

MODELO NUMÉRICO DE ELEMENTO DE BARRA DISCRETIZADO EN FIBRAS PARA COLUMNAS SISMORRESISTENTES

Oscar Möller^a, Mauro Poliotti^a

*^aInstituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE), Facultad Cs.Ex., Ingeniería y Agrimensura,
Universidad Nacional de Rosario, Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina,
moller@fceia.unr.edu.ar*

Palabras clave: dinámica no lineal, elemento discretizado en fibras, columnas, estructuras sismorresistentes

Resumen. Las columnas de estructuras sismorresistentes están solicitadas por flexión compuesta con fuertes variaciones en la carga axial durante la respuesta a un acelerograma. En particular las columnas de esquina tienen flexión compuesta oblicua. En este trabajo se utiliza un elemento de barra espacial para análisis no lineal de estructuras de hormigón armado solicitadas por acciones estáticas y dinámicas, con discretización en fibras de hormigón o acero, con secciones de control e integración numérica utilizando el esquema de Gauss-Lobato. La formulación mixta garantiza el equilibrio interno del elemento y la compatibilidad de deformaciones. La no linealidad física se considera a nivel de las relaciones constitutivas del hormigón y del acero, surgiendo así naturalmente la interacción entre los momentos flectores y el esfuerzo normal. Se presenta un ejemplo de validación del modelo frente a resultados experimentales disponibles. Para una estructura espacial de dos plantas, se comparan los resultados obtenidos con este elemento de fibras frente a la discretización con planos resistentes independientes en cada dirección de la planta.

1 INTRODUCCIÓN

Las columnas de estructuras sismorresistentes están solicitadas por flexión compuesta con fuertes variaciones en la carga axial durante la respuesta a un acelerograma. En particular las columnas de esquina tienen flexión compuesta oblicua. Es de interés desarrollar modelos numéricos que puedan representar adecuadamente su comportamiento, tanto para análisis estático no lineal (push-over) como para análisis dinámico no lineal con acelerogramas.

Muchos modelos para estructuras sismorresistentes se han propuesto en las últimas décadas, los que pueden ser agrupados en tres categorías con un nivel creciente de refinamiento y complejidad.

- Modelos globales: la respuesta no lineal es representada por muy pocos grados de libertad, por ejemplo un grado de libertad horizontal por piso en un pórtico. Estos modelos son útiles en etapas de diseño preliminar para estimar distorsiones de piso y demandas de ductilidad global de desplazamientos.
- Modelos de elementos finitos “discretos” (barras): la estructura es modelada como un ensamble de elementos que describen el comportamiento histerético de miembros de hormigón armado. Relaciones constitutivas no lineales se introducen a nivel de elemento en un sentido promedio (no linealidad concentrada), a nivel de secciones con esfuerzos internos y deformaciones generalizadas (no linealidad distribuida), o también a nivel de fibras con relaciones tensión deformación. Tienen un buen balance entre simplicidad y precisión en el estudio de la respuesta sísmica no lineal.
- Modelos de elementos finitos 2D, 3D: miembros y nudos son discretizados en un gran número de elementos finitos. No linealidad física y geométrica se introducen a nivel tensión-deformación, pudiéndose representar toda clase de fenómenos tales como deterioro de adherencia entre acero y hormigón, fricción en la interfaz entre fisuras, creep, relajación, fenómenos térmicos, etc.

En este trabajo el análisis numérico se realiza con un elemento de barra espacial para análisis no lineal de estructuras de hormigón armado solicitadas por acciones estáticas y dinámicas, con discretización en fibras de hormigón o acero, con secciones de control e integración numérica utilizando el esquema de Gauss-Lobato (Taucer et al., 1991; Spacone et al., 1996; Taylor et al., 2003; Moller y otros, 2009). La formulación mixta garantiza el equilibrio interno del elemento y la compatibilidad de deformaciones. La no linealidad física se considera a nivel de las relaciones constitutivas del hormigón y del acero, surgiendo así naturalmente la interacción entre los momentos flectores y el esfuerzo normal.

Este modelo se valida con resultados de ensayos experimentales disponibles en la literatura, realizados por otros autores, considerando aquellos casos en que la falla se produce por flexión compuesta y no por esfuerzo de corte.

Además se evalúa el comportamiento de otro elemento de barra con el que se representan planos resistentes en cada dirección principal de la estructura (Möller y otros, 2003a). El elemento de barra sigue el modelo inicialmente propuesto por Filippou e Issa (1988), Filippou et al. (1992) y D’Ambrisi y Filippou (1997), adaptado por Möller et al. (2003b).

Se presentan ejemplos numéricos para analizar la influencia de la variación del esfuerzo normal en la respuesta de columnas. También se estudian las diferencias en la respuesta dinámica no lineal de una estructura sismorresistente cuando las columnas de esquina se las modela con este tipo de elemento, frente a la discretización con planos resistentes independientes en cada cara de la planta.

Se obtienen conclusiones de interés acerca de la precisión, las limitaciones y la simplicidad del elemento discretizado en fibras para su aplicación en estructuras de escala ingenieril.

2 ELEMENTO DE BARRA CON DISCRETIZACIÓN EN FIBRAS

2.1 Generalidades

Este modelo utiliza la hipótesis que las deformaciones son pequeñas y que las secciones rectas de la barra permanecen planas durante la historia de carga.

La formulación está basada en el método mixto donde se utilizan funciones de interpolación de fuerzas que satisfacen equilibrio interno, y funciones de forma dependientes de la flexibilidad para el campo de deformaciones. Con una selección particular de las funciones de forma de las deformaciones, el método mixto se reduce al caso del método de la flexibilidad.

Sin embargo se mantendrá el formalismo del método mixto para un mejor entendimiento de la determinación del estado del elemento, y para poder explorar en el futuro otras funciones de forma para las deformaciones.

2.2 Definición de fuerzas y deformaciones generalizadas

El elemento de barra se muestra esquemáticamente en la Figura 1 con el sistema de ejes locales x, y, z , y el sistema de ejes globales X, Y, Z . El eje x es la unión de los centroides geométricos de cada sección, que deben estar sobre una recta.

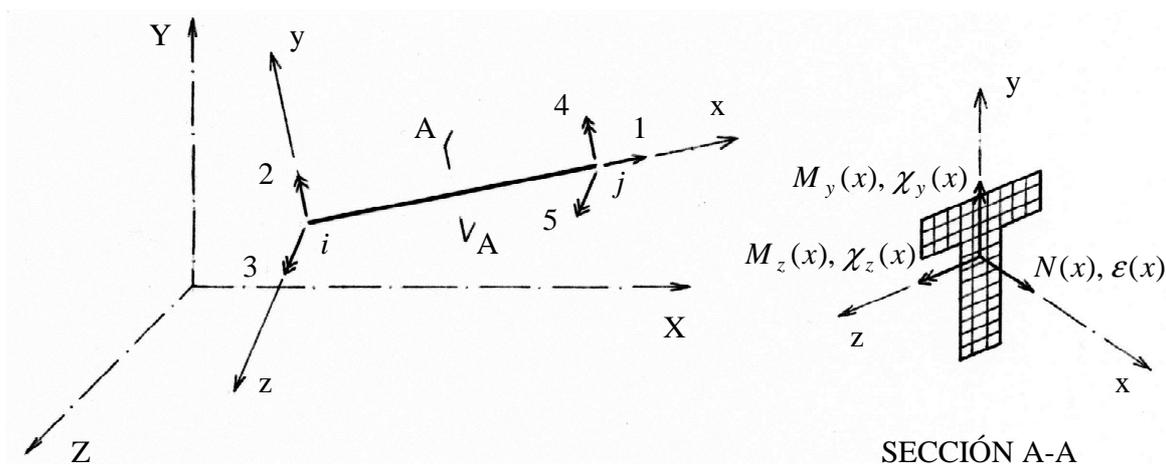


Figura 1: Elemento de barra y sistemas de referencia

También se indican los grados de libertad considerados, que no incluyen los modos de cuerpo rígido, los cuales se incorporan al final mediante simples transformaciones geométricas.

Se definen los siguientes vectores de fuerzas \mathbf{Q} y deformaciones generalizadas del elemento \mathbf{q} .

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M_{y_i} \\ M_{z_i} \\ M_{y_j} \\ M_{z_j} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta l \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \\ \theta_{y_j} \\ \theta_{z_j} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Los esfuerzos de corte se obtienen luego por equilibrio y el momento torsor se incorpora en forma independiente, desacoplada, y con comportamiento elástico lineal.

En la misma Figura 1 también se muestra una sección genérica con sus esfuerzos internos $N(x)$, $M_y(x)$, $M_z(x)$ y sus deformaciones $\varepsilon(x)$, $\chi_y(x)$, $\chi_z(x)$, donde ε es la deformación axial y χ representa la curvatura, los cuales se agrupan en los siguientes vectores

$$\mathbf{D}(x) = \begin{Bmatrix} N(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon(x) \\ \chi_y(x) \\ \chi_z(x) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

2.3 Formulación del modelo mixto

En el método mixto de dos campos, Zienkiewicz y Taylor (1994), se utilizan funciones independientes para aproximar el campo de fuerzas y deformaciones a lo largo del elemento. Llamando Δ a los incrementos de dichas cantidades, se escribe

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{d}^i(x) &= \mathbf{a}(x) \Delta \mathbf{q}^i & (a) \\ \Delta \mathbf{D}^i(x) &= \mathbf{b}(x) \Delta \mathbf{Q}^i, \quad \mathbf{D}^i(x) = \mathbf{b}(x) \mathbf{Q}^i & (b) \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\mathbf{a}(x)$, $\mathbf{b}(x)$ son las matrices de interpolación de deformaciones y fuerzas respectivamente, y el superíndice i indica la iteración de Newton-Raphson que es realizada en los grados de libertad de la estructura hasta que haya equilibrio entre las cargas aplicadas y las fuerzas internas resistentes.

- A partir de la forma integral de equilibrio de la relación linealizada fuerza-deformación de la sección

$$\int_0^L \delta \mathbf{D}^T(x) \left[\Delta \mathbf{d}^i(x) - \mathbf{f}^{i-1}(x) \Delta \mathbf{D}^i(x) \right] dx = 0 \quad (4)$$

Siendo $\mathbf{f}^{i-1}(x)$ la flexibilidad de la sección, donde el superíndice i indica la iteración del Newton-Raphson, operando se llega a

$$\mathbf{T} \Delta \mathbf{q}^i = \mathbf{F}^{i-1} \Delta \mathbf{Q}^i \quad (5)$$

en la cual \mathbf{F}^{i-1} es la matriz de flexibilidad del elemento en la iteración $i-1$, y \mathbf{T} matriz que solo depende de las funciones de interpolación

$$\mathbf{F}^{i-1} = \left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x) \mathbf{f}^{i-1}(x) \mathbf{b}(x) dx \right], \quad \mathbf{T} = \left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x) \mathbf{a}(x) dx \right] \quad (6)$$

- En el próximo paso se considera el equilibrio del elemento. En el método mixto de dos campos la forma integral de la ecuación de equilibrio se obtiene a partir del principio de los desplazamientos virtuales.

$$\int_0^L \delta \mathbf{d}^T(x) \left[\mathbf{D}^{i-1}(x) + \Delta \mathbf{D}^i(x) \right] dx = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}^i \quad (7)$$

donde \mathbf{P}^i es el vector de cargas aplicadas que están en equilibrio con los esfuerzos internos $\mathbf{D}^{i-1}(x) + \Delta \mathbf{D}^i(x)$. Sustituyendo y operando se obtiene

$$\mathbf{T}^T [\mathbf{F}^{i-1}]^{-1} \mathbf{T} \Delta \mathbf{q}^i = \mathbf{P}^i - \mathbf{T}^T \mathbf{Q}^{i-1} \quad (8)$$

▪ Si bien en el método mixto las funciones de interpolación $\mathbf{a}(x)$ son completamente independientes de $\mathbf{b}(x)$, la ecuación (6) revela que una elección especial de las funciones de forma $\mathbf{a}(x)$ resulta en una considerable simplificación. Entonces $\mathbf{a}(x)$ son seleccionadas como funciones de forma dependientes de la flexibilidad de acuerdo con la siguiente expresión

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{f}^{i-1}(x) \mathbf{b}(x) [\mathbf{F}^{i-1}]^{-1} \quad (9)$$

Con estas funciones, \mathbf{T} se reduce a la matriz \mathbf{I} , y (8) resulta

$$[\mathbf{F}^{i-1}]^{-1} \Delta \mathbf{q}^i = \mathbf{P}^i - \mathbf{Q}^{i-1} \quad (10)$$

Si bien el método clásico de flexibilidad conduce al mismo sistema de ecuaciones linealizadas (10), esta forma de presentación es más general y permitirá analizar funciones de forma alternativas para las deformaciones en futuros trabajos.

2.4 Determinación del estado del elemento y de las secciones

En el método de la flexibilidad, el primer paso es calcular los incrementos de fuerzas en los nodos extremos a partir de los incrementos de desplazamientos y utilizando la matriz de rigidez del final de la última iteración. Con la función de interpolación de fuerzas se calcula el incremento de esfuerzos internos en cada sección, surgiendo dos inconvenientes.

El primer problema es la determinación del incremento de deformación de la sección a partir del incremento de fuerzas, ya que usualmente se dispone de la relación inversa, es decir fuerza – deformación como función explícita del incremento de deformación, y teniendo presente el carácter no lineal y dependiente del camino de deformación.

El segundo problema es que el cambio en la rigidez de las secciones produce una nueva matriz de rigidez del elemento, lo cual a su vez modifica las fuerzas en los nodos a partir del incremento de desplazamientos dado.

La estrategia utilizada aquí se representa esquemáticamente en la Figura 2 y consiste en tres procesos anidados. Los dos más externos se identifican con los superíndices k : paso de carga, i : iteración de Newton-Raphson, involucran los grados de libertad estructurales y corresponden al clásico análisis no lineal. La iteración interna j corresponde a la determinación del estado del elemento.

Para una iteración i -ésima del Newton-Raphson, se obtiene el incremento de desplazamientos $\Delta \mathbf{u}^i$, se rescatan los correspondientes a un elemento $\Delta \mathbf{q}^i$, y se calcula

$$\mathbf{q}^i = \mathbf{q}^{i-1} + \Delta \mathbf{q}^i \quad (11)$$

Para las iteraciones internas del elemento se comienza por el estado inicial \mathbf{A} y $j = 0$ en la Figura 5, que corresponde al final del proceso iterativo $i-1$ del Newton-Raphson, entonces

$$[\mathbf{F}^{j=0}]^{-1} = [\mathbf{F}^{i-1}]^{-1}, \quad \Delta \mathbf{q}^{j=1} = \Delta \mathbf{q}^i \quad (12)$$

y el incremento de fuerzas en los nodos del elemento resulta

$$\Delta \mathbf{Q}^{j=1} = [\mathbf{F}^{j=0}]^{-1} \Delta \mathbf{q}^{j=1} \quad (13)$$

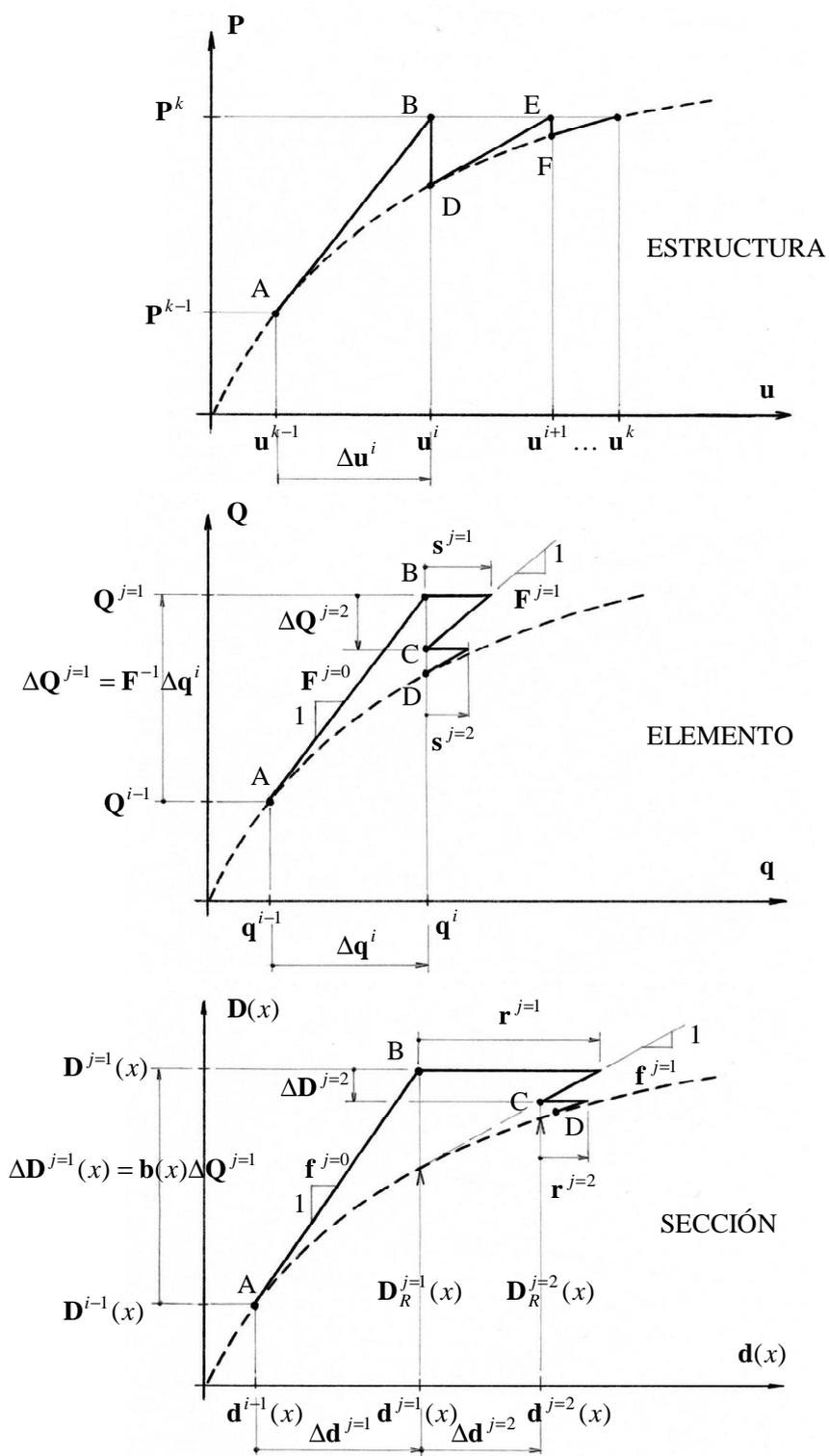


Figura 2: Esquema para determinar el estado del elemento

El incremento de fuerzas en la sección genérica se determina utilizando las funciones de interpolación $b(x)$

$$\Delta D^{j=1}(x) = b(x) \Delta Q^{j=1} \tag{14}$$

Y se actualizan los vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{j=1} &= \mathbf{Q}^{i=1} + \Delta\mathbf{Q}^{j=1} \\ \mathbf{D}^{j=1}(x) &= \mathbf{D}^{i=1}(x) + \Delta\mathbf{D}^{j=1}(x)\end{aligned}\quad (15)$$

Ahora, con la matriz de flexibilidad de la sección al final de la iteración anterior de Newton-Raphson $\mathbf{f}^{j=0}(x) = \mathbf{f}^{i=1}(x)$, se linealiza la relación entre esfuerzos internos y deformaciones de la sección, y se calcula el incremento de deformación

$$\Delta\mathbf{d}^{j=1}(x) = \mathbf{f}^{j=0}(x) \Delta\mathbf{D}^{j=1}(x) = \mathbf{f}^{j=0}(x) \mathbf{b}(x) \left[\mathbf{F}^{j=0}\right]^{-1} \Delta\mathbf{q}^{j=1} \quad (16)$$

Se actualizan las deformaciones a un estado que corresponde al punto B en la Figura 2.

$$\mathbf{d}^{j=1}(x) = \mathbf{d}^{j=0}(x) + \Delta\mathbf{d}^{j=1}(x) \quad (17)$$

De acuerdo a la relación fuerza – deformación de la sección, que se tratará en el apartado siguiente, se calculan las fuerzas resistentes $\mathbf{D}_R^{j=1}(x)$ y la nueva matriz de flexibilidad $\mathbf{f}^{j=1}(x)$.

Usualmente estas fuerzas resistentes $\mathbf{D}_R^{j=1}(x)$ se transforman directamente en las fuerzas resistentes del elemento $\mathbf{Q}^{j=1}$, violando así el equilibrio a lo largo del elemento.

Para solucionar este problema aquí se utiliza un método de solución no lineal que comienza por calcular las fuerzas no balanceadas de la sección

$$\mathbf{D}_u^{j=1}(x) = \mathbf{D}^{j=1}(x) - \mathbf{D}_R^{j=1}(x) \quad (18)$$

que son transformadas a deformaciones residuales

$$\mathbf{r}^{j=1}(x) = \mathbf{f}^{j=1}(x) \mathbf{D}_u^{j=1}(x) \quad (19)$$

Estas deformaciones residuales son así una aproximación lineal del error en las deformaciones realizadas en la linealización de la relación fuerza – deformación. Luego son integradas a lo largo del elemento basado en el principio de las fuerzas virtuales para obtener los desplazamientos residuales del elemento $\mathbf{s}^{j=1}$.

$$\mathbf{s}^{j=1} = \int_0^L \mathbf{b}^T(x) \mathbf{r}^{j=1}(x) dx \quad (20)$$

Estas deformaciones residuales en las secciones $\mathbf{r}^{j=1}(x)$ y los correspondientes desplazamientos residuales en el elemento $\mathbf{s}^{j=1}$ no se adicionan a los anteriores. En lugar de ello, son el punto de partida para un ajuste iterativo con superíndice j .

Los desplazamientos residuales $\mathbf{s}^{j=1}$ violan la compatibilidad porque los elementos que concurren a un nodo tendrán diferentes desplazamientos. Para solucionar este problema se aplican fuerzas correctivas al elemento

$$\Delta\mathbf{Q}^{j=2} = - \left[\mathbf{F}^{j=1}\right]^{-1} \mathbf{s}^{j=1} \quad (21)$$

donde $\mathbf{F}^{j=1}$ es la matriz de flexibilidad tangente actual calculada por integración de las flexibilidades $\mathbf{f}^{j=1}(x)$ de las secciones y utilizando la ecuación (6). En las secciones se aplican los correspondientes incrementos

$$\Delta\mathbf{D}^{j=2}(x) = \mathbf{b}(x) \Delta\mathbf{Q}^{j=2} \quad (22)$$

que, observando la Figura 5, inducen incrementos de deformaciones

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{d}^{j=2}(x) &= \mathbf{r}^{j=1}(x) + \mathbf{f}^{j=1}(x) \Delta \mathbf{D}^{j=2}(x) \\ &= \mathbf{r}^{j=1}(x) - \mathbf{f}^{j=1}(x) \mathbf{b}(x) \left[\mathbf{F}^{j=1} \right]^{-1} \mathbf{s}^{j=1}\end{aligned}\quad (23)$$

Se actualizan los vectores calculados en (15)

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{j=2} &= \mathbf{Q}^{j=1} + \Delta \mathbf{Q}^{j=2} \\ \mathbf{D}^{j=2}(x) &= \mathbf{D}^{j=1}(x) + \Delta \mathbf{D}^{j=2}(x) \\ \mathbf{d}^{j=2}(x) &= \mathbf{d}^{j=1}(x) + \Delta \mathbf{d}^{j=2}(x)\end{aligned}\quad (24)$$

El estado final de la iteración $j=2$ corresponde al punto C en la Figura 2. Luego se calculan las fuerzas resistentes $\mathbf{D}_R^{j=2}(x)$ y se continúa con una nueva iteración aplicando las expresiones (18) a (24).

El proceso iterativo finaliza cuando se satisfacen los criterios de convergencia exigidos, ver apartado 2.6 d, representado esquemáticamente en el punto D de la Figura 2. Luego el proceso iterativo de Newton-Raphson procede con el paso $i+1$.

Las ventajas de esta metodología son:

- Se satisface siempre estrictamente el equilibrio a lo largo del elemento, porque los esfuerzos internos en las secciones se obtienen siempre a partir de las fuerzas en los nodos del elemento y las funciones de interpolación de fuerzas $\mathbf{b}(x)$, de acuerdo con (3.b).
- Se satisface también compatibilidad, no solo en los nodos sino también a lo largo del elemento, ya que la ecuación (16) y el segundo término de (23) expresa la relación entre deformaciones de la sección y desplazamientos de los nodos del elemento a través de las funciones de forma $\mathbf{a}(x)$, de acuerdo con (3.a).

Solamente las deformaciones residuales $\mathbf{r}(x)$ no satisfacen estrictamente esta condición. Se podría integrar $\mathbf{r}(x)$ para obtener \mathbf{s} con (20) y recalculer las deformaciones en las secciones con $\mathbf{a}(x) \mathbf{s}$, pero es ineficiente desde el punto de vista computacional y se acepta el pequeño error en las deformaciones residuales.

2.5 Sección de hormigón armado discretizada en fibras

La Figura 3 muestra un elemento en su sistema de referencia local x, y, z , y un número discreto de secciones de control ubicadas en los puntos de integración numérica. En este caso se utiliza el esquema de Gauss-Lobato porque siempre considera a las secciones extremas como puntos de integración, que es donde se producen las deformaciones inelásticas más significativas.

Además de los vectores de esfuerzos internos $\mathbf{D}(x)$ y deformaciones de la sección $\mathbf{d}(x)$ definidos en la ecuación (2), se definen dos vectores más: $\mathbf{e}(x)$ vector de deformaciones de las fibras y $\mathbf{E}(x)$ vector de tensiones en las fibras, considerando i a la fibra genérica de un total de n fibras

$$\mathbf{E}(x) = \begin{Bmatrix} \sigma_1(x, y_1, z_1) \\ \vdots \\ \sigma_i(x, y_i, z_i) \\ \vdots \\ \sigma_n(x, y_n, z_n) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1(x, y_1, z_1) \\ \vdots \\ \varepsilon_i(x, y_i, z_i) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(x, y_n, z_n) \end{Bmatrix}\quad (25)$$

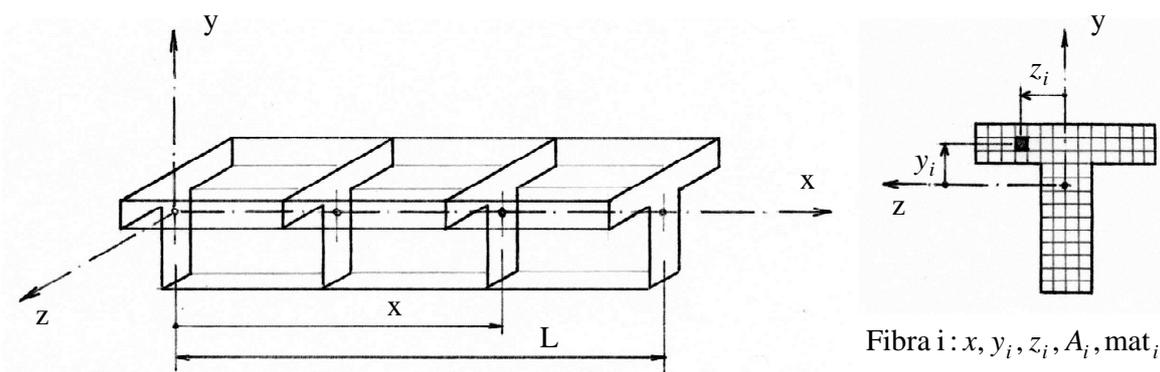


Figura 3: Secciones de control y discretización en fibras

Siguiendo la hipótesis que las secciones planas se mantienen planas y normales al eje del elemento, resulta la siguiente relación

$$\mathbf{e}(x) = \mathbf{L}(x) \mathbf{d}(x) \quad , \quad \mathbf{L}(x) = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & -y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_i & -y_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & -y_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

Se podrían considerar otras formas para $\mathbf{L}(x)$ si se pretende representar que las secciones no se mantienen planas, por ejemplo efectos de corte, deslizamiento de armaduras, etc.

El comportamiento no lineal físico del elemento es función de las relaciones constitutivas de los materiales utilizadas a nivel de cada fibra. Se emplean formulaciones uniaxiales que son las más estudiadas y mejor entendidas, y los efectos tridimensionales como el confinamiento del hormigón, son considerados modificando los parámetros de la curva uniaxial envolvente monotónica.

Los modelos constitutivos utilizados en este trabajo son

- Hormigón confinado: modelo de Mander et al. (1984, 1988) con rama de ablandamiento en tracción presentada por Martinelli y Filippou (2007). También se ha implementado el modelo de Kent y Park (1971) con modificaciones de Scott et al. (1980). En los ejemplos procesados las diferencias encontradas entre ambos modelos son pequeñas.
- Acero: modelo de Menegotto y Pinto (1973), con las modificaciones en el endurecimiento propuesto por Fronteddu (1992).

A partir de las deformaciones actuales de la sección \mathbf{d}^j (24) se calculan las deformaciones en cada fibra con (26). Con las relaciones constitutivas mencionadas se obtienen las nuevas tensiones σ_i^j y los nuevos módulos tangentes E_i^j , las que se agrupan en los vectores $\mathbf{E}^j(x)$ (25) y una matriz diagonal $\mathbf{E}_{tan}^j(x)$ respectivamente.

Llamando \mathbf{A} a una matriz diagonal con las áreas de las fibras A_i , se calcula el vector de esfuerzos internos $\mathbf{D}_R^j(x)$ y la matriz de rigidez $\mathbf{k}^j(x)$ de la sección a distancia x , con las siguientes expresiones

$$\mathbf{D}_R^j(x) = \mathbf{L}^T(x) \mathbf{A}(x) \mathbf{E}^j(x) = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n \sigma_i^j A_i \\ \sum_{i=1}^n \sigma_i^j A_i z_i \\ -\sum_{i=1}^n \sigma_i^j A_i y_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{k}^j(x) = \mathbf{L}^T(x) \left[\mathbf{E}_{\tan}^j(x) \mathbf{A}(x) \right] \mathbf{L}(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n E_i^j A_i & \sum_{i=1}^n E_i^j A_i z_i & -\sum_{i=1}^n E_i^j A_i y_i \\ & \sum_{i=1}^n E_i^j A_i z_i^2 & \sum_{i=1}^n E_i^j A_i y_i z_i \\ sim. & & \sum_{i=1}^n E_i^j A_i y_i^2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Finalmente se obtiene la flexibilidad de la sección con

$$\mathbf{f}^j(x) = \left[\mathbf{k}^j(x) \right]^{-1} \quad (29)$$

2.6 Implementación numérica

a) Función de interpolación de fuerzas

Se considera que no hay cargas aplicadas sobre el elemento, sino que las acciones están concentradas en los nodos, entonces el esfuerzo normal es constante y los momentos flectores tienen variación lineal, resultando la siguiente matriz de interpolación de fuerzas $\mathbf{b}(x)$ de la ecuación (3.b).

$$\mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{L} - 1 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{L} - 1 & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Otras formas para $\mathbf{b}(x)$ se pueden implementar para considerar cargas aplicadas sobre el elemento, trabajo pendiente para futuras aplicaciones.

b) Integración numérica

Todas las integrales en la formulación del elemento se evalúan numéricamente con el esquema de integración de Gauss-Lobato. Tiene la importante ventaja de incluir siempre los puntos extremos del elemento, es decir $\xi = \pm 1$, que es donde en general se concentra el comportamiento no lineal, asegurando así precisión y estabilidad numérica. Se recomienda un mínimo de 3 puntos de integración para barras de estructuras sismorresistentes.

c) Expansión a 12 grados de libertad

Los 5 grados de libertad de la Figura 1 se relacionan con los 12 grados de libertad de la Figura 4 con la siguiente relación para los incrementos de desplazamientos

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{T} \Delta \mathbf{v} \quad (31)$$

donde \mathbf{T} es una matriz de transformaciones geométricas. Para las fuerzas es

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{Q} \quad (32)$$

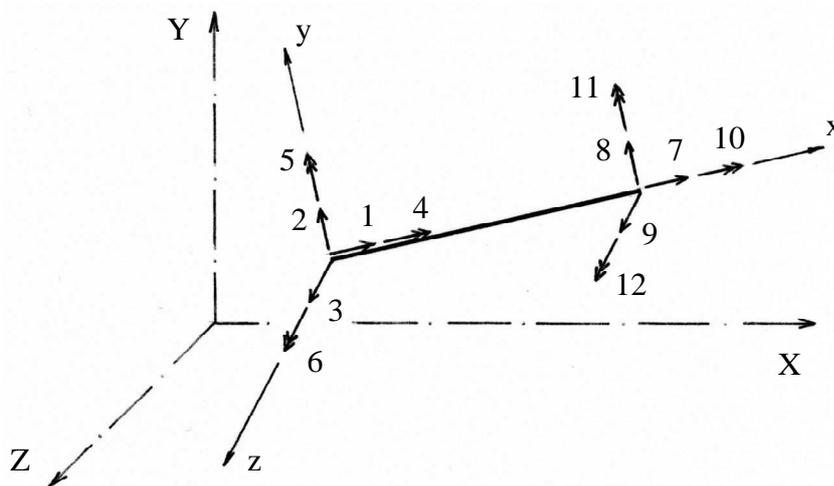


Figura 4: Sistema de coordenadas locales de 12 grados de libertad

Resultando la relación constitutiva para el elemento completo

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}^{-1} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \Delta \mathbf{v} = \mathbf{k}^{(el)} \Delta \mathbf{v} \quad (33)$$

A la matriz de rigidez del elemento $\mathbf{k}^{(el)}$ se le agregan las componentes de la rigidez a torsión elástica desacoplada

d) Estrategia de solución

La ecuación de movimiento, o de equilibrio dinámico a resolver es

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}_r \quad (34)$$

Se aplica el algoritmo de Newmark de integración directa paso a paso y el esquema iterativo de Newton-Raphson para ajustar el equilibrio en cada paso debido al comportamiento no lineal. Si las acciones externas son estáticas, los dos primeros términos de la ecuación (34) son nulos, y en lugar de pasos de tiempo se tendrán escalones de carga, identificados con el superíndice k en la sección 3.4, Figura 2.

En este trabajo se utiliza una matriz de masa \mathbf{M} concentrada en los nodos de la estructura, y una matriz de amortiguamiento \mathbf{C} con el criterio de Rayleigh proporcional a la masa y a la rigidez inicial.

Los criterios de convergencia utilizados son:

- A nivel de elemento, iteraciones j , se establece una tolerancia para el incremento de energía en la iteración j ($j \geq 2$) con respecto la energía correspondiente a $j = 1$

$$\frac{(\Delta \mathbf{Q}^j)^T \mathbf{s}^{j-1}}{(\Delta \mathbf{Q}^{j-1})^T \Delta \mathbf{q}^i} \leq EETOL = 10^{-5} \quad (35)$$

- A nivel de estructura, iteraciones i de Newton-Raphson, se establece una tolerancia para el

incremento de desplazamientos y para las fuerzas internas.

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}^i\|_2 - \|\Delta \mathbf{u}^{i-1}\|_2}{\|\Delta \mathbf{u}^i\|_2} \leq ETOL = 10^{-3} \quad , \quad \frac{\|\|^{t+\Delta t} \mathbf{F}_r^i\|_2 - \|\|^{t+\Delta t} \mathbf{F}_r^{i-1}\|_2}{\|\|^t \mathbf{F}_r\|_2} \leq RTOL = 10^{-3} \quad (36)$$

e) Avance con desplazamientos controlados

Con el objetivo de obtener la respuesta de una estructura con ablandamiento global, se puede utilizar el avance con desplazamiento controlado que básicamente consiste en:

Se elige el desplazamiento de un grado de libertad desplazable de la estructura u_n como valor controlado y entonces su magnitud en cada paso es dato. Un ejemplo es el push-over de una estructura sismorresistente mostrada en la Figura 5.

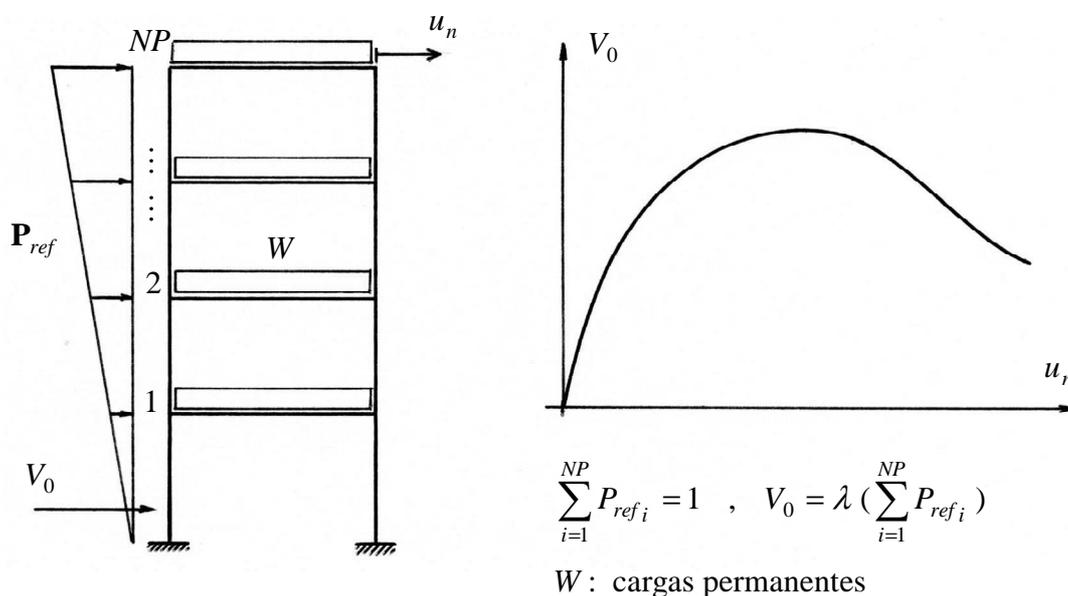


Figura 5: Sistema con desplazamiento controlado

El vector de cargas externas se escribe en cada paso k de la siguiente manera

$${}^k \mathbf{R} = {}^k \lambda \mathbf{P}_{ref} + {}^k \mathbf{W} \quad (37)$$

donde ${}^k \lambda$ es el factor de carga que multiplica al vector de carga de referencia \mathbf{P}_{ref} , y ${}^k \mathbf{W}$ otro vector de cargas dato, por ejemplo cargas permanentes. Entonces, al sistema clásico de ecuaciones se agrega una condición u_n y una incógnita λ .

3 VALIDACIÓN CON RESULTADOS EXPERIMENTALES

3.1 Columna con flexo-compresión recta

La columna utilizada para la validación del modelo de elemento discretizado en fibras se muestra en la Figura 6. Fue ensayada por Xinrong Li (1994) y forma parte de una serie de ensayos de columnas con diversas condiciones de cargas. El ensayo se realizó a desplazamientos controlados, realizando 2 ciclos completos para distintas amplitudes, las mismas fueron seleccionadas de forma de obtener ductilidades de desplazamiento $\mu_y = \Delta / \Delta_y$ crecientes ($\pm 0.75, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$) Durante el ensayo el nivel de carga axial se mantuvo constante.

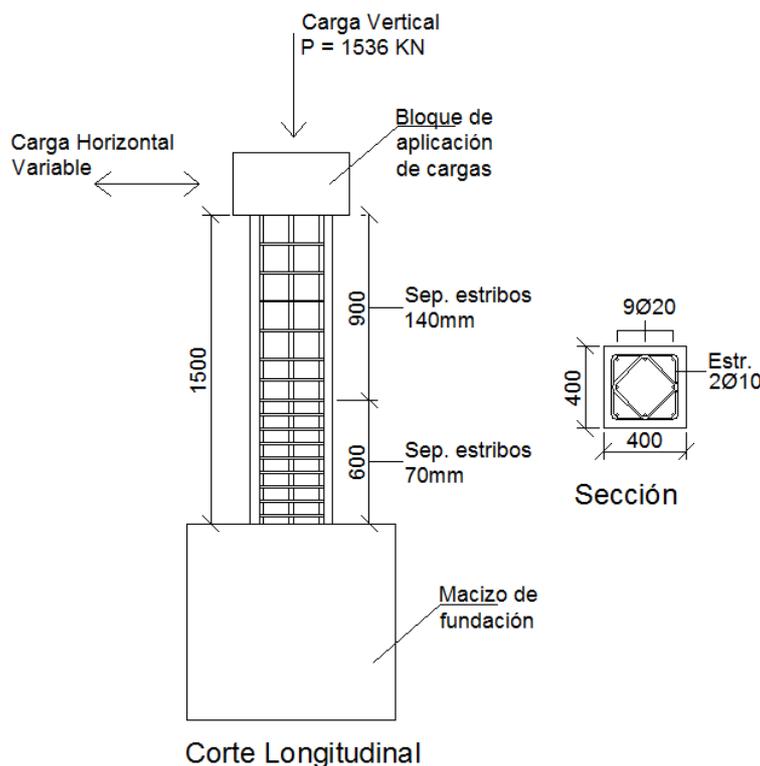


Figura 6: Columna sometida a flexo-compresión recta

La discretización se realiza con un solo elemento de barra y 5 puntos de integración (secciones de control), la sección de hormigón fue discretizada en 100 fibras cuadradas de 4cm x 4cm. La variación de la separación de estribos en altura se tiene en cuenta asignando las cuantías volumétricas de armadura transversal correspondientes a las distintas a las secciones de control. Se aplican desplazamientos impuestos en la cima, copiando la historia de desplazamientos del ensayo.

Los resultados se presentan en la Figura 7, los cuales muestran un acuerdo satisfactorio entre el modelo numérico y el ensayo hasta valores de ductilidad de desplazamientos $\mu_y = 4$, a partir de allí el elemento de fibras sufre un ablandamiento mayor al registrado en el ensayo. Esto puede deberse, entre otros factores, a diferencias en las características de los componentes de la estructura analizada.

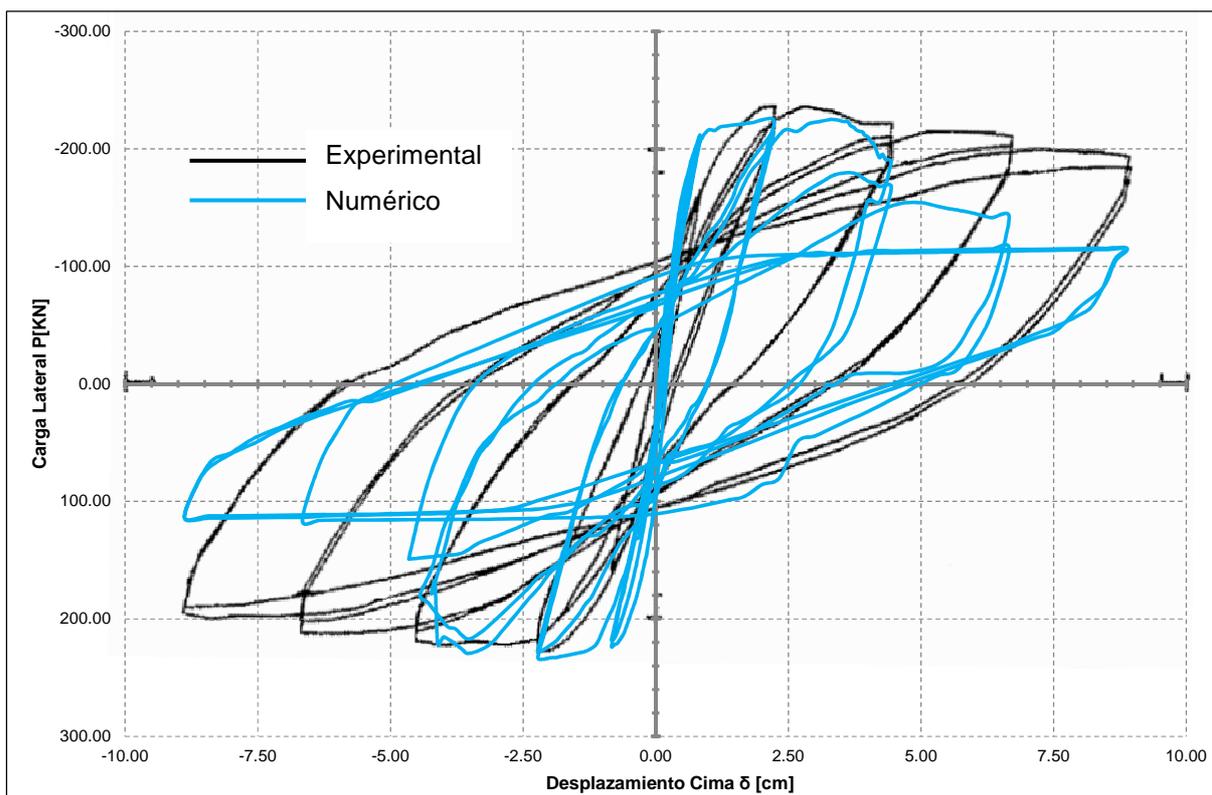


Figura 7: Carga lateral vs Desplazamiento en la cima.

4 APLICACIÓN A EDIFICIO DE DOS PLANTAS

4.1 Geometría

Se considera un edificio de dos plantas, cuya estructura sismorresistente está integrada por tres pórticos iguales de hormigón armado en cada dirección. En la Figura 8 se muestra la planta y elevación de la estructura.

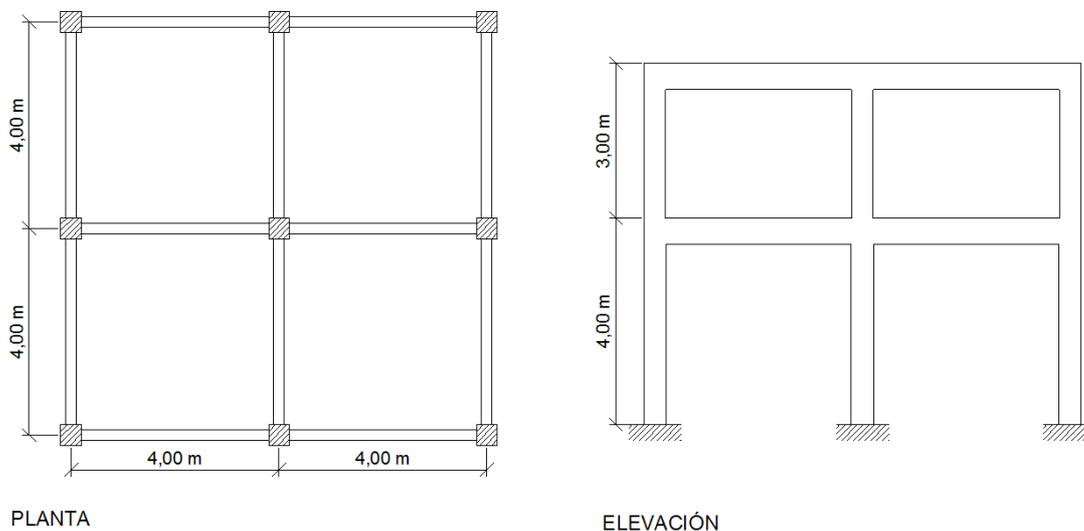


Figura 8: Geometría de la estructura

El análisis se realiza para dos casos de rigideces y resistencias distintas. “Estructura 1” con columnas de sección 50x50 y vigas de 25x55, y “Estructura 2” de menor rigidez y resistencia con secciones de 40x40 para columnas y 20x50 para vigas. Las armaduras se diseñan de modo de obtener cuantías longitudinales y transversales similares en ambos casos.

4.2 Modelos

La estructura se modeliza con elementos de barra espacial discretizadas en fibras. Las columnas se representan mediante un único elemento por piso con 5 secciones de integración, y las vigas se modelan mediante 4 elementos de barra en cada vano cada uno con 3 secciones de integración. De esta manera se realiza una discretización de las cargas permanentes verticales y una mejor aproximación en el mayor confinamiento en las secciones próximas al apoyo. La rigidez de las losas en su plano se representa con elementos de reticulado con gran rigidez axial.

También se utiliza el modelo de planos resistentes independientes en cada dirección principal de la planta (Möller y otros, 2003a). El modelo tiene tres grados de libertad por piso, dos horizontales y el giro alrededor del eje vertical. Cada plano resistente es a su vez discretizado con elementos de barra para considerar los diferentes mecanismos que contribuyen al comportamiento histerético en las zonas críticas de las barras de hormigón armado (Möller et al., 2003b). Para tener en cuenta que las columnas pertenecen en forma simultánea a 2 planos resistentes, se considera en cada plano la mitad de la rigidez axial de las columnas, y los parámetros representativos de la relación momento curvatura de las secciones se obtienen con la mitad de la armadura colocada en dos caras perpendiculares a la dirección del plano resistente, de este modo se realiza una aproximación de la resistencia de las columnas solicitadas a flexión en ambas direcciones.

4.3 Acciones

Las acciones consideradas para esta estructura son

a) Cargas permanentes y sobrecarga de utilización

Tanto las cargas gravitatorias como la masa activa en cada piso se determinan considerando una única carga uniformemente repartida de 7.5 KN/m^2 que tiene en cuenta las cargas permanentes de peso propio de la estructura y tabiques no estructurales, y la sobrecarga de utilización.

b) Acción sísmica

En este ejemplo se utiliza como acción sísmica el acelerograma registrado en Sylmar durante el terremoto de Northridge del 17/01/1994. Se aplican simultáneamente las dos componentes horizontales, ver Figura 9:

(i) En el eje X global: componente 90° con una aceleración pico $a_{G90} = 592.64 \text{ cm/s}^2$ en 4.08s;

(ii) En el eje Y global: componente 360° con una aceleración pico $a_{G360} = 826.76 \text{ cm/s}^2$ en 4.20s.

No se consideró la aceleración vertical porque el modelo de planos resistentes independientes en cada dirección no tiene grados de libertad verticales y entonces no podrían ser comparados los resultados.

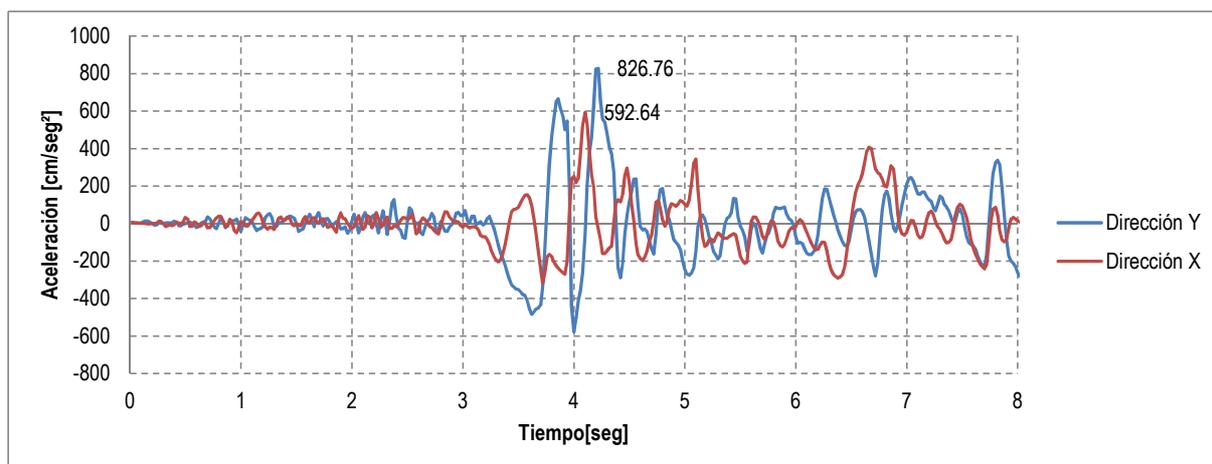


Figura 9: Acelerograma registrado en Sylmar del terremoto de Northridge 1994

4.4 Resultados numéricos y discusión

Se presentan a continuación los resultados numéricos comparando ambos modelos. En primer lugar en las Figuras 10, 11 y 12 se muestran los desplazamientos en la cima y la variación en el esfuerzo axial de las columnas de esquina, para la “Estructura 1” con columnas de sección 50x50 y vigas de 25x55.

En ambos modelos la respuesta de la estructura se da esencialmente en el campo elástico. El modelo de planos es aquel que presenta los mayores desplazamientos, pero para las dos direcciones analizadas tanto el modelo de fibras como el de planos oscilan dentro de rangos de desplazamiento similares.

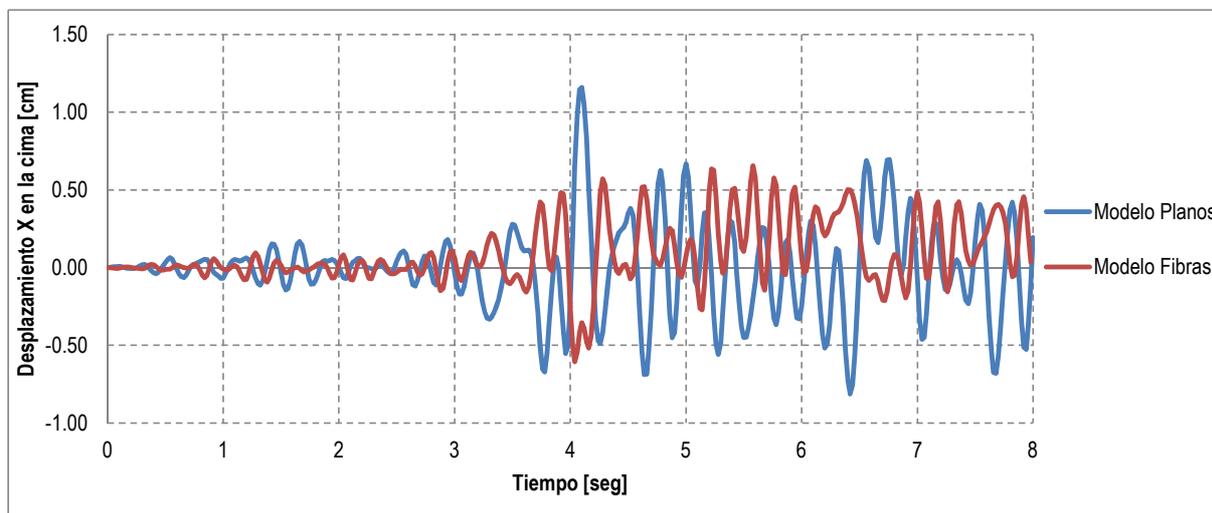


Figura 10: Estructura 1.Desplazamiento en la cima de columna de esquina en X

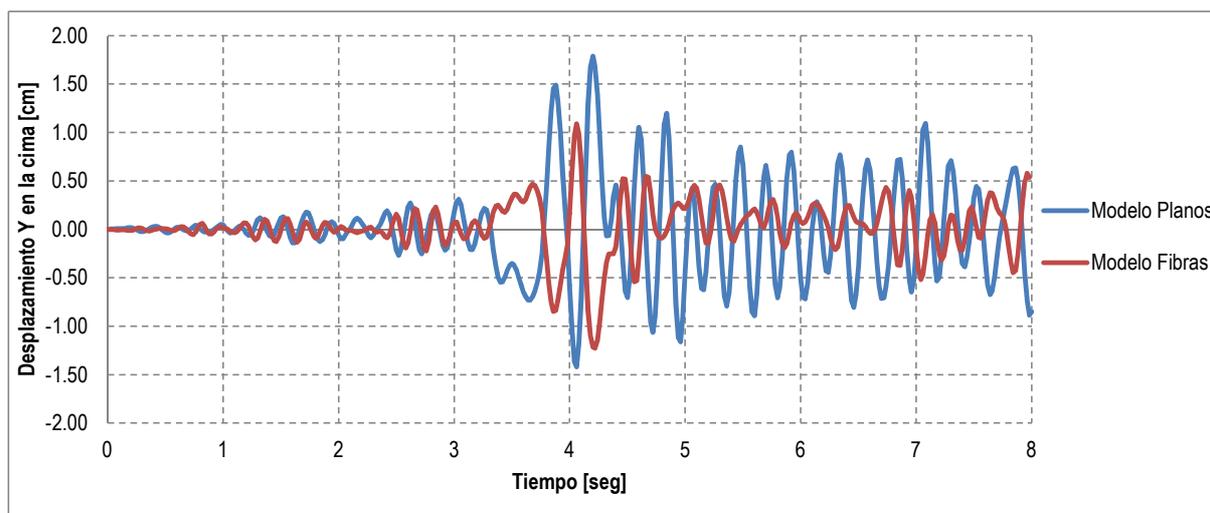


Figura 11: Estructura 1. Desplazamiento en la cima columna de esquina en Y

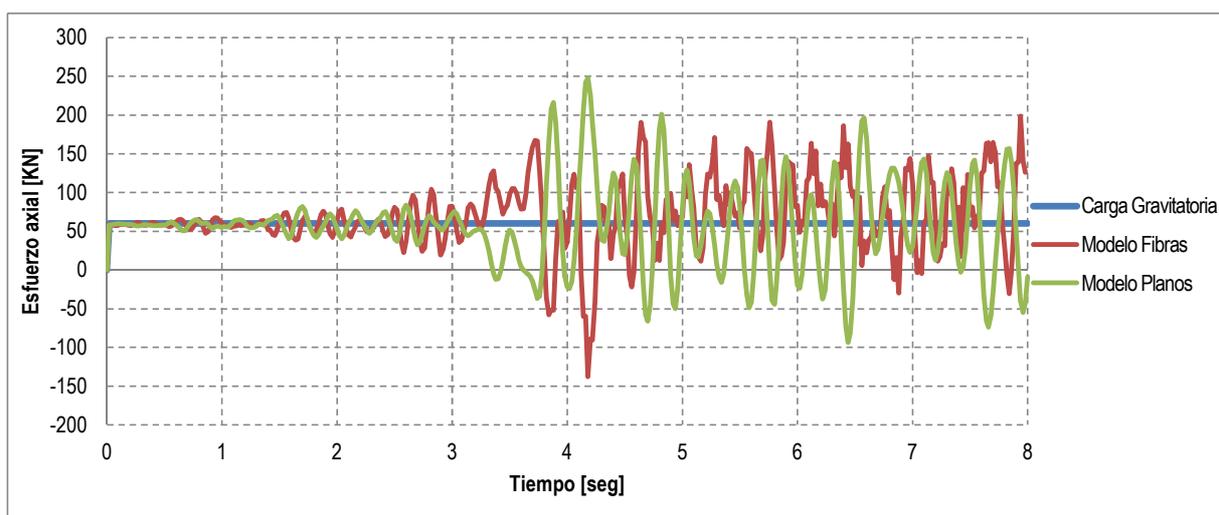


Figura 12: Estructura 1. Variación del esfuerzo axial en columnas de esquina

En la Figura 12 puede verse la variación del esfuerzo axial en el modelo de fibras y la suma de las fuerzas axiales de las columnas de los planos que concurren a la misma esquina. Se compara también con el valor constante considerado en la determinación previa de los parámetros representativos de las relaciones momento curvatura de las secciones utilizadas en el modelo de planos resistentes.

En ambas modelizaciones se verifica que la variación del esfuerzo axial ocurre alrededor del valor de la carga permanente, pero con magnitudes diferentes especialmente cuando la columna resulta traccionada (con esfuerzo axial negativo).

Para el modelo de planos, los resultados numéricos también indican que en el mismo instante de tiempo la columna perteneciente a un plano está traccionada mientras que en el plano perpendicular concurrente a la misma columna está comprimida. Se debe a que el modelo de tres grados de libertad por piso (planos resistentes independientes) no contempla la compatibilidad de deformaciones axiales entre los planos.

En las Figuras 13 y 14 se muestran los resultados numéricos correspondientes a los desplazamientos en la cima de una de las columnas de esquina de los modelos de planos resistentes y de elementos de fibras pero ahora para la “Estructura 2” de menor rigidez y resistencias, es decir con secciones de columnas de 40x40 y vigas de 20x50.

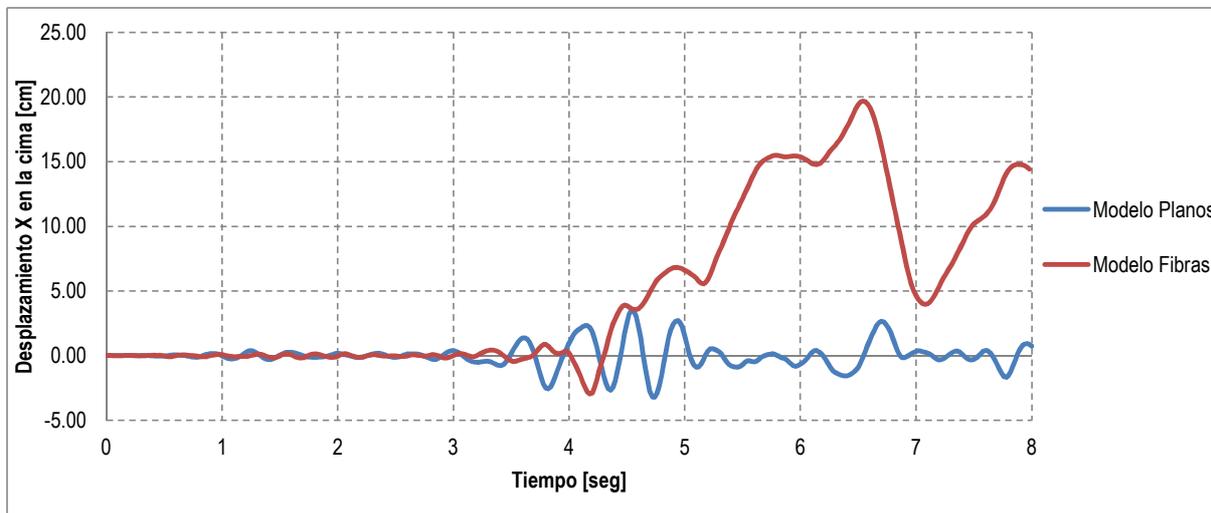


Figura 13: Estructura 2. Desplazamiento en la cima columna de esquina en X

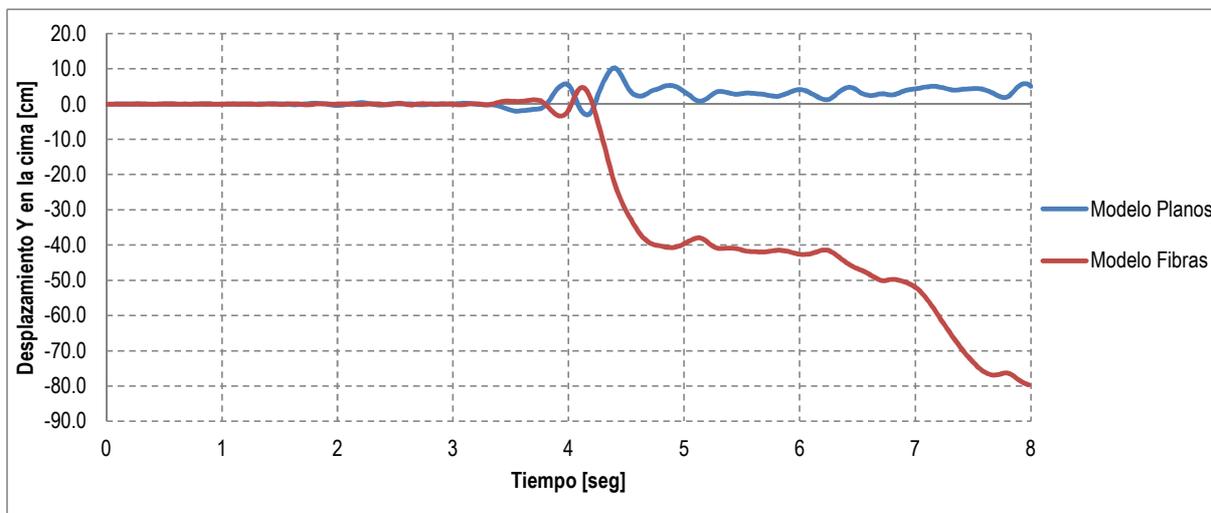


Figura 14: Estructura 2. Desplazamiento en la cima columna de esquina en Y

Los resultados muestran diferencias significativas en desplazamientos. La columna de la esquina analizada en el modelo de fibras incursiona fuertemente en el campo inelástico una vez pasado el pico de aceleración, y a partir de allí la respuesta en la dirección Y deja de ser oscilatoria conduciendo a la falla.

En cambio el modelo de plano resistentes si bien incursiona de manera significativa en el campo inelástico, mantiene una respuesta oscilatoria con desplazamientos mucho menores al modelo de elementos discretizados en fibras.

En la Figura 15 se presenta la variación en el esfuerzo axial en dicha columna de esquina.

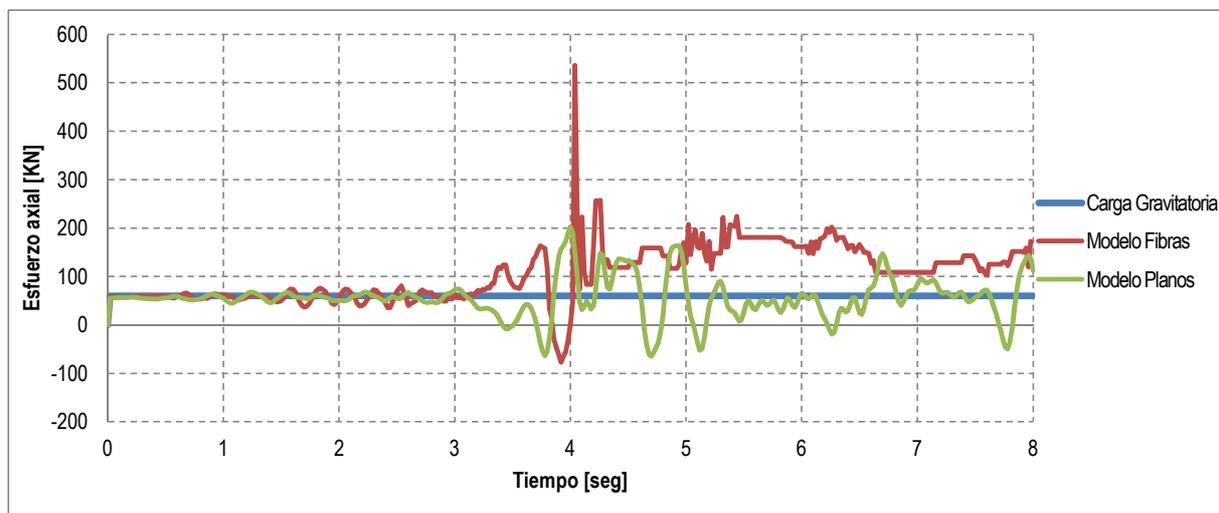


Figura 15: Estructura 2. Variación del esfuerzo axial en columnas de esquina

La respuesta diferente entre ambos modelos muestra la importancia de la interacción entre el esfuerzo axial variable, de compresión y de tracción, con la flexión oblicua, principalmente cuando se presentan fuertes incursiones en el campo no lineal físico. La discretización por planos independientes en cada cara de la planta no tiene en cuenta este fenómeno porque por un lado en cada plano solo interviene la resistencia en la dirección paralela al mismo, y además la influencia de la variación del esfuerzo axial no es tenida en cuenta porque en los parámetros de la relación momento curvatura de las secciones de las barras interviene con un valor constante igual al producido por las cargas gravitatorias.

5 CONCLUSIONES

- Se compararon los resultados de una columna ensayada experimentalmente por otros autores, con el modelo numérico de elementos discretizados en fibras presentado en este trabajo. Hasta ductilidad 4 los resultados son muy satisfactorios, mostrando luego el modelo de fibras un mayor deterioro de la resistencia con los sucesivos ciclos que los registrados en el ensayo.
- Se ha presentado el análisis de una estructura sismorresistente de dos plantas solicitada por las cargas gravitacionales permanentes y por la acción simultánea de las dos componentes horizontales del acelerograma registrado en Sylmar durante el terremoto de Northridge. Se estudió la respuesta para dos magnitudes de rigidez y resistencia de los elementos estructurales.
- La estructura fue representada con dos tipos de modelos numéricos: (i) elementos espaciales discretizados en fibras; (ii) sistema de tres grados de libertad por piso y planos resistentes independientes en cada dirección de la planta.
- Se investigó la respuesta de desplazamientos horizontales en el piso superior y el comportamiento de una columna de esquina, obteniéndose para este ejemplo las siguientes conclusiones:

- Cuando el comportamiento es esencialmente elástico, caso de la “Estructura 1”, los dos tipos de modelos presentan resultados, que si bien tienen diferencias, están dentro de valores razonablemente similares.
- Cuando el comportamiento presenta incursiones significativas dentro del rango inelástico, caso de la “Estructura 2”, las diferencias son muy grandes, debido a la interacción entre el esfuerzo normal variable y la flexión oblicua, que solo es tenido en cuenta en forma natural en el modelo de elementos discretizados en fibras.
- En este último caso, el modelo de planos independientes no produce resultados confiables por la falta de compatibilidad de deformaciones axiales entre los planos que comparten una misma columna, hecho que quedó mostrado en los resultados numéricos de la columna estudiada. Este tipo de modelo se puede utilizar eficazmente cuando no hay elementos estructurales comunes a dos planos resistentes.
 - La discretización con elementos de fibras muestra una gran potencialidad para representar este comportamiento, manteniendo la simplicidad propia de los elementos de barra, que permiten analizar estructuras de escala ingenieril. Se continuará mejorando la eficiencia numérica de este tipo de elemento, y también se prevé la incorporación de la falla por corte.

REFERENCIAS

- D’Ambrisi, A. and Filippou, F.C., Correlation studies on an RC frame shaking table specimen. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.26, N° 10, pp. 1021-1040, 1997.
- Filippou, F.C. and Issa, A., Nonlinear analysis of reinforced concrete frames under cyclic load reversals. *Earthquake Engineering Research Center*, Report N° EERC 88-12, University of California, Berkeley, 1988.
- Filippou, F.C., D’Ambrisi, A. and Issa, A., Nonlinear static and dynamic analysis of reinforced concrete subassemblages. *Earthquake Engineering Research Center*, Report N° EERC 92-08, University of California, Berkeley, 1992.
- Fronteddu, L.F. Response of reinforced concrete to reverse cyclic loading. *Thesis of Ms. of Applied Science, University of British Columbia, Canadá*, 1992.
- Kent, D.C. and Park, R. Flexural members with confined concrete. *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.97 (ST7), pp.1969-1990, 1971.
- Mander, J.B., Priestley, M.J.N. and Park, R., Seismic design of bridge piers, *Research Report 84-2, Department of Civil Engineering*, University of Canterbury, New Zealand, 1984.
- Mander, J.B., Priestley, M.J.N. and Park, R., Theoretical stress strain model for confined concrete, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 114(ST8), pp1804-1826, 1988.
- Martinelli, P. and Filippou, F.C., Numerical simulation of the shaking table test of a seven story RC shear wall structure. *ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamic and Earthquake Engineering*, Crete, Greece, june, 2007
- Menegotto, M., Pinto, P.E. Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and nonelastic behavior of elements under combined normal force and bending. *Proceedings IABSE Symp. of Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well Defined Repeated Loads*, Lisbon, pp.15-22, 1973.
- Möller, O., Rubinstein, M., Cóceres, H. Combinación de planos sismorresistentes para análisis dinámico no lineal de estructuras espaciales. *Mecánica Computacional Vol. XXII*, 997-1011, AMCA, 2003a.

- Möller, O., Foschi, R.O. Reliability evaluation in seismic design: a response surface methodology. *Earthquake Spectra*, 19 (3), 579-603, 2003b.
- Möller, O., Quiroz, L., Rubinstein, M. Desempeño numérico de elementos de barra en análisis no lineal estático y dinámico. *Mecánica Computacional* Vol. XXVIII, 587-611, AMCA, 2009.
- Scott, B.D., Park, R., and Priestley, M.J.N. Stress-strain relationship for confined concrete. *Research Report 80-6, Department of Civil Engineering, University of Canterbury, New Zealand*, 1980.
- Spacone, E., Filippou, F.C. and Taucer, F.F., Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I: formulation and Part II: applications. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.25, N° 7, pp.711-742, 1996.
- Taucer, F.F., Spacone, E. and Filippou, F.C., A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures. *Earthquake Engineering Research Center*, Report N° EERC 91-17, University of California, Berkeley, 1991.
- Taylor, R.L., Filippou, F.C., Saritas, A. and Auricchio, F., A mixed finite element method for beam and frame problems. *Computational Mechanics* 31, 192-203, 2003.
- Xinrong Li. Reinforced concrete columns under seismic lateral force and varying axial load. Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in Civil Engineering, University of Canterbury. New Zealand, 1994.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. *El Método de los Elementos Finitos. Vol I: Formulación Básica y Problemas Lineales, Vol II: Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y No Linealidad*. Mc Graw Hill – CIMNE – 4° Ed. – Madrid, 1994.