Fibra</b>	
[7]	Si $\bar{P}_n(\delta_k) < N_p$ : $r_c, W_f^p = f_y \Delta C \frac{4}{3} \left[ (\phi_f/2)^2 - r_c^2 \right]^{3/2}$ Si no: continua en Paso[19]
[8]	Si $W_f^p \geq \tilde{W}_f^p$ : <b>ROTURA DE FIBRA</b> $\bar{P}_n(\delta_k) = 0, n_{rf} = n, L_{rf} = s_n$ , continua en Paso[4]
[9]	Si $\phi = 0$ : $P(\delta_k) = \bar{P}_n(\delta_k), \varepsilon_k = P(\delta_k)/(E_f A_f), \tilde{\delta}_k = \delta_k(1 + \varepsilon_k)$ , continua en Paso[18]
<b>Consideración de Fibra Inclinada</b>	
[10]	Actualizar $h_1, h_3, h_2, \hat{\phi}, L_\phi, \rho_\phi, C_\phi, M_\phi = \min\{E I C_\phi, M_u\}$
[11]	$P_n^{fm}(\delta_k) = F_{fm}(f, \hat{\phi}) (\bar{P}_n(\delta_k) + 2C_\phi M_\phi)$
<b>Análisis de Rotura de Matriz</b>	
[12]	Si $n = (N - n_{rf})$ : continua en Paso[15]
[13]	$L_{rm} = (N - n) \Delta s, P_n^{rm}(L_{rm}) = f_t L_{rm}^2 F_{rm}(f, \phi, \hat{\phi})$
[14]	Si $P_n^{fm}(\delta_k) < P_n^{rm}(L_{rm})$ : continua en Paso[4]
[15]	$P(\delta_k) = P_n^{fm}(\delta_k), \varepsilon_k = P(\tilde{\delta}_k)/(E_f A_f), \tilde{\delta}_k = h_2(\varepsilon) - \alpha(L_\phi/2 + L_{rm}) \cos(\phi)$
<b>Análisis de Rotura de Fibra</b>	
[16]	Si $P(\delta_k) < N_p$ : $r_c, W_f^p = f_y \Delta C \frac{4}{3} \left[ (\phi_f/2)^2 - r_c^2 \right]^{3/2}$ Si no: continua en Paso[19]
[17]	Si $W_f^p \geq \tilde{W}_f^p$ : <b>ROTURA DE FIBRA</b> $P(\delta_k) = 0$ , continua en Paso[23]
<b>Control de deslizamiento aplicado</b>	
[18]	Si $\delta_k < (L_0 - L_\phi - L_{rm} - L_{rf})$ : continua en Paso[2] Si no: <b>FIBRA COMPLETAMENTE EXTRAÍDA</b> , continua en Paso[23]
<b>Plastificación del eje de la fibra</b>	
[19]	$\Delta\tilde{\delta} = \Delta\delta, L^{lim} = \alpha(L_\phi/2 + L_{rm}) + \delta_{k-1}, \tilde{\delta}^{lim} = \tilde{\delta}_{k-1} - L^{lim} P(\tilde{\delta}_{k-1})/(E_f A_f) \cos(\phi - \hat{\phi}), k = k - 1$
[20]	$k = k + 1, \tilde{\delta}_k = \tilde{\delta}_k + \Delta\tilde{\delta}, P(\tilde{\delta}_k) = N_p, \hat{\phi}, L_{rm} = \sqrt{P(\tilde{\delta}_k)/(f_t F_{rm}(f, \phi, \hat{\phi}))}$
[21]	$\varepsilon_k^p = (\tilde{\delta}_k - \tilde{\delta}^{lim})/(L^{lim} \cos(\phi - \hat{\phi})) - P(\tilde{\delta}_k)/(E_f A_f)$
[22]	Si $\varepsilon_k^p < \varepsilon_{rot}$ : continua en Paso[20] Si no: <b>ROTURA DE FIBRA</b> $P(\tilde{\delta}_k) = 0$ , continua en Paso[23]
[23]	<b>FIN</b>

## 4.2. Modelo para HRF

Para encontrar la solución de las ecuaciones de equilibrio global se usa un algoritmo iterativo Newton Raphson. El tensor de deformaciones es conocido en cada iteración. Acorde a la Teoría de Mezclas Clásica, todas componentes tienen la misma deformación (ver Ec.(31)) por lo tanto, las ecuaciones constitutivas puede ser integradas por separado para obtener el tensor de tensiones de cada componente, que se pueden combinar (ver Ec.(33)) para obtener la tensión del compuesto. El procedimiento se describe en la Tabla 2 donde  $\mathbf{U}$  es el vector de desplazamientos nodales,  $\Delta\mathbf{U}$  es el vector de incrementos de desplazamientos nodales,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez y  $\mathbf{F}_{resid}$  es el vector de fuerzas residuales.

Tabla 2: Algoritmo de Integración de Ecuaciones Constitutivas – Retorno Mapeado

<b>Inicio</b>	
[1]	Incremento: $n$
<b>Calculo de incremento de desplazamientos nodales</b>	
[2]	$\Delta\mathbf{U}^j = \Delta\mathbf{U}^{j-1} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_{resid}, \quad \mathbf{F}_{resid} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}$
<b>Calculo de deformaciones</b>	
[3]	$[(\varepsilon_{kl})_{HRF}]_n^j = \mathbf{B}\mathbf{U}^j$
<b>Ecuación Constitutiva de cada componente</b>	
[4]	Componente Matriz: $[(\varepsilon_{kl})_1]_n^j = [(\varepsilon_{kl})_{HRF}]_n^j \rightarrow [(\varepsilon_{kl}^p)_1]_n^j, [p_1]_n^j, [(\sigma_{kl})_1]_n^j$ , Dirección principal de deformación plástica de la matriz $\{cos(\varphi_x), cos(\varphi_y), cos(\varphi_z)\}^t$
[5]	Componente Fibra x: $[(\varepsilon_{kl})_2]_n^j = [(\varepsilon_{kl})_{HRF}]_n^j, \varphi_x \rightarrow [(\varepsilon_{kl}^i)_2]_n^j, [\kappa_2]_n^j, [(\sigma_{kl})_2]_n^j$ Componente Fibra y: $[(\varepsilon_{kl})_3]_n^j = [(\varepsilon_{kl})_{HRF}]_n^j, \varphi_y \rightarrow [(\varepsilon_{kl}^i)_3]_n^j, [\kappa_3]_n^j, [(\sigma_{kl})_3]_n^j$ Componente Fibra z: $[(\varepsilon_{kl})_4]_n^j = [(\varepsilon_{kl})_{HRF}]_n^j, \varphi_z \rightarrow [(\varepsilon_{kl}^i)_4]_n^j, [\kappa_4]_n^j, [(\sigma_{kl})_4]_n^j$
<b>Recomposición de Tensiones</b>	
[6]	$[(\sigma_{kl})_{HRF}]_n^j = \sum_{c=1}^4 k_c [(\sigma_{kl})_c]_n^j$
<b>Calculo de Fuerzas residuales y Análisis de Convergencia</b>	
[7]	<b>NO CONVERGE:</b> Continúa en Paso[2]. <b>SI CONVERGE:</b> Continúa con el Siguiete Incremento $n + 1$

En el procedimiento se indica 3 direcciones para la orientación de las fibras según los ejes coordenados. Se pueden utilizar fibras en más dirección aumentando el número de componentes de fibras. La inclinación de la fibra  $\varphi$  en el modelo de arrancamiento es el ángulo entre la orientación de la fibra y la dirección de principal de deformación plástica de la matriz que define la normal al plano de fisura.

El modelo de arrancamiento de fibras puede resolverse en forma simultánea con la integración de la ecuación constitutiva. Pero esto requiere un elevado costo computacional. En este trabajo, previamente a la integración de la ecuación constitutiva, se genera una familia de curvas de arrancamiento de fibras para distintas inclinaciones de fibra y luego son transforman a curvas de endurecimiento. Durante la integración, según la dirección principal de deformación plástica de la matriz y la orientación de la fibra se selecciona la curva de endurecimiento más próxima.

## 5 APLICACIONES

### 5.1. Simulación de ensayos de arrancamiento

El ensayo de arrancamiento consiste en arrancar una fibra desde una matriz. En este trabajo se realizan las simulaciones de los ensayos mostrados en las Figura 1 a Figura 4. Las fibras son de acero con ganchos en los extremos y sección circular. Las características mecánicas de la fibra y la matriz se indican en la Tabla 3. La geometría la fibra se determina midiendo coordenadas y pendientes ( $x$ ,  $y$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) de puntos sobre el eje de la misma (ver Tabla 4) de la zona que estará embebida en la matriz. Esta tarea se realiza a partir de imágenes de la fibra y mediante un software de dibujo. La geometría inicial es independiente del ángulo de inclinación que tendrá la fibra en la matriz. En todas las simulaciones se uso la misma geometría de fibra. En la Tabla 5 se muestran los resultados obtenidos mediante curvas Carga-Apertura de fisura.

Tabla 3: Parámetros para Modelo de Arrancamiento

Parámetro	Mortero	Hormigón
Diámetro $\phi_f$ [mm]	1,00	1,00
Tensión de corte friccional $\tau_f$ [N/mm <sup>2</sup> ]	4,25	4,25
Coefficiente de roce $f$	0,50	0,50
Fuerza $\bar{P}$ [N]	<b>150</b>	<b>200</b>
Deslizamiento de acomodamiento [mm]	0,50	0,50
Modulo de elasticidad de fibra $E_f$ [N/mm <sup>2</sup> ]	210000	210000
Tensión de fluencia de fibra $f_y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	860	860
Coefficiente de Poisson de fibra $\nu_f$	0,20	0,20
Deformación de rotura de fibra $\epsilon_{rot}$	0,20	0,20
Modulo de elasticidad de matriz $E_m$ [N/mm <sup>2</sup> ]	42000	42000
Resistencia a tracción de la matriz $f_t$ [N/mm <sup>2</sup> ]	2,0	2,0
Resistencia a compresión de matriz $f_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]	89	89
Coefficiente de Poisson de matriz $\nu_m$	0,20	0,20

Tabla 4: Geometría de Fibra

x [mm]	$\Delta x$ [mm]	y [mm]	$\Delta y$ [mm]
0.0000	1.6148	-2.4654	0.0831
1.6148	1.6148	-2.3823	0.0831
2.5939	0.8457	-2.0670	0.5440
3.4397	0.8457	-1.5230	0.5440
4.2854	0.8457	-0.9790	0.5440
5.2510	1.0000	-0.6645	0.0583
6.2510	1.0000	-0.6062	0.0583
7.2510	1.0000	-0.5479	0.0583
8.2510	1.0000	-0.4897	0.0583
9.2510	1.0000	-0.4314	0.0583
10.2510	1.0000	-0.3731	0.0583
11.2510	1.0000	-0.3148	0.0583
12.2510	1.0000	-0.2735	0.0359
13.2510	1.0000	-0.2376	0.0359
14.2510	1.0000	-0.2017	0.0359
15.2510	1.0000	-0.1658	0.0359
16.2510	1.0000	-0.1299	0.0359
17.2510	1.0000	-0.0939	0.0359
18.2510	1.0000	-0.0580	0.0359
19.2510	1.0000	-0.0221	0.0359
20.2510	1.0000	0.0000	0.0000
21.2510	1.0000	0.0000	0.0000
22.2510	1.0000	0.0000	0.0000
23.2510	1.0000	0.0000	0.0000
24.6221	1.0000	0.0000	0.0000

Tabla 5: Resultados de arrancamiento de fibras

Curva de Arrancamiento	Descripción
	<p>La matriz es de mortero y la fibra es normal a la fisura. Las curvas experimentales presentan baja dispersión en la carga y además se puede observar que en dos ensayos se corto la fibra la altura del gancho (caída de carga a 2mm de apertura). La simulación numérica predice la carga pico promedio y el comportamiento post-pico satisfactoriamente.</p>

Continuación de Tabla 5

	<p>La matriz es de hormigón y la fibra es normal a la fisura. Las curvas experimentales presentan después de la carga pico, gran dispersión en la carga y además se puede observar que en tres ensayos se corto la fibra la altura del gancho (caída de carga a 2mm de apertura). La simulación numérica predice la carga pico promedio y el comportamiento post-pico promediado satisfactoriamente.</p>
	<p>Es el mismo caso que el anterior, pero a modo de ejemplo se redujo la deformación de rotura de la fibra <math>\epsilon_{rot}</math>, en lugar de usar 0,20 se uso 0,15. Se puede observar que la fibra se corta a la altura del gancho. En rigor la deformación de rotura de la fibra no varía tanto como en el ejemplo, pero una cierta combinación de los parámetros restantes, sumado a una geometría de fibra un poco diferente, pueden llevarla a la rotura.</p>
	<p>La matriz es de hormigón y la fibra esta inclinada 30° respecto de normal a la fisura. Las curvas experimentales presentan poca dispersión, pero alcanzada la carga pico se produce la rotura de la fibra en la zona fuera de la matriz. La simulación numérica predice la carga pico promedio, la apertura de fisura y la rotura de la fibra satisfactoriamente.</p>
	<p>La matriz es de hormigón y la fibra esta inclinada 60° respecto de normal a la fisura. Las curvas experimentales presentan poca dispersión, en la mayoría de los ensayos alcanzada la carga pico se produce la rotura de la fibra en la zona fuera de la matriz. La simulación numérica predice la carga pico promedio satisfactoriamente y presenta una pequeña diferencia en cuanto a la apertura de fisura.</p>

## 5.2. Simulación de ensayos de viga de HRF

El ensayo reproducido corresponde a la RILEM TC-162 para caracterización de hormigón. Es un ensayo de flexión en 3 puntos con una entalla en la cara inferior en el centro de la luz.

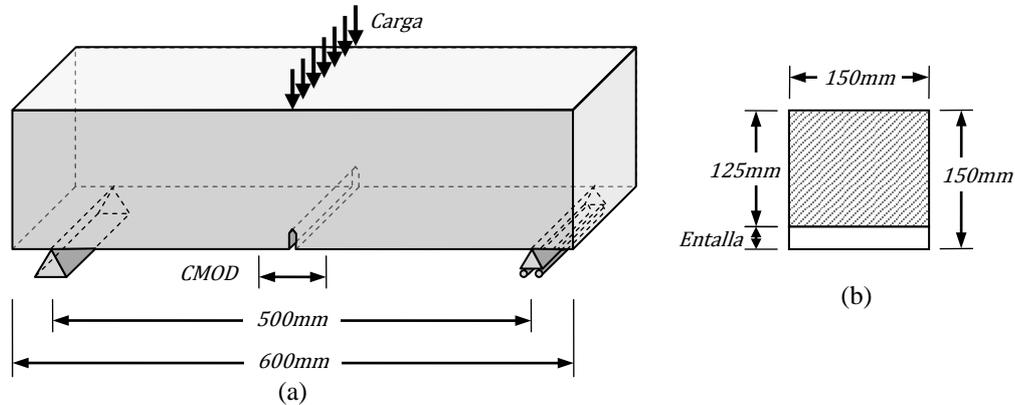


Figura 13: Viga RILEM. (a) Esquema de carga. (b) Sección central de la viga

En la Figura 13 se indica la geometría de la viga. Al realizar el ensayo se mide la carga aplicada y la apertura de fisura (CMOD) en la zona de la entalla.

La simulación se realizó mediante un programa de elementos finitos 2D. Se registró la apertura de fisura y la carga aplicada. El material se modeló como un compuesto de hormigón (H50) y fibras (40kg/m<sup>3</sup>), las características de los materiales previamente calibrados se describen en las Tabla 6, Tabla 7 y Tabla 8. Se usó la geometría de fibra de la Tabla 4.

Tabla 6: Propiedades del Hormigón H50

Módulo de Elasticidad [N/mm <sup>2</sup> ]	37000
Coefficiente de Poisson	0.2
Resistencia última a tracción [N/mm <sup>2</sup> ]	2.00
Resistencia última a compresión [N/mm <sup>2</sup> ]	54
Tensión umbral de fluencia en compresión [N/mm <sup>2</sup> ]	35
Relación de resistencias inicial (compresión/tracción)	18
Función de Fluencia	Lubliner-Oller
Curva de endurecimiento en tracción	Exp.
Curva de endurecimiento en compresión	Exp. c/max
Energía de fractura [N·mm/mm <sup>2</sup> ]	0,09
Energía de Aplastamiento [N·mm/mm <sup>2</sup> ]	5,00
Criterio de Potencial	Lubliner-Oller

Tabla 7: Modelo de Arrancamiento de Fibras

Diámetro $\phi_f$ [mm]	1,00
Tensión de corte friccional $\tau_f$ [N/mm <sup>2</sup> ]	3,50
Coefficiente de roce $f$	0,40
Fuerza $\bar{P}$ [N]	200
Deslizamiento de acomodamiento [mm]	0,50
Deformación axial de rotura de fibra $\epsilon_{rot}$	0,20

Tabla 8: Propiedades de las Fibras

Módulo de Elasticidad [N/mm <sup>2</sup> ]	210000
Coefficiente de Poisson	0.2
Resistencia última a tracción [N/mm <sup>2</sup> ]	860
Resistencia última a compresión [N/mm <sup>2</sup> ]	860
Tensión umbral de fluencia en compresión [N/mm <sup>2</sup> ]	860
Relación de resistencias inicial (compresión/tracción)	1
Función de Fluencia	Von Mises
Curva de endurecimiento en tracción	Exp.
Curva de endurecimiento en compresión	Exp. c/max
Energía de fractura [N·mm/mm <sup>2</sup> ]	-
Energía de Aplastamiento [N·mm/mm <sup>2</sup> ]	-
Criterio de Potencial	Von Mises
Relación Umbral espacio ficticio isótropo y real ortótropo: $\bar{\sigma}_x/\sigma_x$	1.0
Relación Umbral espacio ficticio isótropo y real ortótropo: $\bar{\sigma}_y/\sigma_y$	0.00001
Relación Umbral espacio ficticio isótropo y real ortótropo: $\bar{\sigma}_{xy}/\sigma_{xy}$	0.00001
Relación Umbral espacio ficticio isótropo y real ortótropo: $\bar{\sigma}_z/\sigma_z$	0.00001

En la Figura 14 se muestran los resultados de la simulación, junto a las curvas experimentales. Se observa un buen ajuste de la carga pico y también el comportamiento post-pico.

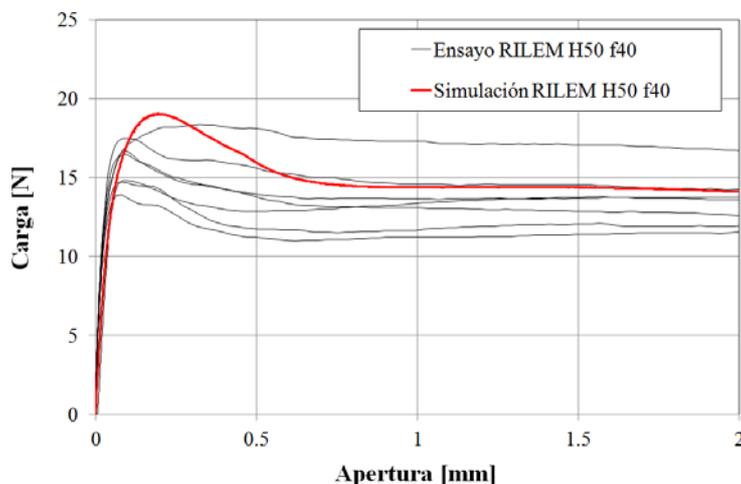


Figura 14: Curva Carga-Apertura RILEM TC-162

## 6 CONCLUSIONES

El modelo de arrancamiento reproduce satisfactoriamente los ensayos de arrancamiento de fibras, desde matriz de mortero y matriz de hormigón tanto para fibras normales a la fisura como inclinadas. Se observa la necesidad de profundizar en el estudio de la variación parámetro  $t_2$  en función de parámetros materiales y geométricos.

El modelo puede reproducir además la rotura de las fibras. Se observa que la rotura es muy sensible a la geometría de las fibras. Se produce en zonas que experimentan una gran deformación por cambio de curvatura, como la deformación experimentada por el primer tramo curvo al pasar por donde estaba inicialmente el segundo tramo curvo, cuando se trata de fibras con ganchos en los extremos. También se produce por deformación de estiramiento axial, esto es, cuando la fibra no puede deslizar debido a la gran resistencia al arrancamiento. Este último tipo de rotura se produce generalmente en fibras inclinadas, ya que el cambio de dirección respecto de la normal a la fisura incrementa la mencionada resistencia. Este tipo de consideraciones que se derivan del estudio de la rotura de fibras tiene especial importancia para la correcta elección de la fibra y matriz al momento de diseñar un HRF y también puede ser usado para optimizar el diseño de las fibras.

El análisis de rotura de matriz brinda resultados de  $L_{rm}$  un poco más elevados que los vistos experimentalmente. Esto se traduce también en el mayor desplazamiento que se observa en las simulaciones de fibras inclinadas a  $60^\circ$ .

La modelación de HRF como un compuesto de hormigón y fibras cuya respuesta se describe con las curvas de arrancamiento generadas con el modelo propuesto describe adecuadamente el comportamiento de este material bajo solicitaciones de flexión.

Si bien se han considerado, como simplificación, las fibras dispuestas en direcciones ortogonales, el modelo permite tener una distribución más suave de orientaciones de fibras, simplemente aumentando el número de componentes del compuesto.

## 7 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Agencia de Promoción Científica y tecnológica, al CONICET, CIUNT y a la Universidad Nacional de Tucumán por el apoyo económico brindado para la realización de este trabajo.

## REFERENCIAS

- Bentur, A. *et al.*, 1996. Fiber-matrix interfaces. *HPFRCC 2*, pp. 149-192.
- Betten, J., 1988. Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, Volumen 4, pp. 29-46.
- Car, E., Oller, S. y Oñate, E., 1999. A large strain plasticity model for anisotropic composite material application. *Int J Plast 1999*, Issue 17, p. 1437-1463.
- Chanvillard, G., 1999. Modelos the pullout of wire-draw steel fibers. *Cement and Concrete Research*, Issue 29, pp. 1027-1037.
- Cunha, V. M., Sena-Cruz, J. M. y Barros, J. A., 2007. Pullout behaviour of hooked-end steel fibres in self-compacting concrete.
- Cunha, V. M., Sena-Cruz, J. M. y Barros, J. A., 2008. Impact of the fibre manufacturing quality on the fibre pullout performance. *Fibre Reinforcent Concrete: Design and Applications. RILEM*, pp. 83-93.
- Isla, F., Isas, R., Ruano, G. y Luccioni, B., 2012. Efecto de la orientación y del confinamiento en el ensayo de extracción de fibras. *XXXV JORNADAS SUL AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUCTURAL*.
- Isla, F. y Luccioni, B., 2009. Arrancamiento de fibras en hormigones reforzados con fibras. *AMCA*, 28(26), pp. 2175-2198.
- Laranjeira, F., Molins, C. y Aguado, A., 2010. Predicting the pullout response of inclined hooked steel fibers. *Cement and Concrete Research*, Volumen 40, pp. 1471-1487.
- Lubliner, J., 1972. On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 7(3), pp. 237-254.
- Luccioni, B. y López, D., 2002. Modelo para Materiales Compuestos con deslizamiento de Fibras. En: *Análisis y Cálculo de Estruct. de Materiales Compuestos*. CIMNE, pp. 411-431.
- Luccioni, B., Oller, S. y Danesi, R., 1995. Plastic damaged model for anisotropic materials. *Applied Mechanics in the Americas*, Volumen 1, pp. 124-129.
- Luccioni, B. y Rougier, V., 2005. A plastic damage approach for confined concrete. *Computers and Structures*, Issue 83, p. 2238-2256.
- Maugin, G., 1992. The thermomechanics of plasticity and fracture. *Cambridge, UK: Cambridge University Press*.
- Naaman, A. E., *et al.*, otros, 1991. Fiber pullout and bond slip. I: Analytical Study. *Journal of Structural Engineering. ASCE*, 117(9).
- Oller, S., Botello, S., Miquel, M. y Oñate, E., 1995. Anisotropic elasto-plastic model based on an isotropic formulation. *Eng Comput*, Issue 12, p. 245-262.
- Oller, S., Car, E. y Lubliner, J., 2003. Definition of a general implicit orthotropic yield criterion. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, pp. 895-912.
- Pinchin, D. y Tabor, D., 1978. Interfacial contact pressure and frictional stress transfer in steel fiber. *RILEM*, pp. 337-344.
- Robins, P., Austin, S. y Jones, P., 2002. Pull-out behaviour of hooked steel fibres. *Materials and Structures*, Volumen 35, pp. 434-442.
- Sujivorakul, C. y Naaman, A. E., 2003. Modeling bond components of deformed steel fibers in FRC composites. *HPFRCC*, Volumen 4, pp. 35-48.
- Toledo, M., Nallim, I. y Luccioni, B., 2008. A micro-macromechanical approach for composite laminates. *Mechanics of Materials*, pp. 885-906.
- Truesdell, C. y Toupin, R., 1960. The classical field theories. In: *Flugge S, editor, Handbuch der Physik II/I. Berlin: Springer*.
- Zile, E. y Zile, O., 2013. Modelling the pullout of hooked steel fibers from cementitious matrix. *4th International Conference on Integrity, Reliability and Failure*, Paper Ref 3935.