

## MODELO HIDRO-MECÁNICO DISCONTINUO EMPLEANDO XFEM

**J. B. Lucero, M. Luege, B. M. Luccioni**

*Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Roca 1800, 4000 S.M. de Tucumán,  
Argentina, CONICET, [www.herrera.unt.edu.ar/iest](http://www.herrera.unt.edu.ar/iest)*

*[jlucero@herrera.unt.edu.ar](mailto:jlucero@herrera.unt.edu.ar), [mluege@herrera.unt.edu.ar](mailto:mluege@herrera.unt.edu.ar), [bluccioni@herrera.unt.edu.ar](mailto:bluccioni@herrera.unt.edu.ar)*

**Keywords:** Durabilidad, Medios porosos, XFEM, transporte de fluidos.

**Resumen.** Para una evaluación numérica confiable de la durabilidad de estructuras de hormigón es importante analizar la interacción entre el estado actual de deterioro del hormigón y el transporte de humedad a través del mismo.

Considerando al hormigón como un medio poroso fisurado permeable, en el presente trabajo se modela el acoplamiento hidro-mecánico en el marco de la teoría de Biot-Coussy. Las ecuaciones resultantes se obtienen combinando las ecuaciones de balance de masa y de momento tanto del fluido como del sólido poroso, y teniendo en cuenta las ecuaciones constitutivas correspondientes al sólido y al fluido en términos de presión y desplazamiento.

Con el objeto de introducir discontinuidades, como son las fisuras en el medio poroso, se utiliza el Método de Elementos Finitos eXtendidos (XFEM). De esta manera, el flujo de fluido dentro de la discontinuidad se puede modelar independientemente del flujo dentro del medio poroso circundante, y a partir de la introducción de funciones de enriquecimiento tanto para el campo de desplazamientos como para el de presiones. La discretización en el espacio se realiza mediante elementos mixtos de tipo 9/4 (9 nodos para desplazamiento y 4 nodos para presión). Las ecuaciones resultantes se integran en el tiempo de manera implícita.

## 1 INTRODUCCIÓN

La modelación del transporte de fluidos en materiales porosos fisurados es de suma importancia en varios problemas industriales como reservas de petróleo, manejo de reservas de agua, etc. La presencia del fluido puede reducir dramáticamente la resistencia del esqueleto sólido ya sea por transporte de contaminantes, disolución de sulfatos u otros fenómenos. Por esta razón, es necesario estudiar el flujo del fluido a través del hormigón deteriorado y en presencia de discontinuidades del esqueleto sólido.

La correcta determinación de la posición y dirección de propagación de las fisuras generadas es un aspecto muy importante a tener en cuenta. Inmediatamente después de su formación, las fisuras son muy pequeñas (de un espesor menor a 0.05 mm) y generalmente no representan un peligro inmediato para la serviciabilidad de una estructura. Sin embargo, la aceleración del deterioro de la estructura puede ocurrir como consecuencia del incremento de permeabilidad del material poroso y de la aceleración del transporte de humedad en la vecindad de las fisuras.

Para cuantificar este debilitamiento, es de suma importancia disponer de un modelo robusto y estable, capaz de reproducir la interacción entre el estado actual del medio y el transporte a través del mismo. El hormigón armado es un material que trabaja en servicio en estado fisurado. Estas fisuras pueden ser microscópicas o fuertes discontinuidades. Si el medio presenta discontinuidades discretas, ya sean débiles como bandas de corte, o fuertes como presencia de grietas, el flujo presenta grandes variaciones. A través de un medio fisurado, el flujo es altamente anisótropo. Empleando el Método de Elementos Finitos (MEF) clásico es necesario que la malla de elementos finitos se adapte a la geometría de cada discontinuidad y seguir su evolución. Un modelo de estas características presentaría un coste computacional inmenso.

En la literatura, el tema de transporte de fluidos en medios porosos fisurados o en proceso de fisuración ha sido tratado de diferentes maneras: (Boone y Ingraffea, 1990) presentaron un procedimiento numérico para la simulación de la propagación de fisuras por causas hidráulicas en materiales poroelásticos, combinando el MEF con el método de diferencias finitas; (Schrefler, 1995) y (Secchi, et al., 2007) modelaron el crecimiento de fisuras cohesivas en medios porosos totalmente saturados usando el MEF con mallas adaptativas; (Segura y Carol, 2008) propusieron una formulación hidromecánica para materiales totalmente saturados con discontinuidades preexistentes basadas en el MEF con elementos de interfaz de espesor cero.

Existen métodos más apropiados para describir la discontinuidad como lo son el *Embedded Finite Element Method* (EFEM) (Armero y Linder, 2009) y el XFEM (Moës, et al., 1999). EFEM modela la falla de sólidos discretamente a través de la disipación local a lo largo de las discontinuidades. XFEM considera una cinemática enriquecida, en donde las variables de estado son interpoladas por funciones regulares y funciones discontinuas, las cuales permiten describir un campo discontinuo con un elemento más general. Esta técnica, permite obtener buenos resultados con una malla mucho menos densa.

En este trabajo se presenta un modelo hidro-mecánico para medios porosos saturados discontinuos. Las ecuaciones que gobiernan el problema se discretizan espacialmente mediante la técnica XFEM. Para la integración en el tiempo se aplica el método de Euler implícito. Considerando flujo darciano para la matriz permeable y para la discontinuidad, el flujo en este último depende del salto de presión y de la permeabilidad misma de la fisura. El problema resultante es de tipo no lineal, y se resuelve mediante el método de Newton Raphson. El modelo se utiliza finalmente en la resolución de problemas mecánicos y poromecánicos clásicos.

## 2 ECUACIONES DE BALANCE

Un medio poroso saturado  $\Omega$  está constituido de un esqueleto o fase sólida deformable y de un espacio poroso ocupado completamente por fluido. El espacio poroso se asume conectado,

ya que es a través de dicho espacio que ocurre el transporte de la masa fluida. Asumiendo pequeñas deformaciones, proceso isotérmico y desprecio de términos gravitatorios, convectivos y aceleraciones, se obtienen las ecuaciones estándar de conservación del momentum

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ en } \Omega \quad (1)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy total del medio, y las ecuaciones de conservación de la masa se expresan como

$$\frac{\partial \rho_\pi}{\partial t} + \rho_\pi \nabla \cdot \mathbf{v}_\pi = 0 \text{ en } \Omega \text{ con } \pi = s, f . \quad (2)$$

Los subíndices  $s$  y  $f$  identifican la fase sólida y de fluido, respectivamente. Usando la condición  $n_s + n_f = 1$ , donde  $n_s$  y  $n_f$  representan las fracciones de volumen de la fase sólida y fluida, respectivamente, e introduciendo en (2) las expresiones que relacionan los cambios de densidad de masa sólida con el cambio de volumen de la fase sólida y el cambio de densidad de masa del fluido con la presión del fluido  $p$  (ver (Coussy, 2010) para más detalles de la deducción) se obtiene la siguiente ecuación de conservación de la masa en  $\Omega$

$$\alpha \nabla \cdot \mathbf{v}_s + n_f \nabla \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 . \quad (3)$$

En ecuación (3), el coeficiente de Biot  $\alpha$  tiene en cuenta el acoplamiento entre los efectos mecánicos y los efectos debido a la presión;  $\mathbf{v}_f$  y  $\mathbf{v}_s$  son las velocidades de las fases fluida y sólida respectivamente y  $Q$  es el módulo de Biot o el módulo de compresibilidad general.

Se completa la descripción del problema adicionando las condiciones borde en términos de tensiones, desplazamientos y velocidades

$$\mathbf{n}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_p \text{ en } \Gamma_t , \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_p \text{ y/o } \mathbf{u}_s = \mathbf{u}_p \text{ en } \Gamma_a \quad (4)$$

donde  $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_a$ ,  $\Gamma_t \cap \Gamma_a = \emptyset$ ,  $\mathbf{n}_\Gamma$  es la normal exterior al contorno, las condiciones de borde en término de flujo y presión

$$n_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{q}_p \text{ en } \Gamma_q , \quad p = p_p \text{ en } \Gamma_p \quad (5)$$

donde  $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$  y  $\Gamma_p \cap \Gamma_q = \emptyset$ , y las condiciones iniciales en el tiempo  $t = 0$ , con  $\pi = s, f$

$$\mathbf{u}_\pi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_\pi^0 ; \quad \mathbf{v}_\pi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_\pi^0 ; \quad p(\mathbf{x}, 0) = p^0 \quad (6)$$

### 3 HIPÓTESIS CONSTITUTIVAS

#### 3.1 Ecuación constitutiva para un sólido poroelástico saturado

El balance de energía libre correspondiente al esqueleto sólido solamente, para procesos isotérmicos, puede escribirse de la siguiente forma (Coussy, 2010)

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + p \dot{\phi} - \dot{\Psi}_s = 0 \quad (7)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy;  $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u}$  es el tensor de deformaciones;  $p$  es la presión de poros;  $\phi$  es la porosidad y  $\Psi_s$  es la energía libre de Helmholtz del esqueleto. El primer término de (7) tiene en cuenta la densidad de trabajo de deformación realizada por el esqueleto sólido solamente, mientras que el segundo término está relacionado con el trabajo mecánico producido por la presión de poros aplicada a las paredes internas del esqueleto sólido.

Usando alternativamente la energía  $G_s = \Psi_s - p\phi$ , transformada de Legendre parcial de  $\Psi_s$  respecto solo a  $\phi$ . Las ecuaciones de estado se deducen como sigue

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial G_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \phi = -\frac{\partial G_s}{\partial p} \quad (8)$$

Considerando ahora el caso de un sólido poroelástico isótropo lineal, resulta conveniente expresar la energía  $G_s$  en términos del primer invariante  $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  del tensor de deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , del segundo invariante  $e_{ij}e_{ji}$  del tensor desviador de deformaciones  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon/3 \delta_{ij}$  y de la presión de poros  $p$  como sigue

$$\begin{aligned} G_s = G_s(\varepsilon_{ij}, p) &= \frac{1}{2} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha \varepsilon p - \frac{1}{2} \frac{p^2}{N} \\ &= \frac{1}{2} K \varepsilon^2 + G e_{ij} e_{ij} - \alpha \varepsilon p - \frac{1}{2} \frac{p^2}{N} \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $\mathbf{D}$  es el tensor constitutivo elástico del esqueleto sólido,  $G$  y  $K$  denotan los módulos de corte y volumétricos del esqueleto sólido, respectivamente;  $\alpha$  y  $-1/N$  son el coeficiente y módulo de Biot respectivamente. Las ecuaciones de estado resultan por lo tanto

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G\mathbf{e} + (K\varepsilon - \alpha p)\mathbf{I} \quad , \quad \phi = \alpha\varepsilon + \frac{p}{N} \quad (10)$$

Diferenciando (10) con respecto al tiempo se obtienen las expresiones generales que serán luego utilizadas en la resolución del sistema no lineal

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial^2 G_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial^2 G_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial p} \dot{p} = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \alpha \mathbf{I} \dot{p} \quad , \quad (11)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial^2 G_s}{\partial p \partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial^2 G_s}{\partial p \partial p} \dot{p} = \alpha \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{N} \dot{p} \quad . \quad (12)$$

### 3.2 Discontinuidades en el medio

El tratamiento de las discontinuidades se realiza mediante XFEM (Moës, et al., 1999). Este método enriquece, en la región de interés, la aproximación estándar de elementos finitos introduciendo funciones locales de enriquecimiento y grados de libertad adicionales.

Considerando entonces el dominio  $\Omega$ , limitado por el contorno  $\Gamma$  y un borde interno  $\Gamma_d$ , como se ve en la Figura 1 se modifica la aproximación estándar de elementos finitos de los campos de desplazamiento  $\mathbf{u}$  y de presión  $p$  en  $\Omega$ , discontinuo a lo largo de  $\Gamma_d$ , de la siguiente manera (Moës, et al., 1999)

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_{c_i} \mathbf{N}_{a_i} + \sum_{j \in J} H(\mathbf{x}) \mathbf{a}_{d_j} \mathbf{N}_{a_j} \quad (13)$$

$$p \approx p^h = \sum_{i \in I} p_{c_i} \mathbf{N}_{p_i} + \sum_{j \in J} H(\mathbf{x}) p_{d_j} \mathbf{N}_{p_j} \quad (14)$$

donde  $I$  y  $J$  denotan el conjunto de nodos regulares del MEF y enriquecidos, respectivamente,  $\mathbf{N}_{a_i}$  y  $\mathbf{N}_{p_i}$  son respectivamente las funciones de forma para los campos de desplazamiento y de presión, asociadas al nodo  $i$ ,  $\mathbf{a}_{c_i}$  y  $p_{c_i}$  son respectivamente el vector de desplazamientos y de la presión asociados al nodo  $i$  continuos;  $\mathbf{a}_{d_i}$  y  $p_{d_i}$  son respectivamente el vector de desplazamientos y de presión asociados al nodo  $i$  discontinuos; y  $H$  es la función de Heaviside

de enriquecimiento definida como sigue

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ 0, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad (15)$$

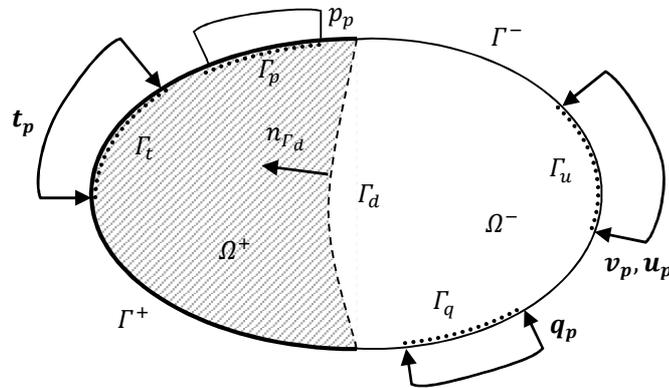


Figura 1: Dominio \$\Omega\$ en presencia de una discontinuidad \$\Gamma\_d\$

### 3.3 Interacciones en las discontinuidades

La introducción de una discontinuidad en \$\Omega\$ implica la posible aparición de tensiones \$\mathbf{t}\_d\$ en \$\Gamma\_d\$ y de un flujo de fluido \$\mathbf{q}\_d\$ a través de las caras de la discontinuidad. La consideración de dichos aspectos es esencial en la formulación débil del problema ya que permite el acoplamiento entre lo que ocurre en la fisura y en el medio poroso circundante saturado. Asumiendo la condición de continuidad en tensiones y del flujo de fluido en \$\Gamma\_d\$ resulta

$$\mathbf{n}_{\Gamma_d} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_d \quad \text{y} \quad n_f \llbracket \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s \rrbracket = \mathbf{q}_d \quad \text{en } \Gamma_d, \quad (16)$$

donde \$\mathbf{n}\_{\Gamma\_d}\$ es el vector normal a la discontinuidad y \$\mathbf{t}\_d = \mathbf{t}\_d(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{X})\$ se asocia generalmente a efectos cohesivos presentes entre las caras de la fisura, para lo cual se pueden adoptar leyes constitutivas dependientes del desplazamiento relativo \$\boldsymbol{\delta}\$ entre las caras de la fisura y de un conjunto de variables internas \$\mathbf{X}\$, intervinientes en el proceso. En la ecuación (16)<sub>2</sub>, \$\llbracket \mathbf{v}\_f - \mathbf{v}\_s \rrbracket\$ representa el salto de la velocidad relativa del fluido entre las caras de la fisura.

Para describir el flujo en el medio poroso se adopta la ley de Darcy

$$n_f(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) = -k_f \nabla p \quad (17)$$

donde \$k\_f\$ es la permeabilidad del medio, \$n\_f\$ es la fracción de volumen fluido respecto al volumen total, \$\nabla p\$ es el gradiente de presión. De forma similar se adopta la ley de Darcy para el flujo tangencial \$\mathbf{q}\_d\$ en ambas caras de la fisura (de Borst, et al., 2004),

$$\mathbf{n}_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{q}_d = -k_d p_d \quad (18)$$

\$k\_d\$ es la permeabilidad en la discontinuidad y \$p\_d\$ es el salto de presión en la fisura.

### 3.4 Factor de intensidad de tensiones

Los campos de desplazamiento y de tensión cerca de la cabeza de una fisura pueden caracterizarse mediante los denominados factores de intensidad de tensiones \$K\_I\$, \$K\_{II}\$ y \$K\_{III}\$, uno para cada modo de fractura. Una de las formas para determinar dichos factores es a través del cálculo de la Integral-J que, para un modo mixto, se relaciona de acuerdo a:

$$J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (19)$$

donde  $E^*$  se define en términos de las propiedades del material,  $E$  es el módulo de Young y  $\mu$  el módulo de Poisson, definido como sigue

$$E^* = \begin{cases} E & \text{en estado plano de tensiones} \\ \frac{E}{1-\mu^2} & \text{en estado plano de deformaciones} \end{cases} \quad (20)$$

La integral-J se calcula como el flujo de energía a través de una superficie que rodea la cabeza de la fisura (para más detalles consultar (Moës, et al., 1999), (Liang, et al., 2010)). Si se consideran en el cuerpo fisurado dos estados: uno correspondiente al actual ( $\sigma^{(1)}, \varepsilon^{(1)}, \mathbf{u}_i^{(1)}$ ) y otro auxiliar ( $\sigma^{(2)}, \varepsilon^{(2)}, \mathbf{u}_i^{(2)}$ ) la integral-J para la suma de los dos estados resulta

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)}$$

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} - \frac{(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_j} \right] n_j d\Gamma$$

donde  $M^{(1,2)}$  se llama integral de interacción y puede expresarse como

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} \right] \quad (21)$$

donde  $W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$  es denominada energía de interacción. A partir de la expresión (19), se puede llegar a lo siguiente

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}), \quad (22)$$

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}). \quad (23)$$

Esta expresión es válida para cualquier estado (2). Si tomamos como estado auxiliar a un caso exclusivo de modo  $I$ , tal que:  $K_I^{(2)} = 1, K_{II}^{(2)} = 0$ , resulta:

$$K_I^{(1)} = \frac{E^*}{2} M^{(1,2)}|_I. \quad (24)$$

De forma similar, si consideramos como estado auxiliar a un caso exclusivo de modo  $II$ , tal que:  $K_I^{(2)} = 0, K_{II}^{(2)} = 2$ , resulta

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E^*}{2} M^{(1,2)}|_{II} \quad (25)$$

Los estados tensionales generados en modos  $I$  y  $II$  exclusivos pueden calcularse a través de la solución analítica obtenida en (Irwin, 1958) y (Muskhelishvili, 1977), la cual depende de los valores  $K_I$  y  $K_{II}$ .

#### 4 FORMA DÉBIL DE LAS ECUACIONES DE BALANCE

La forma débil de las ecuaciones de balance se obtiene multiplicando las ecuaciones (1) y (3) por las funciones de *test*  $\eta$ , cinemáticamente admisibles, para el campo de desplazamientos,

y  $\boldsymbol{\tau}$  para la presión, como sigue:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\eta} \, d\Omega = 0 \tag{26}$$

$$\int_{\Omega} \alpha \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}_s \boldsymbol{\tau} \, d\Omega + \int_{\Omega} n_f \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \boldsymbol{\tau} \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \boldsymbol{\tau} \, d\Omega = 0 \tag{27}$$

Conjuntamente a la aproximación enriquecida de los campos de desplazamiento y presión (ecuaciones (13) y (14) respectivamente) a continuación se escribe las funciones de test enriquecidas

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_a(\mathbf{a}_c + H \mathbf{a}_d) ; \mathbf{p} = \mathbf{N}_p(\mathbf{p}_c + H \mathbf{p}_d) \tag{28}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{N}_a(\boldsymbol{\eta}_c + H \boldsymbol{\eta}_d) ; \boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\tau}_c + H \boldsymbol{\tau}_d) \tag{29}$$

Reemplazando (29)<sub>1</sub> en (26) y expresando  $\Omega$  como  $\Omega^+ \cup \Omega^-$ , resulta

$$\int_{\Omega^+} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{N}_a(\boldsymbol{\eta}_c + H \boldsymbol{\eta}_d) \, d\Omega + \int_{\Omega^-} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{N}_a(\boldsymbol{\eta}_c + H \boldsymbol{\eta}_d) \, d\Omega = 0 \tag{30}$$

y de la definición de la función de Heaviside en (15)

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{N}_a \boldsymbol{\eta}_c \, d\Omega + \int_{\Omega^+} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{N}_a \boldsymbol{\eta}_d \, d\Omega = 0. \tag{31}$$

Aplicando el teorema de Green, la ecuación anterior queda

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{N}_a \boldsymbol{\eta}_c)^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n}_{\Gamma}^T (\mathbf{N}_a \boldsymbol{\eta}_c)^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Gamma - \int_{\Omega^+} (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{N}_a \boldsymbol{\eta}_c)^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \\ & + \left[ \int_{\Gamma^+} (\mathbf{N}_a \boldsymbol{\eta}_c)^T \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \mathbf{n}_{\Gamma_d}^T (\mathbf{N}_a \boldsymbol{\eta}_c)^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Gamma \right] = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

La integral sobre el dominio  $\Omega^+$  y la frontera  $\Gamma^+$  pueden expresarse como la integral sobre  $\Omega$  y  $\Gamma$ , respectivamente, multiplicada por la función  $H$  como sigue

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} [\boldsymbol{\nabla} \mathbf{N}_a(\boldsymbol{\eta}_c + H \boldsymbol{\eta}_d)]^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n}_{\Gamma}^T [\mathbf{N}_a(\boldsymbol{\eta}_c + H \boldsymbol{\eta}_d)]^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_d} \mathbf{n}_{\Gamma_d}^T (\mathbf{N}_a \boldsymbol{\eta}_c)^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Introduciendo la condición de continuidad en tensiones a lo largo de la discontinuidad  $\Gamma_d$ , ecuación (16)<sub>1</sub>, y de la frontera  $\Gamma_t$ , ecuación (4)<sub>1</sub>, y dado que las funciones de test  $\boldsymbol{\eta}_c$  y  $\boldsymbol{\eta}_d$  son arbitrarias, se obtiene

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{N}_a^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_a^T \mathbf{t}_p \, d\Gamma \tag{34}$$

$$\int_{\Omega} H \boldsymbol{\nabla} \mathbf{N}_a^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_a^T (\mathbf{t}_d - p \mathbf{n}_{\Gamma_d}) \boldsymbol{\eta}_d \, d\Gamma = \int_{\Gamma} H \mathbf{N}_a^T \mathbf{t}_p \, d\Gamma \tag{35}$$

De forma similar se deduce la forma débil de la ecuación de balance de masa, donde reescribiendo el segundo término de la ecuación (27) como la suma de las integrales en  $\Omega^+$  y en  $\Omega^-$ , queda

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} n_f \nabla \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \boldsymbol{\tau} d\Omega &= \int_{\Omega^+} n_f \nabla \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \boldsymbol{\tau} d\Omega + \int_{\Omega^-} n_f \nabla \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \boldsymbol{\tau} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} n_f \nabla \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \mathbf{N}_p \boldsymbol{\tau}_c d\Omega + \int_{\Omega^+} n_f \nabla \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \mathbf{N}_p \boldsymbol{\tau}_d d\Omega \\
&= - \int_{\Omega} n_f (\nabla \mathbf{N}_p \boldsymbol{\tau}_c)^T (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n}_{\Gamma}^T n_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \mathbf{N}_p \boldsymbol{\tau}_c d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega^+} n_f (\nabla \mathbf{N}_p \boldsymbol{\tau}_c)^T (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n}_{\Gamma}^T n_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \mathbf{N}_p \boldsymbol{\tau}_d d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_d} \mathbf{n}_{\Gamma}^T n_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \mathbf{N}_p \boldsymbol{\tau}_d d\Gamma .
\end{aligned} \tag{36}$$

Introduciendo las condiciones de continuidad del flujo en  $\Gamma_d$ , ecuación (16)<sub>2</sub>, y en  $\Gamma$  ecuación (5)<sub>1</sub>, se tiene

$$\int_{\Gamma_d} \mathbf{n}_{\Gamma}^T n_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \mathbf{N}_p \boldsymbol{\tau}_d d\Gamma = - \int_{\Gamma_d} (\mathbf{N}_p \boldsymbol{\tau}_d)^T \mathbf{n}_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{q}_d d\Gamma , \tag{37}$$

$$\int_{\Gamma} n_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \mathbf{n}_{\Gamma}^T \mathbf{N}_p (\boldsymbol{\tau}_c + D \boldsymbol{\tau}_d) d\Gamma = \int_{\Gamma} [\mathbf{N}_p (\boldsymbol{\tau}_c + D \boldsymbol{\tau}_d)]^T \mathbf{n}_{\Gamma} \cdot \mathbf{q}_p d\Gamma . \tag{38}$$

Se considera a continuación la ley de Darcy (17) para la descripción del flujo en el medio poroso. Sustituyendo (37) y (38) en (36) y luego en la forma débil del balance de momento (27), y dado que las funciones de test  $\boldsymbol{\tau}_c$  y  $\boldsymbol{\tau}_d$  son arbitrarias, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$- \int_{\Omega} \alpha \mathbf{N}_p^T \nabla \cdot \mathbf{v}_s d\Omega - \int_{\Omega} k_f \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla p d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \mathbf{N}_p^T \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \mathbf{n}_{\Gamma} \cdot \mathbf{q}_p d\Gamma \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \alpha D \mathbf{N}_p^T \nabla \cdot \mathbf{v}_s d\Omega + \int_{\Omega} k_f H \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla p d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} H \mathbf{N}_p^T \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_p^T \mathbf{n}_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{q}_d d\Gamma \\
= \int_{\Gamma} H \mathbf{N}_p^T \mathbf{n}_{\Gamma} \cdot \mathbf{q}_p d\Gamma
\end{aligned} \tag{40}$$

Para introducir las relaciones constitutivas en la forma débil de balance de momentum (34) y (35), a partir de las aproximaciones enriquecidas de los campos de desplazamiento y de presión (39) y (40), se determinan los campos derivados como sigue

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{N}_a (\mathbf{a}_c + H \mathbf{a}_d) \tag{41}$$

$$\nabla \mathbf{v}_s = \nabla \mathbf{N}_a (\mathbf{a}_c + H \mathbf{a}_d) = \mathbf{B}_a (\mathbf{a}_c + H \mathbf{a}_d) \tag{42}$$

$$\nabla p = \nabla \mathbf{N}_p (\mathbf{p}_c + H \mathbf{p}_d) = \mathbf{B}_p (\mathbf{p}_c + H \mathbf{p}_d) \tag{43}$$

$$\dot{p} = \mathbf{N}_p (\dot{\mathbf{p}}_c + H \dot{\mathbf{p}}_d) \tag{44}$$

El tensor constitutivo se escribe de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha I p = \mathbf{D} : \mathbf{B} \mathbf{u}_s - \alpha I p \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \mathbf{B}_a (\mathbf{a}_c + H \mathbf{a}_d) - \alpha I (\mathbf{N}_p (\mathbf{p}_c + H \mathbf{p}_d)) \tag{46}$$

quedando,

$$\int_{\Omega} \mathbf{B} [\mathbf{D} \mathbf{B}_a (\mathbf{a}_c + H \mathbf{a}_d) - \alpha \mathbf{N}_a (\mathbf{p}_c + H \mathbf{p}_d)] d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_a^T \mathbf{t}_p d\Gamma \tag{47}$$

$$\int_{\Omega} H \mathbf{B} [\mathbf{D} \mathbf{B} (\mathbf{a}_c + H \mathbf{a}_d) - \alpha N_a (\mathbf{p}_c + H \mathbf{p}_d)] d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_a^T \mathbf{T} N_a d\Gamma \quad (48)$$

$$= \int_{\Gamma} H \mathbf{N}_a^T \mathbf{t}_p d\Gamma$$

Teniendo en cuenta que  $\nabla \cdot (\mathbf{F}\mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F} \nabla \cdot \mathbf{v}$ , la divergencia de la velocidad de la parte sólida puede expresarse como

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_s = [\mathbf{m}^T \mathbf{B}_p^T (\dot{\mathbf{a}}_c + H \dot{\mathbf{a}}_d)] \quad (49)$$

Reemplazando en las ecuaciones de balance de masa (39) y (40),

$$- \int_{\Omega} \alpha N_p^T [\mathbf{m}^T \mathbf{B}_p^T (\dot{\mathbf{a}}_c + H \dot{\mathbf{a}}_d)] d\Omega - \int_{\Omega} k_f \mathbf{B}_p^T \mathbf{B} (\mathbf{p}_c + H \mathbf{p}_d) d\Omega \quad (50)$$

$$- \int_{\Omega} \frac{1}{Q} N_p^T N_p (\dot{\mathbf{p}}_c + H \dot{\mathbf{p}}_d) d\Omega = \int_{\Gamma} N_p^T \mathbf{n}_{\Gamma} \cdot \mathbf{q}_p d\Gamma$$

$$- \int_{\Omega} \alpha H N_p^T [\mathbf{m}^T \mathbf{B}_p^T (\dot{\mathbf{a}}_c + H \dot{\mathbf{a}}_d)] d\Omega - \int_{\Omega} k_f D \mathbf{B}_p^T \mathbf{B}_p (\mathbf{p}_c + H \mathbf{p}_d) d\Omega \quad (51)$$

$$- \int_{\Omega} \frac{1}{Q} H N_p^T N_p (\dot{\mathbf{p}}_c + H \dot{\mathbf{p}}_d) d\Omega + \int_{\Gamma_d} N_p^T \mathbf{n}_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{q}_d d\Gamma = \int_{\Gamma} H N_p^T \mathbf{n}_{\Gamma} \cdot \mathbf{q}_p d\Gamma$$

El sistema de ecuaciones formado por (47), (48), (50) y (51), se puede re-escribir de la siguiente manera

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (52)$$

donde  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{a}_c, \mathbf{a}_d, \mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d]$  es el vector de incógnitas nodales. Discretizando en el tiempo y aplicando diferencias finitas hacia atrás resulta

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{C}_{n+1} \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta t} + \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (53)$$

El sistema no lineal resultante puede resolverse aplicando el método de Newton – Raphson

$$\mathbf{x}_{n+1}^{l+1} = \mathbf{x}_{n+1}^l + \Delta \mathbf{x}_{n+1}^l \quad (54)$$

$$\Delta \mathbf{x}_{n+1}^l = -\mathbf{F}_{n+1}^l \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}^l}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \quad (55)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^l = \mathbf{C}_{n+1}^l \frac{\mathbf{x}_{n+1}^l - \mathbf{x}_n}{\Delta t} + \mathbf{K}_{n+1}^l \mathbf{x}_{n+1}^l + \mathbf{f}_{n+1}^l = \mathbf{0} \quad (56)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}^l}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^l}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}_{n+1}^l - \mathbf{x}_n) + \mathbf{C}_{n+1}^l \right] + \frac{\partial \mathbf{K}_{n+1}^l}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}_{n+1}^l + \mathbf{K}_{n+1}^l + \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}^l}{\partial \mathbf{x}} \quad (57)$$

Finalmente, la ecuación a resolver será

$$\left\{ \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^l}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}_{n+1}^l - \mathbf{x}_n) + \mathbf{C}_{n+1}^l \right] + \frac{\partial \mathbf{K}_{n+1}^l}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}_{n+1}^l + \mathbf{K}_{n+1}^l + \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}^l}{\partial \mathbf{x}} \right\} \Delta \mathbf{x}_{n+1}^l \quad (58)$$

$$= - \left( \mathbf{C}_{n+1}^l \frac{\mathbf{x}_{n+1}^l - \mathbf{x}_n}{\Delta t} + \mathbf{K}_{n+1}^l \mathbf{x}_{n+1}^l + \mathbf{f}_{n+1}^l \right)$$

donde,

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_{\bar{p}\bar{a}} & C_{\bar{p}\hat{a}} & C_{\bar{p}\bar{p}} & C_{\bar{p}\hat{p}} \\ C_{\hat{p}\bar{a}} & C_{\hat{p}\hat{a}} & C_{\hat{p}\bar{p}} & C_{\hat{p}\hat{p}} \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$C_{\bar{p}\bar{a}} = - \int_{\Omega} \alpha B_a^T m N_p d\Omega \quad (60)$$

$$C_{\bar{p}\hat{a}} = - \int_{\Omega} \alpha H B^T m N_p d\Omega \quad (61)$$

$$C_{\bar{p}\bar{p}} = - \int_{\Omega} Q^{-1} N_p^T N_p d\Omega \quad (62)$$

$$C_{\hat{p}\bar{p}} = - \int_{\Omega} H Q^{-1} N_p^T N_p d\Omega \quad (63)$$

$$C_{\bar{p}\hat{a}} = - \int_{\Omega} \alpha H B_a^T N_p d\Omega \quad (64)$$

$$C_{\hat{p}\hat{a}} = - \int_{\Omega} \alpha H^2 B_a^T m N_p d\Omega \quad (65)$$

$$C_{\hat{p}\bar{p}} = - \int_{\Omega} H Q^{-1} N_p^T N_p d\Omega \quad (66)$$

$$C_{\hat{p}\hat{p}} = - \int_{\Omega} H^2 Q^{-1} N_p^T N_p d\Omega \quad (67)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{\bar{a}\bar{a}} & K_{\bar{a}\hat{a}} & K_{\bar{a}\bar{p}} & K_{\bar{a}\hat{p}} \\ K_{\hat{a}\bar{a}} & K_{\hat{a}\hat{a}} & K_{\hat{a}\bar{p}} & K_{\hat{a}\hat{p}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & K_{\bar{p}\bar{p}} & K_{\bar{p}\hat{p}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & K_{\hat{p}\bar{p}} & K_{\hat{p}\hat{p}} \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$K_{\bar{a}\bar{a}} = \int_{\Omega} B_a^T D B_a d\Omega \quad (69)$$

$$K_{\bar{a}\hat{a}} = \int_{\Omega} H B_a^T D B_a d\Omega \quad (70)$$

$$K_{\bar{a}\bar{p}} = - \int_{\Omega} \alpha B_a^T m N_p d\Omega \quad (71)$$

$$K_{\bar{a}\hat{p}} = - \int_{\Omega} \alpha H B_a^T m N_p d\Omega \quad (72)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{a}\hat{a}} = \int_{\Omega} H \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_a d\Omega \quad (73)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{a}\hat{a}} = \int_{\Omega} H^2 \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_a d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_a^T \mathbf{T} \mathbf{N}_a d\Gamma \quad (74)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{a}\hat{p}} = - \int_{\Omega} \alpha H \mathbf{B}_a^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (75)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{a}\hat{p}} = - \int_{\Omega} \alpha H^2 \mathbf{B}_a^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (76)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{p}\hat{p}} = - \int_{\Omega} k_f \mathbf{B}_p^T \mathbf{B}_p d\Omega \quad (77)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{p}\hat{p}} = - \int_{\Omega} k_f \mathbf{B}_p^T \nabla (H \mathbf{N}_p) d\Omega \quad (78)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{p}\hat{p}} = - \int_{\Omega} k_f \nabla (H \mathbf{N}_p)^T \mathbf{B}_p d\Omega \quad (79)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{p}\hat{p}} = - \int_{\Omega} k_f \nabla (H \mathbf{N}_p)^T \nabla (H \mathbf{N}_p) d\Omega \quad (80)$$

La integral  $\int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_p^T \mathbf{n}_{\Gamma_d} \cdot \mathbf{q}_d d\Gamma$  depende del modelo de flujo que se adopte en la discontinuidad. El cálculo de las derivadas de dicha integral, respecto a las variables de estado, produce la pérdida de simetría de la matriz de rigidez. Esto último no se ha tenido en cuenta, lo cual aumenta el número de iteraciones necesarias para la resolución del sistema, pero también una mayor estabilidad.

## 5 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

### 5.1 Formulación mixta

La implementación de las ecuaciones se ha realizado en MatLab. Se han utilizado elementos mixtos de tipo 9/4 para la discretización en el espacio (Bathe, 1996).

### 5.2 Factor de intensidad de tensiones.

La ecuación (21) correspondiente a la integral-M se puede escribir como

$$M^{(1,2)} = \int_C \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} \right] q m_j dC, \quad (81)$$

donde  $C = \Gamma \cup C^+ \cup C^- \cup \Gamma_0$ , como se muestra en la Figura 3 y  $m_j$  es el vector normal al dominio y  $q$  es una función de peso.

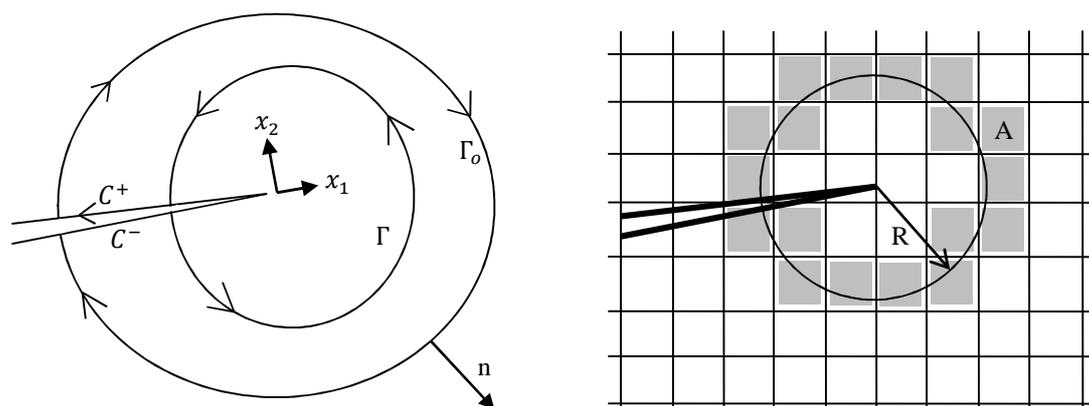


Figura 2: Dominio para la determinación del FIT en la cabeza de la fisura

Según la Teorema de Green, se puede pasar la integral-M de contorno a una integral de superficie como sigue

$$M^{(1,2)} = - \int_A \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (82)$$

donde el eje  $x_1$  es tangente a la cabeza de la fisura. Si se considera un círculo de radio  $R$ , el dominio  $A$  es el conjunto de elementos que corta el círculo. La función de peso toma valores unitarios en los nodos dentro del dominio y nulos fuera del dominio. Los puntos de Gauss se interpolan con las mismas funciones de interpolación que para el campo de desplazamientos. El radio  $R$  puede expresarse en función de un radio relativo  $r$  (independiente al tamaño del elemento) como sigue:  $R = r \sqrt{h}$ , donde  $h$  es el área del elemento que circunda a la cabeza de la fisura. En los ejemplos numéricos, se toma  $r = \{1; 1.5; 2; 2.5; 3; 4; 5\}$ .

## 6 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se resuelven primeramente ejemplos sencillos que muestran el comportamiento del modelo numérico en problemas mecánicos discontinuos, poromecánicos y su acoplamiento entre ellos. La interacción mecánica entre las caras de la fisura se considera nula ( $\mathbf{t}_d = \mathbf{0}$ ), por lo que se puede usar el factor de intensidad de tensiones como parámetro de comparación para el campo mecánico.

### 6.1 Placa con fisura lateral bajo una tensión uniaxial

Se considera una placa de ancho  $b = 1m$  y altura  $L = 2m$  con una fisura lateral  $\sigma = 1.0 MPa$ , (Figura 4), con módulo de Young  $E = 30 MPa$  y coeficiente de Poisson  $\mu = 0.3$ . En la formulación planteada, se toma un coeficiente Biot nulo ( $\alpha = 0$ ), de forma tal que el problema queda desacoplado.

Como parámetro de referencia se considera el factor de intensidad de tensiones  $K_I$ . La solución exacta para este problema es (Moës, et al., 1999)

$$K_I^{ex} = F \left( \frac{a}{b} \right) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (83)$$

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = 1.12 - 0.231\frac{a}{b} + 10.55\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad (84)$$

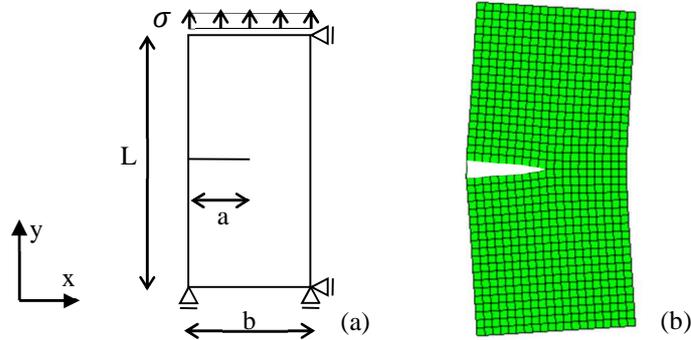


Figura 3: Geometría del problema de fisura lateral bajo tensión uniaxial (a) y deformada del modelo resuelto con XFEM (b).

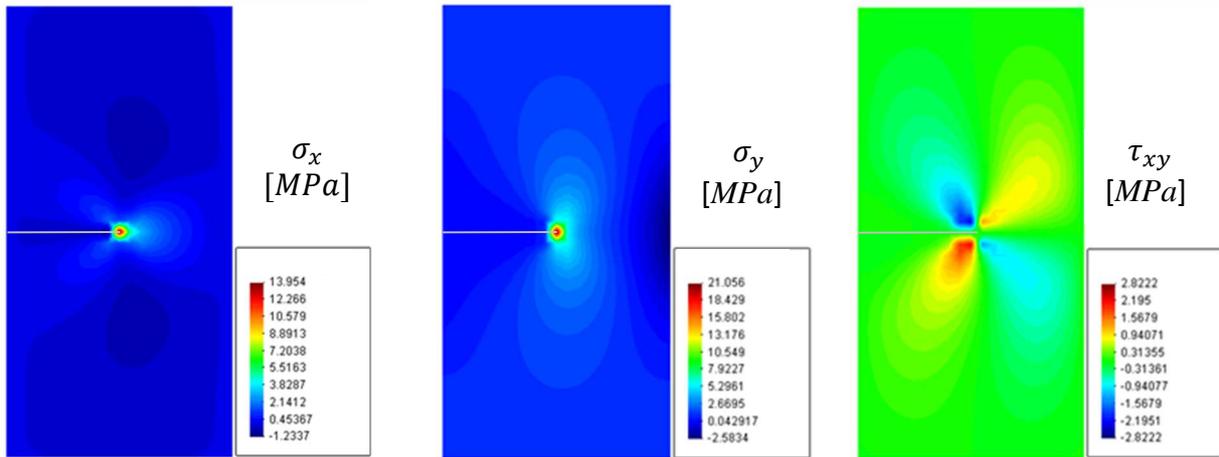


Figura 4: Mapa de tensiones:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$

El factor de intensidad de tensiones exacto para este problema es  $K_I^{ex} = 3.452$  ( $F = 2.826$ ),  $K_{II}^{ex} = 0$ . Para el modelo numérico, se emplearon 3 mallas de elementos finitos:  $10 \times 20$ ,  $20 \times 40$  y  $40 \times 80$ , resultando 200, 800 y 3200 elementos Lagrangianos de 9 nodos respectivamente. Se tomaron varios dominios de integración en la cabeza de la fisura para evaluar el  $K_I$ , como se explicó en la sección 3.4. En la Tabla 1 se detallan los valores de factor de intensidad de tensiones determinados numéricamente,  $K_I^{num}$ , relativos a la solución exacta  $K_I^{ex}$ , según el número de elementos utilizados en la discretización y el radio relativo  $r$  utilizado para definir el dominio de integración.

Nº Elem.	$K_I^{ex}/K_I^{num}$						
	r=1	r=1.5	r=2	r=2.5	r=3	r=4	r=5
200	1.0619	1.0394	1.039	1.0393	1.0392	1.0392	1.0392
800	1.0368	1.0198	1.0194	1.0196	1.0196	1.0196	1.0196
3200	1.0195	1.0095	1.0096	1.0102	1.0099	1.0099	1.0099

Tabla 1: Factor de intensidad de tensiones relativo  $K_I^{ex}/K_I^{num}$  según el número de elementos usados en la discretización y el radio  $r$  del dominio de integración

En la Figura 5 se representa la variación de  $K_I^{ex}/K_I^{num}$  en función del radio relativo  $r$  utilizado para definir el dominio de integración en la Sección 5.2. En la Figura 6 se representa  $K_I^{ex}/K_I^{num}$  en función del número de elementos utilizados en la discretización. En estas figuras se observa que  $K_I^{num}$  se estabiliza a partir  $r = 2$  y converge al valor exacto cuando el número de elementos aumenta.

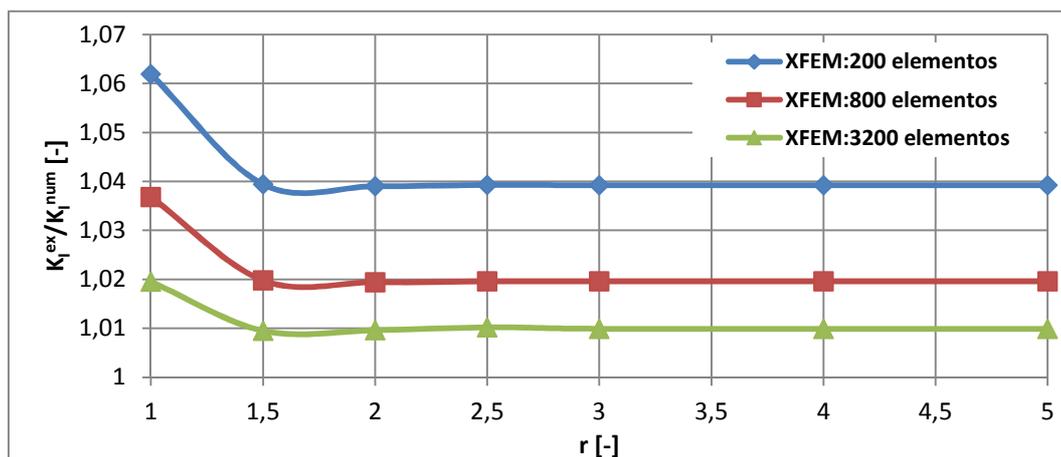


Figura 5:  $K_I^{ex}/K_I^{num}$  en función al dominio de integración

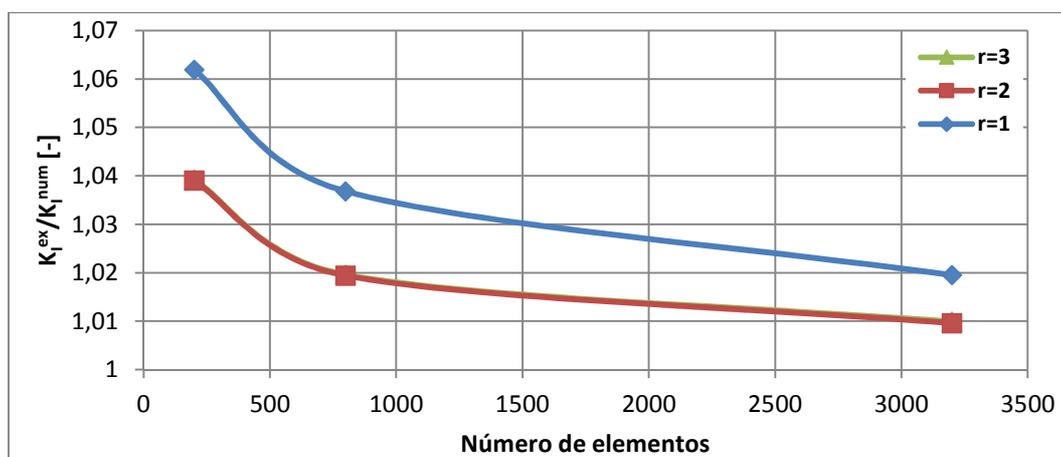


Figura 6:  $K_I^{ex}/K_I^{num}$  en función de la discretización

## 6.2 Viga con entalla a flexión de 3 puntos

Se considera ahora una viga como se muestra en la Figura 8, de espesor  $B=1\text{cm}$ , altura  $b=15\text{cm}$ , luz entre apoyos  $60\text{cm}$ , con módulo de Young  $E = 9\text{MPa}$ , coeficiente de Poisson  $\mu = 0.3$ , sometida a una carga puntual  $P = 2\text{KN}$ . En la formulación planteada, se toma un coeficiente Biot nulo ( $\alpha = 0$ ), de forma tal que el problema queda desacoplado. La solución exacta para este problema es (Oller, 2001):

$$K_I^{ex} = \frac{F}{B \sqrt{b}} f_1 \left( \frac{a}{b} \right) \quad (85)$$

$$\frac{a}{b} = 0.5 \rightarrow f_1\left(\frac{a}{b}\right) = 10.96 \quad (86)$$

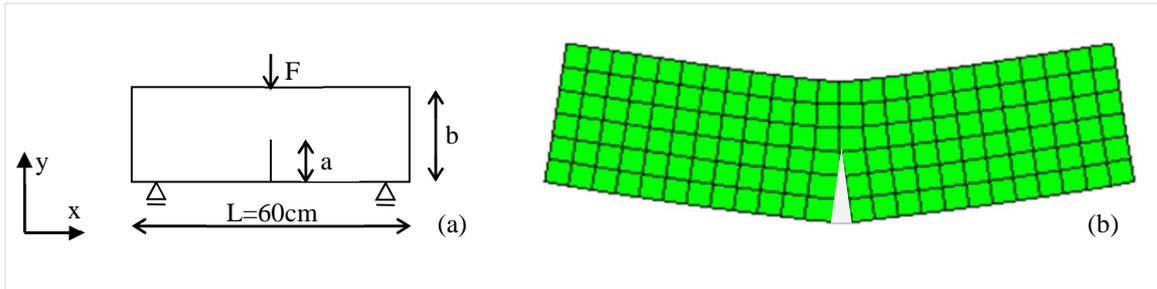


Figura 7: Geometría de una viga entallada simplemente apoyada y bajo carga puntual (a) y deformada de la viga con XFEM (b).

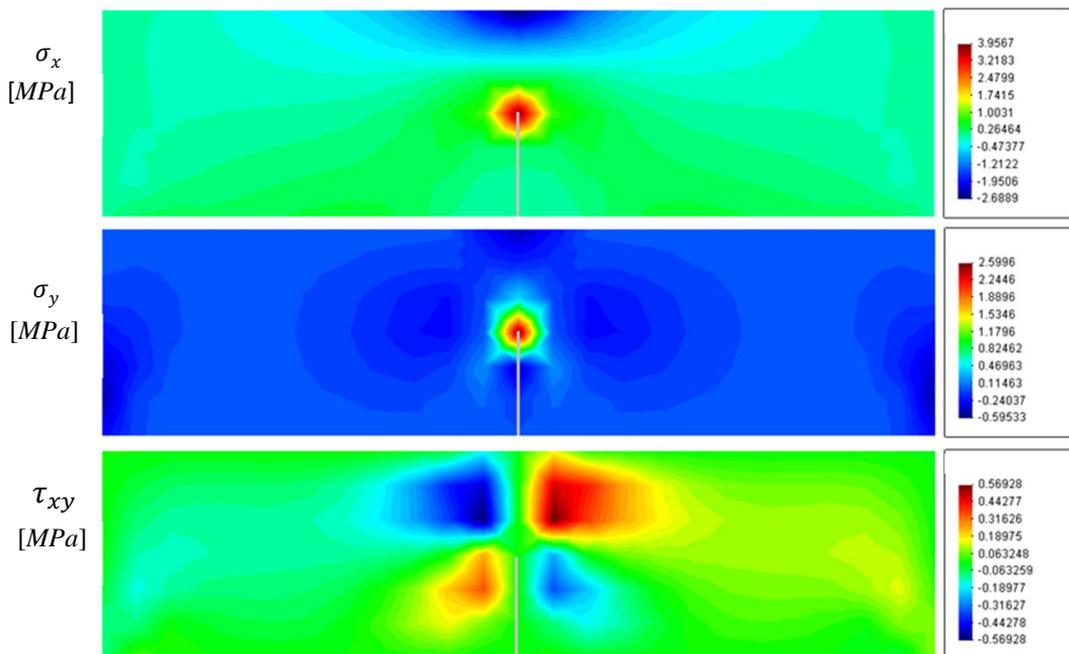


Figura 8: Mapa de tensiones:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$

Bajo estas condiciones, la solución exacta es  $K_I^{ex} = 5.479$ . Para el modelo numérico, se emplearon 3 mallas de elementos finitos:  $24 \times 6$ ,  $48 \times 12$  y  $96 \times 24$ , resultando 144, 576 y 2304 elementos Lagrangianos de 9 nodos respectivamente. Se realizó el mismo análisis precedente. Los valores de  $K_I$  obtenidos numéricamente y relativos a la solución exacta  $K_I^{ex}$  se muestran en la Tabla 2.

N° elem	$K_I^{ex} / K_I^{num}$						
	r=1	r=1.5	r=2	r=2.5	r=3	r=4	r=5
144	1.074	1.076	1.075	1.076	1.076		
576	1.036	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039
2304	2.044	1.082	1.043	1.037	1.03	1.026	1.025

Tabla 2: Factor de intensidad de tensiones relativo  $K_I^{ex}/K_I^{num}$  según el número de elementos usados en la discretización y el radio  $r$  del dominio de integración

En la Figura 9 y Figura 10 se muestran las variaciones del  $K_I^{ex}/K_I^{num}$  en función del radio relativo  $r$  utilizado para definir el dominio de integración, y en el número de elementos utilizados en la discretización. Se observa en este caso, la estabilidad del  $K_I^{num}$  calculado a partir de un dominio relativo de  $r = 2$ . Para la discretización mayor, se observa inestabilidad en el cálculo del  $K_I^{num}$  para dominios del orden de la dimensión del elemento.

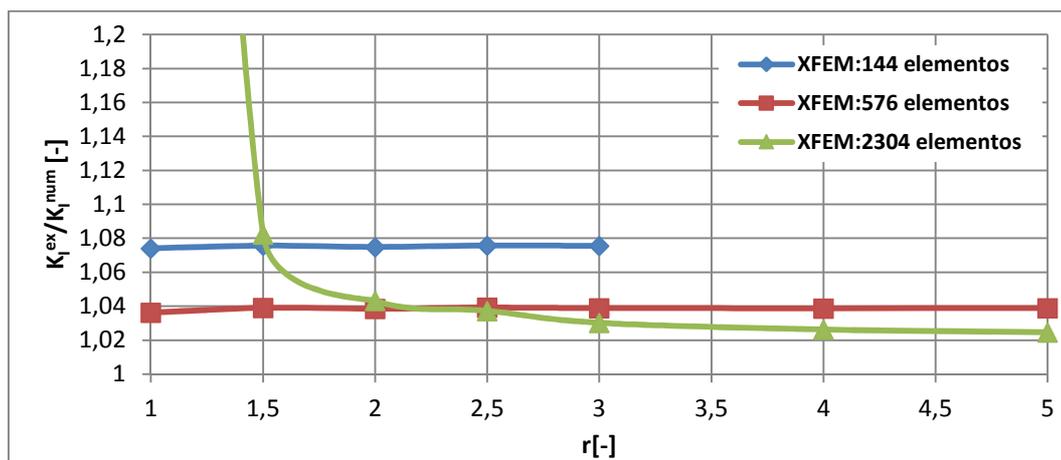


Figura 9:  $K_I^{ex}/K_I^{num}$  en función del dominio de integración

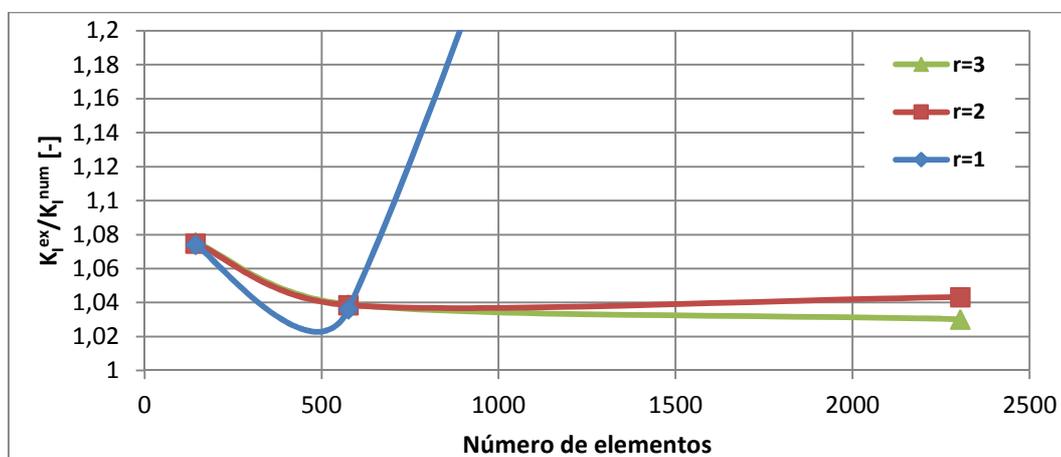


Figura 10:  $K_I^{ex}/K_I^{num}$  en función de la discretización

### 6.3 Medio poroso saturado continuo

Considerando un medio continuo saturado de ancho  $b = 2 m$ , largo  $h = 2 m$ , módulo de Young  $E = 20 GPa$ , coeficiente de Poisson  $\mu = 0$ , coeficiente de biot  $\alpha = 1$ , módulo de compresibilidad  $Q = 1e18 GPa$ , sometida a una compresión de  $q_m = 0.50 GPa$  (Figura 12). Se consideran dos casos: (a) condiciones no drenadas, (b) condición flujo por la cara inferior.

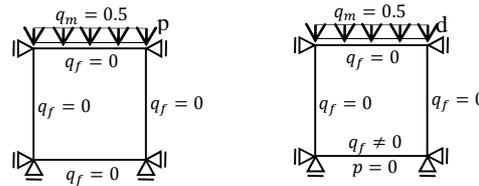


Figura 11: Medios porosos saturados en condición: no drenada (izq), y cara inferior drenada (der.).

coincidentes. En el primer caso, cuando actúa el esfuerzo de compresión, debido a la incompresibilidad del medio producida por las condiciones de contorno no drenadas, toda la presión exterior es tomada por el fluido a través de un incremento de la presión de poros de  $p = 0.5 \text{ GPa}$ . La variación volumétrica en este caso es nula. En la Figura 12, se muestra la variación de presión de poros y de la tensión efectiva en el tiempo.

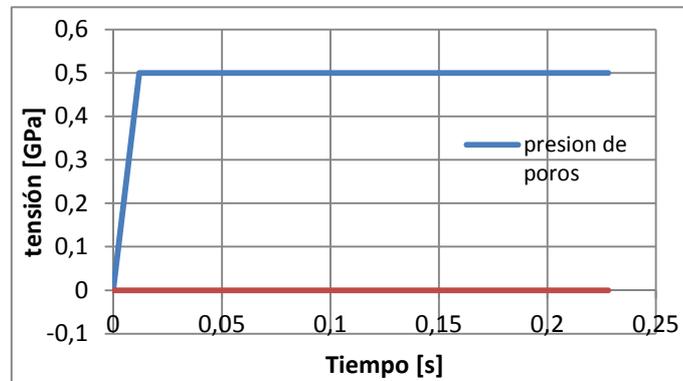


Figura 12: Variación temporal de la presión y de la tensión efectiva

En el segundo caso, se permite el flujo a través de la cara inferior. Cuando actúa el esfuerzo de compresión, en un primer instante (si la velocidad de aplicación de la carga es mucho mayor que la permeabilidad del medio) toda la carga es tomada por el fluido. Posteriormente, el fluido empieza a circular hacia la cara inferior, permitiendo variaciones volumétricas y por consecuencia, que la matriz sólida empiece a tomar tensión. En este ejemplo, la velocidad de aplicación de la carga es  $v_l = dt/2 = 0.006 \text{ s}$ . Se consideran diferentes permeabilidades:  $k_{f,1} = 0.1 \text{ m}^3/\text{GPa}\cdot\text{s}$ ,  $k_{f,1} = 1 \text{ m}^3/\text{GPa}\cdot\text{s}$ ,  $k_{f,1} = 10 \text{ m}^3/\text{GPa}\cdot\text{s}$ . En la Figura 13 se muestra la variación temporal de la presión en una fibra horizontal ubicada en la cara superior y en la Figura 14 sobre una fibra ubicada en el medio.

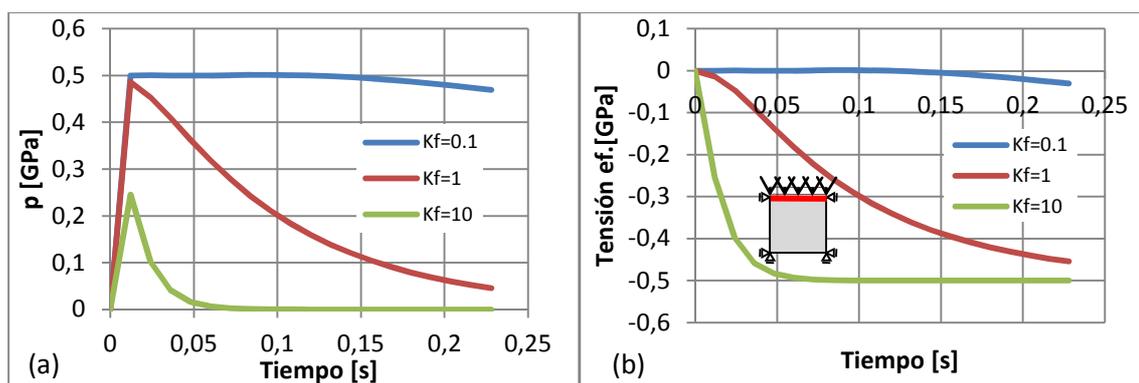


Figura 13: Variación temporal de la presión (a) y de la tensión efectiva (b)

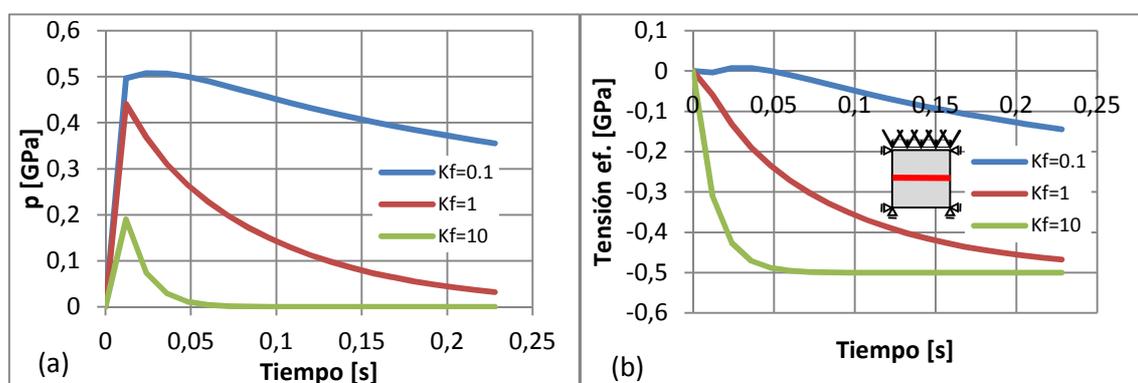


Figura 14: Variación temporal de la presión (a) y de la tensión efectiva (b)

#### 6.4 Medio poroso saturado discontinuo sometido a una carga mecánica

Considerando un bloque saturado de ancho  $b = 10 \text{ m}$ , largo  $l = 10 \text{ m}$ , módulo de Young  $E = 30 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\mu = 0.3$ , coeficiente de biot  $\alpha = 1$ , módulo de compresibilidad  $Q = 1e18 \text{ GPa}$ , permeabilidad  $k_f = 1 \text{ m}^3/\text{GPa} \cdot \text{s}$ , en presencia de una fisura lateral como se muestra en la Figura 16(a), bajo condiciones no drenadas (salvo en la fisura). El cuerpo es sometido a una tracción desde la cara superior similar al ejemplo (6.1). Debido al acoplamiento entre el campo de presiones y desplazamientos, se produce un flujo de fluido hacia la fisura proveniente de la saturación del medio. En la Figura 16 (b) se muestra el campo de presión generado por la carga mecánica y en la Figura 16 se representa el campo de velocidad del fluido. Se observa en esta figura que el fluido se dirige hacia el único contorno con condiciones drenadas.

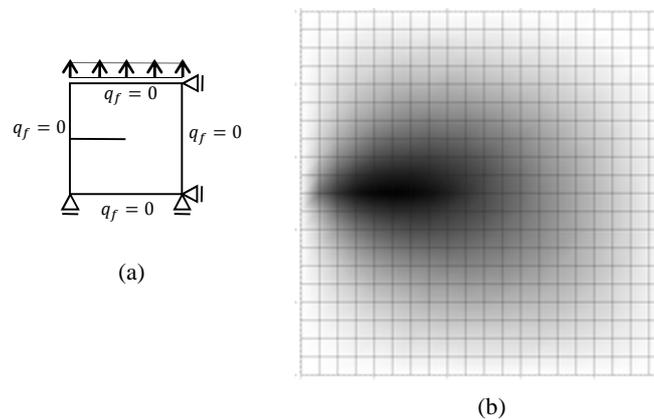


Figura 15: Problema hidromecánico acoplado, (a) Cuerpo saturado con fisura lateral, (b) Distribución de presiones producido por la carga mecánica.

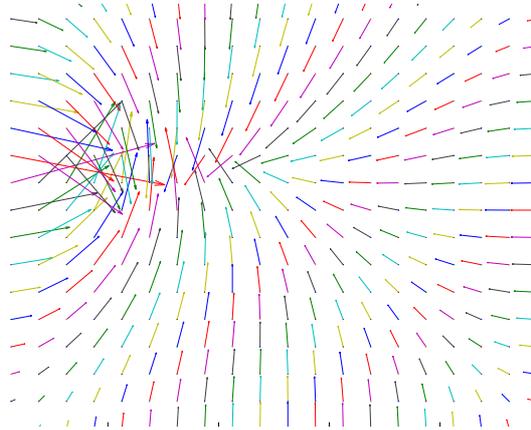


Figura 16: Campo de velocidad del fluido.

## 6.5 Medio poroso saturado discontinuo sometido a un flujo de fluido

Consideramos el mismo problema anterior, pero con una fisura central inclinada  $45^\circ$ , sometida a un flujo desde la cara inferior, con la cara superior en condiciones drenadas. En la Figura 18 se muestra las condiciones de contorno del problema y en la Figura 18, se muestra el campo de velocidades del fluido. En esta última figura, se observa que el flujo en la matriz, permanece uniforme. En la zona cercana a la primera cabeza de fisura, debido al gradiente de presiones producido por la fisura, el fluido es atraído a este punto. Por la baja permeabilidad de la discontinuidad, la velocidad aumenta en dirección paralela a la fisura. Ya en la segunda cabeza de fisura, el fluido tiende a restaurar su trayectoria original.

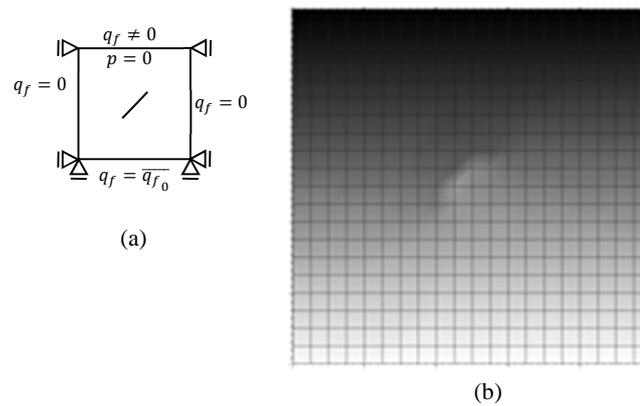


Figura 17: Problema hidromecánico acoplado, (a) Cuerpo saturado con fisura central a 45°, (b) Distribución de presiones producido por un flujo inferior.

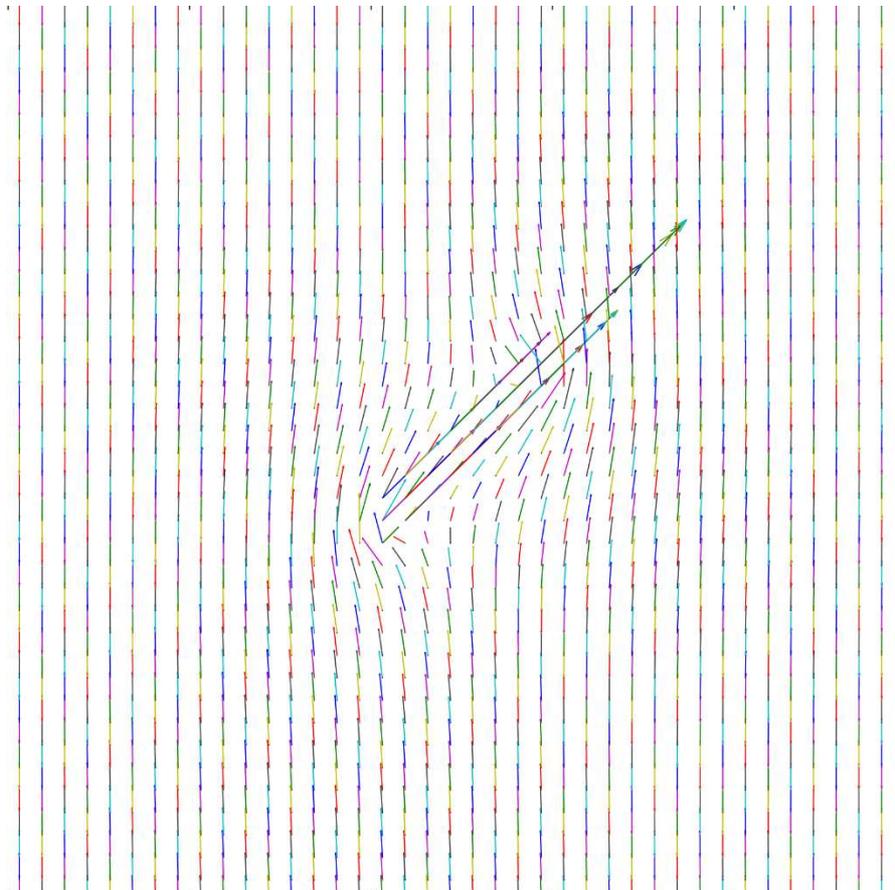


Figura 18: Campo de velocidades del fluido.

## 7 CONCLUSIONES

En el presenta trabajo, XFEM fue implementado en un modelo hidro-mecánico discontinuo en un medio poroso saturado. A través de ejemplos numéricos se estudió el comportamiento de XFEM en problemas mecánicos. Se reprodujeron fallas preponderantemente del primer modo, contrarrestándose con las soluciones analíticas obtenidas en la bibliografía. Como parámetro de referencia, se tomó el factor de intensidad de tensiones, lográndose muy buenos ajustes.

Posteriormente, se simuló el problema hidro-mecánico acoplado en un medio continuo y luego discontinuo.

El modelo planteado simula de forma satisfactoria el comportamiento de discontinuidades. La anisotropía del flujo a través de un medio fisurado, es reproducida conceptualmente de forma correcta por medio de un flujo Darciano en la discontinuidad.

## 8 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el soporte financiero de CONICET, Proyecto Préstamo BID PICT PRH 30 Nro 94 y Proyecto CIUNT 26E/427.

## REFERENCIAS

- Armero, F. y Linder, C. Numerical simulation of dynamic fracture using finite elements. *International Journal of Fracture Mechanics*, 160: 119-141, 2009.
- Bathe, K. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- Boone, T. y Ingraffea, A. A numerical procedure for simulation of hydraulically-driven fracture propagation in poroelastic media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 14: 27-47, 1990.
- Coussy, O. *Mechanics and physics of porous solids*. Wiley, 2010.
- de Borst, R., Remmers, J., Needleman, A. y Abellan, M. Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:583-607, 2004.
- de Borst, R., Rethore, J. y Abellan, M. A two-scale approach for fluid flow in fractured porous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71: 780-800, 2007.
- Irwin, G. Fracture. *Handbuch der Physik*, 6: 551-590, 1958.
- Liang, R. Z., Rui, Z. C., Liang, Z. Y. y Bo, Z. H. M-integral for Stress Intensity Factor Base on XFEM. *Proceedings of the Third International Symposium on Electronic Commerce and Security Workshops*, 226-230, 2010.
- Moës, N., Dolbow, J. y Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for numerical methods in engineering*, 46:131-150, 1999.
- Muskhelishvili, N. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Springer, 1977.
- Oller, S. *Mecánica de Fractura: Un enfoque global*. UPC, Barcelona, 2001.
- Schrefler, B. F.E. in Environmental Engineering: Coupled Thermo-hydro-mechanical Processes in Porous Media Including Pollutant Transport. *Archives of Computational Methods in Engineering* 2, 3: 1-54, 1995.
- Secchi, S., Simoni, L. y Schrefler, B. Mesh adaptation and transfer schemes for discrete fracture propagation in porous materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31: 331-345, 2007.
- Segura, J. y Carol, I. Coupled HM analysis using zero-thickness interface elements with double nodes. Part I: Theoretical model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32: 2083-2101, 2008.