

MODELADO Y SIMULACIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO VISCOZO EN MICROPLACAS PERFORADAS

Juan José Gómez Barroso^{a,c}, Alberto Cardona^a y Claudio Berli^b

^a*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), Universidad Nacional del Litoral-CONICET, Güemes 3450, S3000GLN Santa Fe, Argentina*

^b*INTEC-Universidad Nacional del Litoral-CONICET, Güemes 3450, S3000GLN Santa Fe, Argentina*

^c*e-mail: jgomezb@intec.unl.edu.ar*

Palabras Clave: MEMS, micro-placas perforadas, flujo de estrujamiento, Ecuación de Reynolds.

Resumen. En este trabajo se presenta la formulación de un modelo para simular el amortiguamiento viscoso producido por un gas confinado entre una micro-placa móvil perforada y otra placa fija. Este tipo de dispositivos son típicos en MEMS (Sistemas Micro-electromecánicos), particularmente en micro-interruptores de radiofrecuencia (switch RF-MEMS). Se desarrolla un modelo numérico por el Método de Elementos Finitos para resolver el campo de presiones y desplazamientos sobre la placa móvil. El fluido confinado se modela a través de la Ecuación de Reynolds 2D con condiciones de contorno mixtas en todas las fronteras. Para analizar las perforaciones se considera el resbalamiento en las paredes (slip), como así también el efecto en los extremos (entrada y salida del fluido). El modelo se implementa en Oofelie, y se muestran los resultados obtenidos comparando con datos extraídos de la bibliografía.

1. INTRODUCCIÓN

En los dispositivos MEMS, podemos ver que muchos poseen perforaciones provenientes del proceso de fabricación. Éstas se realizan con el objetivo de remover uniformemente la capa de sacrificio que se deposita sobre el sustrato o placa fija. Sobre esta capa se depositará el material de la parte móvil que quedará en voladizo al remover el material de sacrificio. Esa remoción se lleva a cabo en algunos casos por ataques de ácidos. Si la placa superior no contuviera perforaciones, el ácido removería material únicamente por los lados laterales libres de la placa, sometiendo a la estructura a un ataque de ácido innecesario mientras llega al centro de la placa para remover todo el material. Por lo que resulta práctico realizar perforaciones en la placa superior, de manera tal que el ácido aplicado acceda por esas perforaciones al material en cuestión (Goldsmith et al., 1998).

Esto tiene su contrapartida si se desea que el dispositivo se amortigüe, por ejemplo, en los interruptores. Cuando el potencial de actuación se reduce para llevarlo al estado de OFF, el dispositivo se libera, y la parte móvil se restituye al estado de equilibrio. En este caso es necesario reducir el tiempo de oscilación que comienza en la liberación y finaliza una vez alcanzado el equilibrio. Por lo tanto es necesario lograr el mayor amortiguamiento sobre la estructura, siendo el aire el factor más relevante.

Por esta razón resulta importante desarrollar un modelo que represente el amortiguamiento viscoso en presencia de estas perforaciones, considerado en publicaciones recientes (Bao et al., 2003a,b; Veijola, 2006; Pandey y Pratap, 2008; Somà y De Pasquale, 2008; Veijola et al., 2009; Homentcovschi y Miles, 2010) y trabajo preliminar (Gomez Barroso et al., 2012). En este trabajo se presenta dicho modelo, basado en la ecuación de Reynolds no lineal (White, 1974) con condiciones de contorno apropiadas para modelar, tanto el efecto de entrada y salida del flujo debido al estrujamiento en las fronteras libres, como el efecto de las perforaciones consideradas en forma individual.

La implementación del modelo obtenido se realiza utilizando el software *Oofelie* como solver. *Oofelie* (Object Oriented Finite Element Led by Interactive Executer) es un software desarrollado en el lenguaje C++, que permite la resolución de problemas multifísicos ¹.

Se presentan los resultados obtenidos al implementar el modelo en *Oofelie*, y se comparan con resultados reportados en la literatura.

2. FORMULACIÓN DEL MODELO

En el caso de microdispositivos de dimensiones que se consideran en este trabajo, y en condiciones de temperatura y presión ideales, para modelar el flujo de estrujamiento en el aire confinado entre placas paralelas debemos utilizar la simplificación de la ecuación de Navier-Stokes conocida como la ecuación no lineal de Reynolds en un dominio 2D (por ejemplo, Bao y Yang (2007); Gomez Barroso et al. (2009)).

Dado un fluido de viscosidad μ confinado entre una placa móvil y el sustrato, y considerando que no actúan fuerzas externas (generalmente, en dispositivos MEMS las fuerzas debido a la gravedad son despreciables), tenemos la siguiente ecuación diferencial (Bao y Yang, 2007):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial(hP)}{\partial t} \quad (1)$$

donde $P = p_0 + p$ y $h = h_0 + z$, siendo P la presión sobre la placa móvil, p_0 la presión

¹<http://www.open-engineering.com/index.php/eng>

ambiente, h_0 la distancia de equilibrio entre las dos partes (*gap*) y z el desplazamiento en la dirección vertical.

Consideramos el caso de una placa rectangular con M perforaciones que se mueve en dirección normal al sustrato. Podemos asumir que la variación de la presión en la dirección normal a los bordes empotrados Γ_{q_0} es nula (Darling et al., 1998).

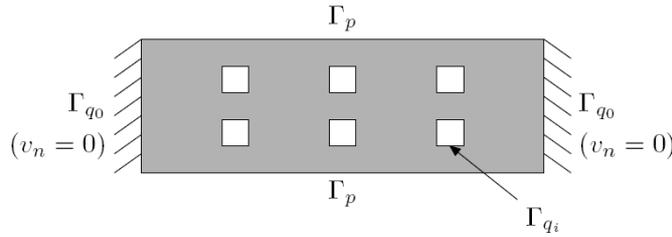


Figura 1: Dominio Ω (en gris) y fronteras con distintas condiciones de contorno.

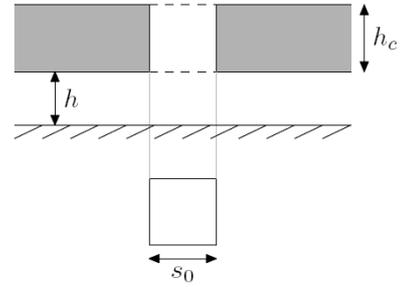


Figura 2: Perforación.

Tanto en los contornos Γ_{q_i} (con $i = 1, 2, \dots, M$) de las perforaciones como en los contornos libres Γ_p , la variación de la presión es proporcional a la velocidad normal promedio v_n del fluido sobre esas fronteras. Por lo tanto, el problema para resolver el campo de presión que ejerce el fluido sobre la placa móvil queda determinado a partir de la Ec. (1) como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial(hP)}{\partial t} \quad \text{en } \Omega \quad (2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{12\mu}{h^2} v_n \quad \text{sobre } \bigcup_{i=0}^n \Gamma_{q_i} \cup \Gamma_p \quad (2b)$$

En la ecuación anterior, el dominio del fluido Ω se asume coincidente con la superficie media entre placas, y las fronteras Γ_p y Γ_{q_i} , como se describió anteriormente, son las fronteras donde se considera la velocidad normal del fluido. El caso $i = 0$ es la frontera de empotramiento ($v_n = 0$) en el borde externo, mientras que $i = 1, \dots, M$ corresponde a las fronteras de las perforaciones sobre el dominio Ω .

3. MODELO NUMÉRICO

3.1. Formulación débil

Partiremos de la Ec. (2a) aplicando las condiciones de contorno propuestas. Teniendo en cuenta un análisis similar al de Veijola (2006), se considera a la perforación como un circuito de resistencias hidráulicas (ver Fig. 3).

Debilitando (2a) e integrando por partes obtenemos:

$$\int_S \frac{p_0 h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\delta p)}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dS + \int_S \delta p \left(h \frac{\partial p}{\partial t} + p_0 \frac{\partial h}{\partial t} \right) dS - \sum_{i=0}^M \left(\int_{\Gamma_{q_i}} \delta p \left(\frac{p_0 h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \right) d\Gamma \right) - \int_{\Gamma_p} \delta p \left(\frac{p_0 h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (3)$$

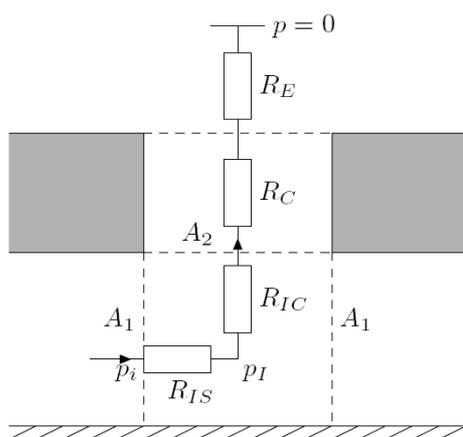


Figura 3: Esquema de la perforación como circuito con resistencias hidráulicas.

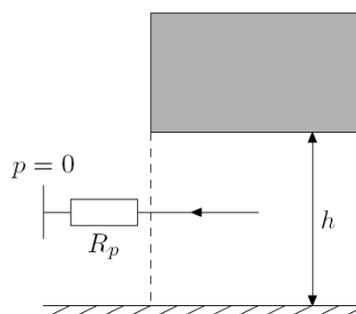


Figura 4: Esquema para el análisis del contorno Γ_P .

Hemos considerado que las perturbaciones de presión respecto de p_0 son pequeñas ($p \ll p_0$). Esta condición es requisito para la validez de la Ecuación de Reynolds. Por lo tanto, en los pequeños dominios de cada elemento, consideramos $P \approx p_0$. Considerando una perforación i , el caudal de entrada a través de la frontera Γ_{q_i} es:

$$Q_i \equiv \int_{\Gamma_{q_i}} v_n h d\Gamma \quad (4)$$

donde Γ_{q_i} es el contorno inferior de la perforación i , v_n es la velocidad normal promedio a ese contorno, y h es el gap a la altura de la perforación. Usando las condiciones (2b) y la ecuación (4), tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_S \frac{p_0 h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\delta p)}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dS + \int_S \delta p \left(h \frac{\partial p}{\partial t} + p_0 \frac{\partial h}{\partial t} \right) dS \\ & + \sum_{i=1}^M p_0 Q_i + \int_{\Gamma_p} (\delta p) p_0 h v_n d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Analizando la diferencia de presión entre diferentes puntos según la Fig. 3 tenemos:

$$p_i - p_I = R_{IS} Q_i \quad (6)$$

$$p_I = (R_{IC} + R_C + R_E) (Q_i + Q_2) \quad (7)$$

donde p_i corresponde a la presión en el contorno inferior de la perforación i y Q_i el caudal que atraviesa el área A_1 .

Resolviendo (6) y (7) para Q_i considerando a $Q_2 = A_2 v_z$, donde v_z es la velocidad vertical de la placa, obtenemos la expresión que necesitamos para la implementación de nuestro modelo:

$$Q_i = \frac{1}{R_{IS} + R_{IC} + R_C + R_E} p_i - \frac{R_{IC} + R_C + R_E}{R_{IS} + R_{IC} + R_C + R_E} A_2 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (8)$$

que la podemos expresar como:

$$Q_i = Y_i p_i - C_i \frac{\partial h}{\partial t} \quad (9)$$

Para tener en cuenta el efecto de borde de los contornos libres Γ_P (ver Fig. 4), consideramos el caudal del flujo que atraviesa una sección de altura h y ancho unitario en Γ_P :

$$hv_n = \frac{1}{R_p} p \quad (10)$$

donde R_p es la resistencia hidráulica por unidad de longitud calculada como:

$$R_p = \frac{12\mu}{h^2} \Delta_p \quad (11)$$

donde Δ_p es un parámetro de longitud efectiva, dependiente de la geometría de la perforación. Obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} & \int_S \frac{p_0 h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\delta p)}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dS + \int_S \delta p \left(h \frac{\partial p}{\partial t} + p_0 \frac{\partial h}{\partial t} \right) dS \\ & + p_0 \sum_{i=1}^M \delta p_i Y_i p_i - p_0 \sum_{i=1}^M \delta p_i C_i \frac{\partial h}{\partial t} + \int_{\Gamma_P} \delta p \left(\frac{p_0 h^2}{12\mu \Delta_p} \right) p d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

3.2. Expresiones de las resistencias

Veamos qué representa cada resistencia involucrada en nuestro análisis. Primeramente, tenemos la resistencia del *canal* (sección cuadrada) de la perforación representada por R_C . Si consideramos efectos de entrada y salida del fluido, éstos se representan por las resistencias R_{IC} y R_E . En este sentido, podemos expresar la resistencia en la perforación como la suma de R_C , R_{IC} y R_E . Si consideramos un flujo Poiseuille, tendremos:

$$R_C + R_{IC} + R_E = \frac{\chi\mu}{2s_0^4} \left(\frac{h_c}{1 + 7.567K_{ch}} + (\Delta_C + \Delta_E) 1.094 \frac{s_0}{2} \right) \quad (13)$$

K_{ch} es el número de Knudsen para un canal $K_{ch} = \lambda/s_0$ donde λ es el camino libre medio entre las partículas del fluido. El término $\mu/(1 + 7.567K_{ch})$ representa una viscosidad efectiva que considera el efecto de resbalamiento en las paredes de la perforación (Veijola, 2006).

El valor de $\Delta_C + \Delta_E$ que utilizaremos es de $8/3\pi$ (Sharipov y Seleznev, 1998).

Analicemos ahora la resistencia R_{IS} . Según Veijola (2006), podemos considerar un *canal* de ancho $w = 4s_0$, altura h (es decir, canal de sección A_1) y longitud $\Delta_S h$. Si no consideramos el escalamiento por áreas (A_0^2/A_1^2), evitando la dependencia de *celdas* (Veijola, 2006), podemos expresar R_{IS} como:

$$R_{IS} = \frac{3\mu}{s_0 h^2} \Delta_S \quad (14)$$

Utilizamos como Δ_S el valor para *canal* que mencionamos anteriormente: $8/3\pi$.

4. IMPLEMENTACIÓN

En un trabajo previo, se presentó el modelo de la ecuación de Reynolds para el efecto de flujo de estrujamiento (*squeeze flow*) para sistemas como los que consideramos en este trabajo. Considerando el equilibrio dinámico de la placa móvil, se obtiene la siguiente formulación débil para la parte estructural:

$$\int_V \delta \epsilon^T \sigma dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho_s \ddot{\mathbf{u}} dV - \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{n} p dS = 0. \quad (15)$$

donde ϵ y σ son los vectores en la notación de Voigt que representan a los tensores de deformación y tensión respectivamente. \mathbf{u} es el vector de desplazamiento mecánico. Hemos considerado las fuerzas de cuerpo despreciables (debido a las pequeñas dimensiones con las que trabajamos). Consideramos una fórmula de interpolación para el vector de desplazamientos de la forma $\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{Q}(x, y, z)\mathbf{q}(t)$ y para el campo de presiones $p(x, y, z, t) = \mathbf{R}(x, y, z)\mathbf{p}(t)$, donde $\mathbf{q} = [\mathbf{u}_1^T \dots \mathbf{u}_N^T]^T$ es el vector $n \times 1$ de desplazamientos nodales ($n = 3N$), $\mathbf{p} = [p_1 \dots p_m]^T$ es el vector $m \times 1$ de las presiones nodales, y \mathbf{Q} (resp. \mathbf{R}) es una matriz $3 \times n$ (resp. $1 \times m$) de funciones de interpolación, tal como lo describen Gomez Barroso et al. (2009).

Teniendo en cuenta la ley de Hooke generalizada $\sigma = C\epsilon$, y la relación deformación-desplazamiento $\epsilon = \mathbf{B}\mathbf{q}$, donde C es el tensor de segundo orden que representa al tensor de coeficientes elásticos de cuarto orden y \mathbf{B} la matriz de interpolación de deformaciones, tenemos el siguiente sistema matricial:

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}\mathbf{p}) = 0 \quad (16)$$

siendo las matrices \mathbf{M} , \mathbf{K} y \mathbf{G} la siguientes:

$$\mathbf{M} = \int_V \rho_s \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} dV, \quad \mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{G} = \int_S \mathbf{Q}^T \mathbf{n} \mathbf{R} dS. \quad (17)$$

Por otro lado, para modelar el fluido, partiendo de la Ec. (12), los dos primeros términos los podemos representar en forma matricial como sigue:

$$\delta \mathbf{p}^T (\mathbf{E}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}}) = 0, \quad (18)$$

donde las matrices $\mathbf{E}(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}(\mathbf{p})$ y $\mathbf{A}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ se calculan por medio de

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{q}) &= \int_S \frac{h}{p_0} \mathbf{R}^T \mathbf{R} dS, & \mathbf{H}(\mathbf{p}) &= \int_S \frac{P}{p_0} \mathbf{R}^T \mathbf{n}^T \mathbf{Q} dS, \\ \mathbf{A}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \int_S \frac{Ph^3}{12\mu p_0} (\mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_y) dS. \end{aligned} \quad (19)$$

Finalmente se llega al siguiente sistema acoplado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (20)$$

Los aportes nodales de las expresiones Y_i y C_i de la Ec. (12) se agregan en las matrices \mathbf{A} y \mathbf{H} respectivamente, mientras que la integral de contorno sobre Γ_p aporta a la matriz \mathbf{A} .

5. RESULTADOS

Para validar el modelo propuesto, lo implementamos en ejemplos extraídos de la bibliografía (De Pasquale y Veijola, 2008). Se modela una placa cuadrada con perforaciones, sometida a una velocidad fija de oscilación. Se comparan resultados donde se utiliza el modelo por el método PPR (Veijola y Råback, 2007).

Este método se basa en la ecuación linealizada de Reynolds (21) para flujo incompresible, en la cual se agrega un término de admitancia de flujo adicional Y_h que considera la resistencia del flujo debido a las perforaciones.

$$D_h \frac{h^3}{12\mu_{eff}} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - Y_h p = v \quad (21)$$

donde tanto Y_h como v dependen de x y y , y μ_{eff} es un coeficiente de viscosidad efectiva que depende del número de Knudsen. D_h es un coeficiente de difusividad adicional. La solución del método PPR consiste en dos partes: i) determinar el perfil de admitancia y difusividad relativa debido a las perforaciones y ii) resolver la Ec. (21) con un solver FEM en 2D armónico. Se utilizan correcciones de deslizamiento en paredes (μ_{eff}) y efectos de contorno en los bordes externos de la estructura.

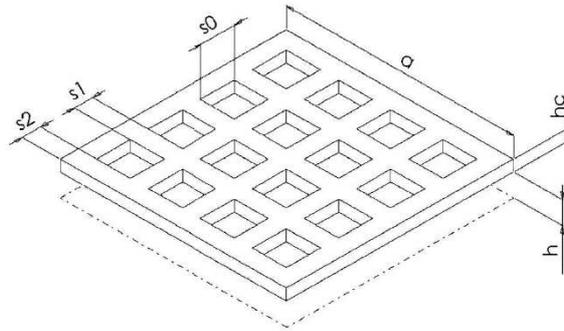


Figura 5: Esquema de la placa perforada para los ejemplos numéricos.

La velocidad vertical impuesta es de $v = 1\text{m/s}$, y se considera un gap de $h_0 = 1\mu\text{m}$. La estructura modelada es una placa cuadrada de $40\mu\text{m}$ de lado, con una red de 16×16 perforaciones de sección cuadrada (ver Fig. 5). Se analizan ocho estructuras distintas combinando dos espesores h_c distintos ($1\mu\text{m}$ y $5\mu\text{m}$) para cuatro tamaños distintos de perforaciones de lado s_0 ($0.5\mu\text{m}$, $1\mu\text{m}$, $2\mu\text{m}$ y $3\mu\text{m}$). Por razones de simetría, sólo se modela un cuarto de la placa.

A modo de ilustración, mostramos en la Fig. 6 los perfiles de presión para el caso de una perforación pequeña ($s_0 = 0.5\mu\text{m}$, y $h_c = 5\mu\text{m}$) y otra mayor ($s_0 = 3\mu\text{m}$ y $h_c = 1\mu\text{m}$).

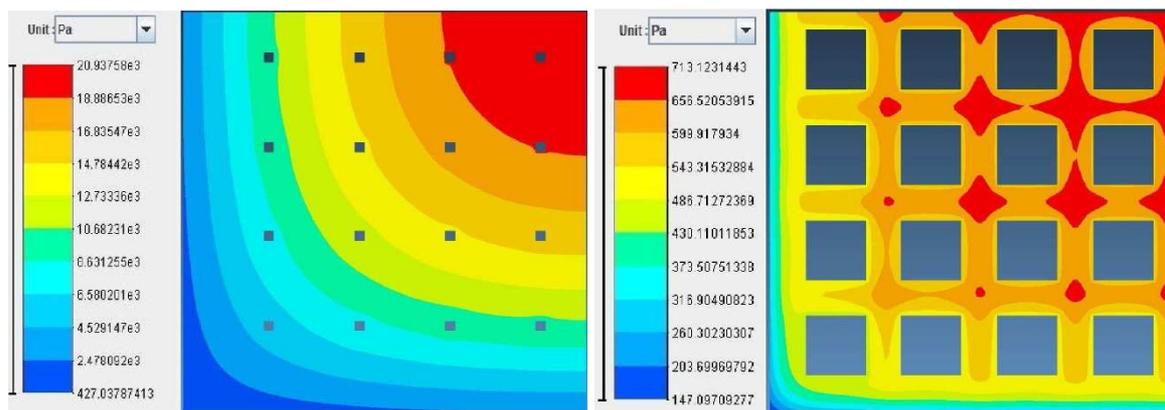


Figura 6: Perfiles de presión obtenidos con nuestro modelo. A la izquierda $s_0 = 0.5\mu\text{m}$ y $h_c = 5\mu\text{m}$. A la derecha $s_0 = 3\mu\text{m}$ y $h_c = 1\mu\text{m}$.

Analizamos el valor de la *resistencia mecánica* Z_m , definida como el cociente entre la fuerza F que ejerce el fluido sobre la placa y la velocidad en la dirección vertical (impuesta para todos los modelos en $v = 1\text{m/s}$). En la Fig. 7 se muestran los resultados obtenidos en el cálculo de la resistencia mecánica en función de una razón de perforación (porcentaje del área ocupada por las perforaciones en relación al área de la placa sin perforaciones). Los resultados obtenidos con nuestro modelo se representan con línea de trazos roja en el caso de espesor de la placa

$h_c = 5\mu\text{m}$ y línea continua azul para el caso de $h_c = 1\mu\text{m}$. Se comparan con valores obtenidos por un modelo 3D *full* (representado por cuadrados y puntos gruesos respectivamente) utilizado como referencia para la estimación de errores en De Pasquale y Veijola (2008).

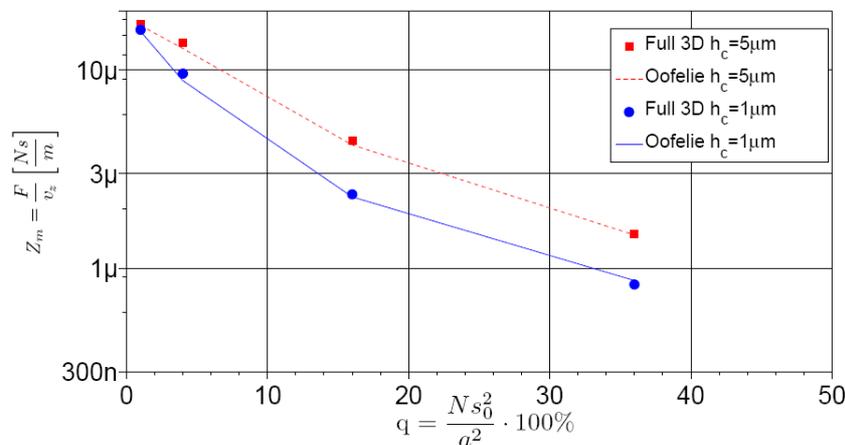


Figura 7: Resistencia mecánica en función de la razón del área ocupada por las perforaciones. En línea continua y de trazos resultados con Oofelie. Cuadrados y puntos gruesos resultados con modelo full 3D.

En la Tabla 1 se muestran los errores (relativos a un modelo 3D *full*) del modelo PPR de Veijola y el modelo propuesto en este trabajo.

h_c [μm]	s_0 [μm]	Error con PPR [%]	Error con Modelo FEM [%]
1.0	0.5	–	-1.83
	1.0	-1.78	-7.90
	2.0	-2.66	-2.91
	3.0	-3.57	4.76
5.0	0.5	–	-1.01
	1.0	-0.73	-6.27
	2.0	-0.16	-4.95
	3.0	-0.71	-0.94

Tabla 1: Errores cometidos para diferentes ejemplos. Se utiliza gap $h = 1\mu\text{m}$.

6. CONCLUSIONES

Se realizó el modelado del flujo de estrujamiento en casos de movimiento entre placas paralelas en microrresonadores perforados, a partir de la llamada ecuación de Reynolds no lineal a través de diferentes simplificaciones válidas en el contexto de microdispositivos, obteniendo excelentes resultados al validarlo con otros modelos de referencia.

Más específicamente, logramos errores del mismo orden que otros modelos (PPR), mostrando que la ventaja de no depender de un modelo de celdas (es decir, la independencia de la distribución de perforaciones) como así también del cálculo 3D para los parámetros de elongación efectiva posiciona a nuestro modelo para ser aplicado a otro tipo de geometrías. La formulación diferencial propuesta como base para el modelo es general, con condiciones de contorno mixtas, sin necesidad de modificar con algún término extra a la ecuación diferencial no lineal de Reynolds.

Se requiere mayor investigación para determinar de una manera más exacta los parámetros de elongación efectiva. También se propone mantener la condición de contorno en las perforaciones, pero mejorando la aproximación utilizada que considera un valor promedio de la presión en todos los nodos.

REFERENCIAS

- Bao M. y Yang H. Squeeze film air damping in MEMS. *Sensor. Actuator.*, A 136:3–27, 2007.
- Bao M., Yang H., Sun Y., y French P. Modified Reynolds' equation and analytical analysis of squeeze-film air damping of perforated structures. *Micromech. Microeng.*, 13:795–800, 2003a.
- Bao M., Yang H., Sun Y., y Wang Y. Squeeze-film air damping of thick hole-plate. *Sensor. Actuator.*, A 108:212–217, 2003b.
- Darling R., Hivick C., y Xu J. Compact analytical modeling of squeeze film damping with arbitrary venting conditions using a Green's function approach. *Sensor. Actuator.*, A 70:32–41, 1998.
- De Pasquale G. y Veijola T. Comparative numerical study of FEM methods solving gas damping in perforated MEMS devices. *Microfluid Nanofluid.*, 5:517–528, 2008.
- Goldsmith C., Yao Z., Eshelman S., y Denniston D. Performance of low-loss RF MEMS capacitive switches. *Microwave and Guided Wave Letters, IEEE*, 8:269–271, 1998.
- Gomez Barroso J.J., Berli C., y Cardona A. Modelado del flujo de escurrimiento en Microresonadores Perforados. *AMCA Mecánica Computacional*, XXXI:763–769, 2012.
- Gomez Barroso J.J., Brüls O., Berli C., y Cardona A. Modelling of the squeeze film air damping in MEMS. *AMCA Mecánica Computacional*, XXVIII:519–527, 2009.
- Homentcovschi D. y Miles R. Viscous damping and spring force in periodic perforated planar microstructures when the Reynolds' equation cannot be applied. *J. Acoust. Soc. Am.*, 127 No3:1288–1299, 2010.
- Pandey A.K. y Pratap R. A comparative study of analytical squeeze film damping models in rigid rectangular perforated MEMS structures with experimental results. *Microfluid Nanofluid.*, 4:205–218, 2008.
- Sharipov F. y Seleznev V. Data on internal rarefied gas flows. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 27(3):657–706, 1998.
- Somà A. y De Pasquale G. Numerical and experimental comparison of MEMS suspended plates dynamic behaviour under squeeze film damping effect. *Analog Integr. Circuits Signal Process.*, 57:213–224, 2008.
- Veijola T. Analytic damping model for a square perforation cell. *Proceedings of the 9th International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, 3:554–557, 2006.
- Veijola T., De Pasquale G., y Somà A. Experimental validation of compact damping models of perforated MEMS devices. *Microsystem Technologies*, 15:1121–1128, 2009.
- Veijola T. y Råback P. Methods for solving gas damping problems in perforated microstructures using a 2d finite-element solver. *Sensors*, 7:1069–1090, 2007.
- White F.M. *Viscous Fluid Flow. 2nd Edition.* McGraw Hill, 1974.