

VIBRACIONES DE VIGAS Y PÓRTICOS ANTE LA PRESENCIA DE FISURAS. IMPLEMENTACIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

Javier L. Raffo, Marcos R. Carrizo

Grupo de Mecánica Computacional, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>

Palabras Clave: Detección de fisuras, vibraciones, problema inverso, solución analítica, elementos finitos, mediciones experimentales.

Resumen. En el presente trabajo se realiza un estudio de las características dinámicas en vigas y pórticos ante la presencia de fisuras superficiales abiertas, mediante modelos analíticos y resultados numéricos. Este análisis se complementa con mediciones experimentales y técnicas de análisis de vibraciones mecánicas junto con el desarrollo de modelos numéricos con un programa de elementos finitos.

Se implementa un modelo de fisura abierta en vigas y pórticos representado con un modelo de rótula elástica el cual en función de las propiedades de la fisura varía la rigidez a la flexión. La implementación del modelo de fisuras en vigas, permite el desarrollo de un método de identificación de las mismas. El método de identificación de fisuras propuesto, consiste en resolver el problema inverso de vibraciones, es decir, a partir de valores previos de frecuencias naturales obtenidas con el método analítico propuesto, con modelos de elementos finitos y con mediciones experimentales se obtienen las características de la fisura. Se presentan resultados numéricos y experimentales de frecuencias naturales, utilizados para la identificación de fisura en vigas y se presentan nuevos resultados numéricos de frecuencias naturales con comparaciones experimentales en pórticos con una fisura.

1 INTRODUCCIÓN

El desarrollo de métodos de detección de fisura es de un gran interés en ingeniería. En particular, el estudio del problema inverso de detección de fisuras en vigas a partir de valores de frecuencia natural obtenidos con otros métodos fue tratado por algunos autores. Por otra parte, el desarrollo de modelos matemáticos para el análisis analítico o numérico del problema de contorno fue tratado en una gran variedad de textos. En el presente trabajo se propone un método analítico de detección de fisuras en vigas a partir de valores de frecuencias naturales obtenidos previamente. Por otra parte se implementa el problema de fisuras en pórticos de dos tramos, resuelto analíticamente mediante la aplicación previa del cálculo de variaciones y se realizan comparaciones con mediciones experimentales y resultados obtenidos con el método de elementos finitos.

Realizando una breve descripción de los trabajos realizados al momento sin la intención de hacer una revisión completa de la bibliografía actual, solamente se citan alguno de los trabajos relevantes para el estudio propuesto.

Numerosos trabajos presentaron modelos analíticos de vigas con la presencia de una fisura, donde la fisura se modela a partir de un análisis fractomecánico (Ostachowicz y Krawezuk, 1991; Dimarogonas, 1996; Chondros y otros, 1997; Fernández-Sáez y Navarro, 2002; Ruotolo y Surace, 2004; Binici, 2005; Hsu, 2005; Quintana et al., 2010).

Por otra parte, el método analítico propuesto en este trabajo se resuelve con el cálculo de variaciones a partir del funcional energético. El cálculo de variaciones se ha constituido en una herramienta esencial para la construcción de modelos matemáticos en el área de la dinámica estructural. Es particularmente eficaz para la determinación de las expresiones analíticas de las ecuaciones diferenciales y de las condiciones de contorno que describen el comportamiento dinámico de elementos estructurales. Una gran variedad de textos se han escrito sobre los aspectos teóricos del cálculo de variaciones y las aplicaciones en la determinación de problemas de contorno (Gelfand y Fomin, 1963; Troutman, 1996; Giaquinta y Hildebrandt, 1996; Dym y Shames, 1973; Kantorovich y Krylov, 1964; Hildebrand, 1965; Weinstock, 1974; Elsgoltz, 1962). Por otra parte, existe una gran cantidad de trabajos publicados en revistas científicas sobre vibraciones de vigas con restricciones elásticas en los extremos, lo cual permite generar infinidad de condiciones de contorno incluyendo las condiciones clásicas (Grant, 1975; Hibbeler, 1975; Maurizi et al., 1976; Goel 1976a, b; Grossi y Laura, 1982; Laura y Grossi, 1982; Rao y Mirza, 1989; Cortinez y Laura, 1985; Laura y Gutierrez, 1986; Grossi y Bhat, 1991; Grossi et al., 1993; Nallim y Grossi, 1999). El problema de vibraciones libres de vigas con restricciones elásticas intermedias también ha recibido un extenso tratamiento. Rutenberg (1978) determinó las frecuencias de vibraciones libres de una viga uniforme en voladizo con una restricción elástica rotacional en un punto intermedio. Lau (1984) presentó una extensión del trabajo de Rutenberg (1978) al incluir un vínculo elástico traslacional. Rao (1989) determinó las frecuencias de vibración de una viga empotrada en ambos extremos pero con una restricción elástica intermedia. De Rosa et al. (1995) concretaron un estudio sobre vibraciones libres de vigas de espesor variable con restricciones elásticas intermedias. Arenas y Grossi (1999) determinaron soluciones exactas y aproximadas para una viga uniforme con un extremo y un punto intermedio elásticamente restringidos. Grossi y Albarracín (2003) determinaron las frecuencias de vibración de una viga con restricciones contra rotación y contra traslación en los extremos y en un punto intermedio. Raffo y Grossi (2012) realizaron un estudio de sensibilidad sobre las primeras frecuencias naturales que consiste en la influencia de la posición y el valor de una restricción elástica intermedia en vigas con rótulas intermedias.

En cuanto a trabajos propuestos donde se resuelve el problema inverso de detección de fisuras en vigas a partir de valores de frecuencia natural, se encuentra que [Risos y otros \(1990\)](#) propusieron un método no destructivo de detección de fisuras a partir de valores medidos de amplitud y frecuencia en dos puntos de la viga con una fisura superficial y uniforme en toda su profundidad, para estimar con métodos analíticos la posición y profundidad de la fisura. [Khaji \(2009\)](#) propuso identificar fisuras analíticamente a partir de resultados previos obtenidos mediante análisis con el método de elementos finitos.

Los modelos matemáticos utilizados en el presente trabajo para vigas y pórticos con extremos elásticamente restringidos y con restricciones elásticas intermedias, fueron resueltos mediante el uso del cálculo de variaciones.

El objetivo de este trabajo consiste en obtener un método de identificación de fisuras originado por la aplicación del cálculo de variaciones para obtener el problema de contorno y transición, que mediante la aplicación del método de separación de variables se obtiene el problema de autovalores asociado que es resuelto en forma exacta. Mediante esta solución exacta, es que se logra utilizar los autovalores para la determinación de la posición y la profundidad de las fisuras en vigas. Este método también es utilizado para obtener las características de la fisura a partir de resultados previos de frecuencias naturales obtenidos con el programa Abaqus de elementos finitos y frecuencias naturales medidas experimentalmente. Por otra parte, se implementa el modelo de fisura propuesto en pórticos, verificando su efectividad al comparar resultados exactos con los obtenidos con el programa Abaqus de elementos finitos y con mediciones experimentales. En el modelo analítico, la fisura propuesta consiste en una fisura abierta representada con un modelo de rótula elástica el cual en función de las propiedades de la fisura varía la rigidez a la flexión que se obtiene a partir de un análisis fractomecánico.

Se presentan nuevos resultados numéricos y experimentales para la identificación de fisura en vigas y se presentan nuevos resultados con comparaciones experimentales y con elementos finitos de frecuencias naturales en pórticos con una fisura.

2 OBTENCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO Y SOLUCIÓN EXACTA PARA UNA VIGA

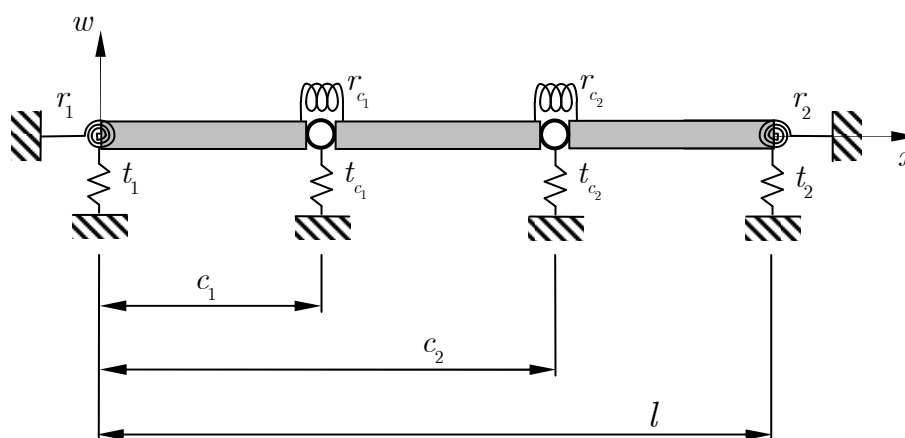


Figura 1: Viga de tres tramos analizada.

Sea una viga de longitud l , de dimensiones uniformes a lo largo de su eje, que tiene sus extremos restringidos elásticamente y tiene dos posiciones intermedias restringidas elásticamente con dos rótulas internas como se muestra en la [Figura 1](#). La viga está compuesta por tres tramos, que corresponden a los intervalos $[0, c_1]$, $[c_1, c_2]$ y $[c_2, l]$ respectivamente. Se asume que los extremos y las rótulas intermedias están restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Las restricciones rotacionales están definidas por los parámetros $r_1, r_2, r_{c_i}, i = 1, 2$ y las restricciones traslacionales por $t_1, t_2, t_{c_i}, i = 1, 2$. Adoptando valores adecuados de r_1, r_2 y t_1, t_2 se pueden generar todas las combinaciones posibles de restricciones de apoyo clásicas (empotrado, simplemente apoyado, libre). Por otra parte, utilizando $t_{c_i}, r_{c_i}, i = 1, 2$, se pueden considerar efectos de restricciones elásticas intermedias en los puntos intermedios $x = c_i, i = 1, 2$.

Para analizar el desplazamiento transversal de la viga en estudio, suponemos que la posición vertical de la viga en cualquier instante de tiempo t está descrita por la función $w = w(x, t), x \in [0, l]$.

El principio de Hamilton establece que entre los tiempos t_a y t_b , donde las posiciones de w son conocidas, el valor del desplazamiento w que realmente se produce es el que hace estacionario al funcional $F(w) = \int_{t_a}^{t_b} L dt$ en el espacio de funciones admisibles, donde el Lagrangeano L está dado por $L = T - U$, donde U es la energía elástica de deformación de la viga y de las restricciones elásticas en cualquier instante t y T es la energía cinética de la viga en el instante t , (ver [Grossi, 2010](#)). En consecuencia, el funcional energético a considerar para la viga es

$$F(w) = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left[\sum_{i=1}^3 \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left((\rho A)_i(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right)^2 - (EI)_i(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 \right) dx \right] dt - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \sum_{i=0}^3 \left(r_{c_i} \left(\frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 + t_{c_i} w^2(c_i, t) \right) dt. \quad (1)$$

donde $(\rho A)_i = \rho_i A_i$ denota la masa por unidad de longitud del tramo i , $c_0 = 0, c_3 = l$, $(EI)_i = E_i I_i$ denota la rigidez a la flexión del tramo i , $r_{c_0} = r_1, t_{c_0} = t_1, r_{c_3} = r_2, t_{c_3} = t_2$ y la notación $0^+, c_i^+, c_i^-$ y l^- denota el uso de límites y derivadas laterales, con $i = 1, 2, 3$. Siendo además que $c_0^- = 0^- \notin [0, l]$ y $c_3^+ = l^+ \notin [0, l]$, en la Eq. (1) se asume que $\frac{\partial w}{\partial x}(0^-, t) \equiv 0, \frac{\partial w}{\partial x}(l^+, t) \equiv 0$. Se puede observar que la energía de deformación debido a la restricción elástica rotacional r_{c_i} corresponde al término

$$r_{c_i} \left(\frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 \quad (2)$$

que implica que el resorte está conectado en el lado derecho del tramo ubicado a la izquierda de c_i , y a la izquierda del tramo ubicado a derecha de c_i .

Al aplicar la técnica del cálculo de variaciones (Grossi 2010), se obtiene que la función del desplazamiento transversal w tiene que satisfacer las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) + (\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0, \quad (3)$$

$$\forall x \in (c_{i-1}, c_i), i = 1, 2, 3, t \geq 0.$$

Mediante este mismo procedimiento, y realizando el cambio de variables $\bar{x} = x/l$, se obtienen también las siguientes condiciones de contorno y de transición de la viga analizada (Raffo y Grossi, 2012):

$$R_1 \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t), \quad (4)$$

$$T_1 w(0^+, t) = -\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0^+, t), \quad (5)$$

$$w(\bar{c}_i^-, t) = w(\bar{c}_i^+, t), i = 1, 2, \quad (6)$$

$$R_{c_i} \left(\frac{\partial w}{\partial x}(\bar{c}_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(\bar{c}_i^-, t) \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\bar{c}_i^-, t), i = 1, 2, \quad (7)$$

$$R_{c_i} \left(\frac{\partial w}{\partial x}(\bar{c}_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(\bar{c}_i^-, t) \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\bar{c}_i^+, t), i = 1, 2, \quad (8)$$

$$T_{c_i} w(\bar{c}_i, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(\bar{c}_i^-, t) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(\bar{c}_i^+, t), i = 1, 2, \quad (9)$$

$$R_2 \frac{\partial w}{\partial x}(1^-, t) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1^-, t), \quad (10)$$

$$T_2 w(1^-, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(1^-, t), \quad (11)$$

donde $t \geq 0$, $\bar{c}_i = c_i/l$, $T_i = \frac{t l^3}{EI}$, $R_i = \frac{r_i l}{EI}$, $T_{c_i} = \frac{t c_i^3}{EI}$, $R_{c_i} = \frac{r_{c_i} l}{EI}$, $i = 1, 2$.

Como el dominio del sistema con el cambio de variables considerado es $D = (0, 1)$ que es un intervalo abierto en \mathbb{R} , el borde está dado por dos puntos, $\partial D = \{0, 1\}$. En consecuencia, \bar{c}_1 y \bar{c}_2 son puntos interiores y (6) a (9) son las condiciones en las transiciones. Por lo tanto (4), (5), (10) y (11) corresponden a las condiciones de contorno.

En este caso, es posible simular una sola fisura con una restricción rotacional interna adoptando $0 < r_{c_1} < \infty$, $r_{c_2} = \infty$, $t_{c_1} = t_{c_2} = 0$.

Utilizando el método de separación de variables, se asume como solución de las ecuaciones diferenciales (3) las funciones dadas por las series

$$w_i(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{i,n}(\bar{x}) \cos \omega t, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

donde $w_{i,n}$ son los n th modos de vibración natural. Las funciones $w_{i,n}$ están dadas por

$$w_{1,n}(\bar{x}) = A_1 \cosh \lambda \bar{x} + A_2 \sinh \lambda \bar{x} + A_3 \cos \lambda \bar{x} + A_4 \sin \lambda \bar{x}, \quad \forall \bar{x} \in [0, \bar{c}_1], \quad (13)$$

$$w_{2,n}(\bar{x}) = A_5 \cosh \lambda \bar{x} + A_6 \sinh \lambda \bar{x} + A_7 \cos \lambda \bar{x} + A_8 \sin \lambda \bar{x}, \quad \forall \bar{x} \in [\bar{c}_1, \bar{c}_2], \quad (14)$$

$$w_{3,n}(\bar{x}) = A_9 \cosh \lambda \bar{x} + A_{10} \sinh \lambda \bar{x} + A_{11} \cos \lambda \bar{x} + A_{12} \sin \lambda \bar{x}, \quad \forall \bar{x} \in [\bar{c}_2, 1], \quad (15)$$

donde $\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 t^4$.

Reemplazando las Ecs. (13)-(15) en las Ecs.(4)-(11), buscando una solución no trivial, el determinante del sistema de los coeficientes A_i debe ser igual a cero. Con este procedimiento se obtiene la ecuación de frecuencias

$$G\left(T_1, R_1, T_2, R_2, \left(T_{c_i}, R_{c_i}, \bar{c}_i\right)_{i=1,2}, \lambda\right) = 0. \quad (16)$$

3 OBTENCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO Y SOLUCIÓN EXACTA PARA UN PÓRTICO

Sea un pórtico de dos tramos de dimensiones uniformes, que tiene sus extremos restringidos elásticamente y tiene dos posiciones intermedias restringidas elásticamente con dos rótulas internas en cada tramo como se muestra en la Figura 2. El pórtico está compuesto por dos tramos, que corresponden a los intervalos $x_1 \in [0, l_1]$, y $x_2 \in [0, l_2]$, respectivamente. Se asume que los extremos y las rótulas intermedias están restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Las restricciones traslacionales se denotan por t_i y s_i , y las restricciones rotacionales por r_i , con $i = 1, \dots, 4$, y todas ellas están conectadas a un punto fijo. A su vez, las restricciones que están conectadas en ambos lados de la viga se denotan por r_{c_i} y actúan en el punto intermedio ubicado en $x_i = c_i$, con $i = 1, 2$.

Para analizar el comportamiento del sistema en estudio en cualquier instante t , se supone que los desplazamientos axiales son descritos por las funciones $u_i(x_i, t)$, $x_i \in [0, l_i]$, y los desplazamientos transversales por $w_i(x_i, t)$, $x_i \in [0, l_i]$, con $i = 1, 2$, tal como se esquematiza

en la Figura 2. Las condiciones de compatibilidad en el punto $x_1 = l_1$, están dadas por las relaciones:

$$w_1(l_1^-, t) = -u_2(0^+, t), \tag{17}$$

$$u_1(l_1^-, t) = w_2(0^+, t), \tag{18}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(l_1^-, t) = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(0^+, t), \tag{19}$$

donde l_i^- y 0^+ , indican que se usan límites y derivadas laterales. Para simplificar la notación de aquí en adelante se eliminan los supraíndices + y -.

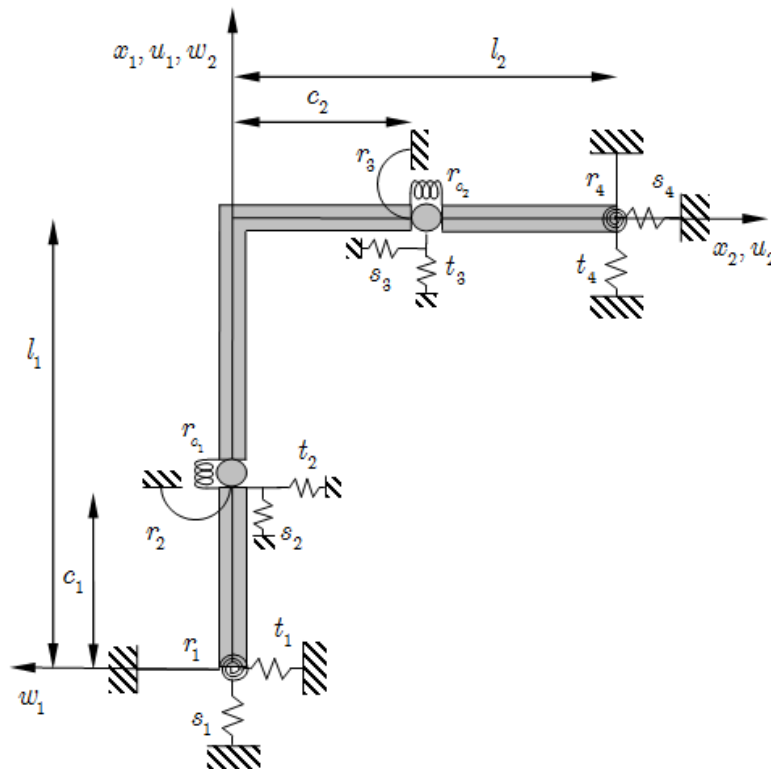


Figura 2: Pórtico de dos tramos analizado.

El principio de Hamilton establece que entre los tiempos t_a y t_b , donde las posiciones son conocidas, el movimiento que realmente se produce es el que hace estacionario al funcional $F(u, w) = \int_{t_a}^{t_b} L dt$ en el espacio de funciones admisibles, donde el Lagrangeano L está dado por $L = T - U$, donde U es la energía elástica de deformación del pórtico y de las restricciones elásticas en cualquier instante t y T es la energía cinética en el instante t , (ver Grossi 2010). En consecuencia, el funcional energético a considerar para el pórtico es

$$\begin{aligned}
F(u, w) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 \int_{b_{i,j}}^{b_{i,j+1}} \left((\rho A)_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 + (\rho A)_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. \left. (EI)_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \right)^2 - (EA)_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, t) \right)^2 \right] dx_i - r_i \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(a_i, t) \right)^2 \right. \\
& - r_{i+2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(a_{i+2}, t) \right)^2 - s_i u_1^2(a_i, t) - s_{i+2} u_2^2(a_{i+2}, t) - t_i w_1^2(a_i, t) \\
& \left. \left. \left. - t_{i+2} w_2^2(a_{i+2}, t) - r_{c_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^+, t) - \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(c_i^-, t) \right)^2 \right] \right\} dt,
\end{aligned} \tag{20}$$

donde $(\rho A)_i = \rho_i A_i$, denota la masa por unidad de longitud, $(EI)_i = E_i I_i$ denota la función que da la rigidez a la flexión y $(EA)_i = E_i A_i$ denota la rigidez axial, correspondiente al tramo entre 0 y l_i , siendo además $b_{i,1} = 0$, $b_{i,2} = c_i$, $b_{i,3} = l_i$, y $a_1 = 0$, $a_2 = c_2$, $a_3 = c_3$, $a_4 = l_2$, y los dominios $G_{i,1} = (0, c_i)$, $G_{i,2} = (c_i, l_i)$ cuyas clausuras son: $\bar{G}_{i,1} = G_{i,1} \cup \{0, c_i\}$, $\bar{G}_{i,2} = G_{i,2} \cup \{c_i, l_i\}$ y $G_i = (0, l_i)$, con $i = 1, 2$.

Al aplicar la técnica del cálculo de variaciones (Grossi 2010), y realizando el cambio de variables $\bar{x}_i = x_i / l_i$, se obtiene que las funciones del desplazamiento axial u_i y transversal w_i con $i = 1, 2$, tienen que satisfacer las ecuaciones diferenciales

$$\frac{(EA)_i}{l_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{x}_i^2}(\bar{x}_i, t) - (\rho A)_i l_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(\bar{x}_i, t) = 0, \tag{21}$$

$$\frac{(EI)_i}{l_i^3} \frac{\partial^4 w_i}{\partial \bar{x}_i^4}(\bar{x}_i, t) + (\rho A)_i l_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}(\bar{x}_i, t) = 0. \tag{22}$$

Mediante este mismo procedimiento, se obtienen también las siguientes condiciones de contorno y de transición del pórtico analizado:

$$R_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(0, t) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(0, t), \tag{23}$$

$$S_1 u_1(0, t) = \frac{(EA)_1}{(EI)_1} l_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0, t), \tag{24}$$

$$T_1 w_1(0, t) = -\frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(0, t), \tag{25}$$

$$R_{c_1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(\bar{c}_1^+, t) - \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(\bar{c}_1^-, t) \right) - R_2 \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(\bar{c}_1^-, t) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(\bar{c}_1^-, t), \quad (26)$$

$$S_2 u_1(\bar{c}_1, t) = \frac{(EA)_1}{(EI)_1} l_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\bar{c}_1^+, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\bar{c}_1^-, t) \right), \quad (27)$$

$$T_2 w_1(\bar{c}_1, t) = \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(\bar{c}_1^-, t) - \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(\bar{c}_1^+, t) \right), \quad (28)$$

$$u_1(\bar{c}_1^-, t) = u_1(\bar{c}_1^+, t), \quad (29)$$

$$w_1(\bar{c}_1^-, t) = w_1(\bar{c}_1^+, t), \quad (30)$$

$$R_{c_1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(\bar{c}_1^+, t) - \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(\bar{c}_1^-, t) \right) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(\bar{c}_1^+, t), \quad (31)$$

$$u_1(1, t) = w_2(0, t), \quad (32)$$

$$w_1(1, t) = -u_2(0, t), \quad (33)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}(1, t) = \frac{l_1}{l_2} \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(0, t), \quad (34)$$

$$\frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(0, t) = -\frac{(EA)_1}{(EI)_2} \frac{l_2^3}{l_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(1, t), \quad (35)$$

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(1, t) = \frac{(EA)_2}{(EI)_1} \frac{l_1^3}{l_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(0, t), \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(1, t) = \frac{(EI)_2}{(EI)_1} \frac{l_1^3}{l_2^3} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(0, t), \quad (37)$$

$$R_{c_2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(\bar{c}_2^+, t) - \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(\bar{c}_2^-, t) \right) - R_3 \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(\bar{c}_2^-, t) = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(\bar{c}_2^-, t), \quad (38)$$

$$S_3 u_2(\bar{c}_2, t) = \frac{(EA)_2}{(EI)_2} l_2^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(\bar{c}_2^+, t) - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(\bar{c}_2^-, t) \right), \quad (39)$$

$$T_3 w_2(\bar{c}_2, t) = \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(\bar{c}_2^-, t) - \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(\bar{c}_2^+, t) \right), \quad (40)$$

$$u_2(\bar{c}_2^-, t) = u_2(\bar{c}_2^+, t), \quad (41)$$

$$w_2(\bar{c}_2^-, t) = w_2(\bar{c}_2^+, t), \quad (42)$$

$$R_{c_2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}(\bar{c}_2^+, t) - \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(\bar{c}_2^-, t) \right) = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(\bar{c}_2^+, t), \quad (43)$$

$$R_4 \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(1, t) = - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(1, t), \quad (44)$$

$$S_4 u_2(1, t) = - \frac{(EA)_2}{(EI)_2} l_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(1, t), \quad (45)$$

$$T_4 w_2(1, t) = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(1, t), \quad (46)$$

donde $t \geq 0$, y $R_i = \frac{r_i l_i}{(EI)_1}$, $R_{i+2} = \frac{r_{i+2} l_2}{(EI)_2}$, $S_i = \frac{s_i l_i^3}{(EI)_1}$, $S_{i+2} = \frac{s_{i+2} l_2^3}{(EI)_2}$, $T_i = \frac{t_i l_i^3}{(EI)_1}$,

$T_{i+2} = \frac{t_{i+2} l_2^3}{(EI)_2}$, $R_{c_i} = \frac{r_{c_i} l_i}{(EI)_i}$, siendo $\bar{c}_i = c_i / l_i$, con $i = 1, 2$.

Nótese que al hacer tender a cero o infinito a los valores de los coeficientes de rigidez se generan las distintas condiciones de apoyo clásicas. Por ejemplo, al hacer $R_1 \rightarrow \infty$, $S_1 \rightarrow \infty$ y $T_1 \rightarrow \infty$, se obtienen las condiciones de contorno geométricas: $u_1(0, t) = 0$, $w_1(0, t) = 0$ y $\partial w_1 / \partial x_1(0, t) = 0$, las cuales establecen que el extremo inferior del primer tramo está rígidamente empotrado. De forma análoga se determinan las condiciones geométricas en los otros extremos.

En este caso, es posible simular una fisura con una restricción rotacional interna en el primer tramo adoptando $0 < R_{c_1} < \infty$, $R_2 = S_2 = T_2 = 0$.

La solución general de las ecuaciones diferenciales (21) y (22) están dadas por

$$u_{i,j}(\bar{x}_i) = C_{i,j,1} \cos(\lambda_i^u \bar{x}_i) + C_{i,j,2} \sin(\lambda_i^u \bar{x}_i), \quad i = 1, 2, j = 1, 2, \quad (47)$$

$$w_{i,j}(\bar{x}_i) = C_{i,j,3} \cosh(\lambda_i^w \bar{x}_i) + C_{i,j,4} \sinh(\lambda_i^w \bar{x}_i) + C_{i,j,5} \cos(\lambda_i^w \bar{x}_i) + C_{i,j,6} \sin(\lambda_i^w \bar{x}_i), \quad i = 1, 2, j = 1, 2, \quad (48)$$

donde $\lambda_i^u = \lambda^2 \sqrt{\frac{(\rho A)_i}{\rho A} \frac{EI}{(EA)_i} \frac{l_i}{l^2}}$, $\lambda_i^w = \lambda^4 \sqrt{\frac{(\rho A)_i}{\rho A} \frac{EI}{(EI)_i} \frac{l_i}{l}}$ y $\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} l^4 \omega^2$, las constantes

$C_{i,j,k}$ con $i = 1,2$, $j = 1,2$ y $k = 1, \dots, 6$, son constantes independientes a resolver con las ecuaciones de contorno y transiciones del pórtico analizado que son las (23) a (46). Con este procedimiento se obtiene la ecuación de frecuencias

$$G \left((r_i, t_i, s_i) \Big|_{i=1, \dots, 4}, (r_{c_i}, \bar{c}_i, l_i, E_i, I_i, A_i, \rho_i) \Big|_{i=1,2}, \lambda \right) = 0. \quad (49)$$

4 MODELO DE FISURA

Para la implementación del modelo de fisura en vigas, consideramos el modelo que Ostachowicz y Krawezuk (1991) propusieron originalmente, formulado con herramientas fractomecánicas, basado en el factor de intensidad de tensiones para fisuras superficiales simples y abiertas (ver Figura 3) y fisuras dobles (ver Figura 4).

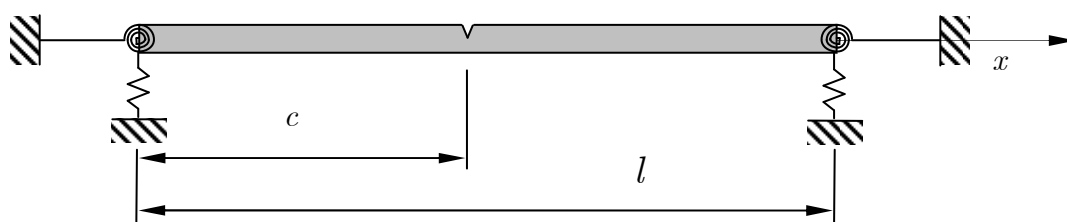


Figura 3: Viga con una fisura superficial a un solo lado.

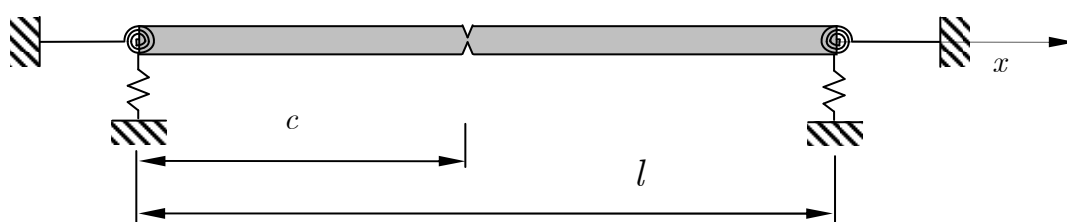


Figura 4: Viga con una fisura superficial en ambos lados.

Este modelo consiste en considerar a la sección de la viga donde se encuentra la fisura, como una rótula elástica donde la rigidez del resorte rotacional varía de la siguiente manera

$$r_c^{(S)} = \frac{Ebh^2}{72\pi\eta^2 f(\eta)}, \quad (50)$$

$$r_c^{(D)} = \frac{Ebh^2}{36\pi\bar{\eta}^2 f(\bar{\eta})}, \quad (51)$$

donde E es el módulo de Young del material de la viga, b y h son la profundidad y la altura

de la sección rectangular de la viga respectivamente, $\eta = a / h$ es la relación entre la profundidad de la fisura a y la altura de la viga (ver Figura 5 (a)) y $\bar{\eta} = 2a / h$ (ver Figura 5 (b)). La función $f(\eta)$ es para una fisura abierta a un solo lado de la viga (Figura 3 y Figura 5 (a))

$$f(\eta) = 0.6384 - 1.035\eta + 3.7201\eta^2 - 5.1773\eta^3 + 7.553\eta^4 - 7.332\eta^5 + 2.4909\eta^6, \quad (52)$$

y $f(\bar{\eta})$ para una fisura abierta a ambos lados de la viga (Figura 4 y Figura 5 (b)),

$$f(\bar{\eta}) = 0.5033 - 0.9022\bar{\eta} + 3.412\bar{\eta}^2 - 3.181\bar{\eta}^3 + 5.793\bar{\eta}^4. \quad (53)$$

Siendo $\bar{\eta} = 2a / h$

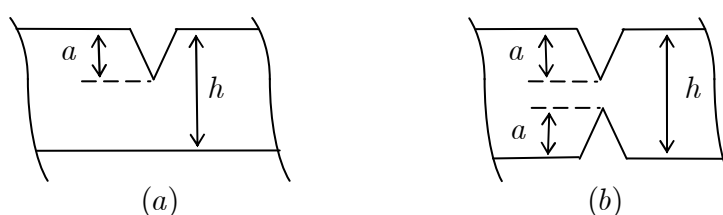


Figura 5: Esquema de una fisura superficial abierta: (a) a un lado, (b) en ambos lados de la viga.

Por lo tanto, una viga con restricciones elásticas en ambos extremos con una sola fisura queda representada como se muestra en la Figura 6.

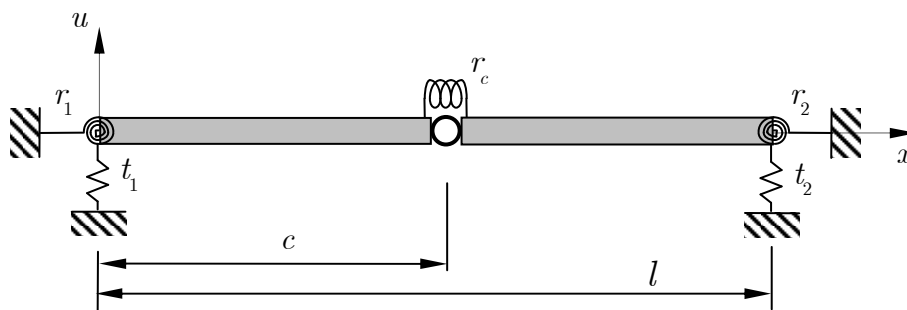


Figura 6: Modelo de viga para representar una fisura en $x = c$.

5 PROBLEMA INVERSO EN VIGAS

Para establecer las distintas condiciones de apoyo clásicas en los extremos de la viga, se adopta la notación donde E denota que el extremo está empotrado, A denota que el extremo está articulado y L denota que el extremo está libre. Como ejemplo, si se indica la condición de borde de una viga E-A, denota que el primer tramo, en $x = 0$, el extremo se encuentra empotrado, mientras que en el segundo tramo, en $x = l$, el extremo se encuentra articulado.

Los valores numéricos del coeficiente de frecuencia λ , se calculan según: $\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 l^4$.

Se propone resolver el problema inverso de determinación de posición y profundidad de la fisura a partir de conocer los primeros valores de los coeficientes de frecuencias λ de una viga mediante la ecuación característica (16).

En cuanto al método de obtención de los valores de λ , se emplearon tres técnicas: La solución exacta aplicada en forma directa, el método de elementos finitos, implementado con el programa Abaqus y la realización de mediciones experimentales.

Para describir el procedimiento de detección de fisuras se considera un caso particular de una viga E-L, con una fisura simple ubicada en $c = 0.6715$ y con $\eta = 0.2956$, donde los valores de λ obtenidos con la solución exacta son:

$$\lambda_1 = 1.8638, \lambda_3 = 7.2654 \text{ y } \lambda_5 = 13.7278. \quad (54)$$

Para cada valor de (54) se obtiene con (16) los valores de r_{12} en función de la posición \bar{x} , como se muestra en la Figura 7. Se puede observar que el punto P donde se cortan las tres curvas indica la posición $\bar{x} = \bar{c}$ donde se encuentra la fisura y el valor r_{12} de donde se obtiene en forma directa el valor de η .

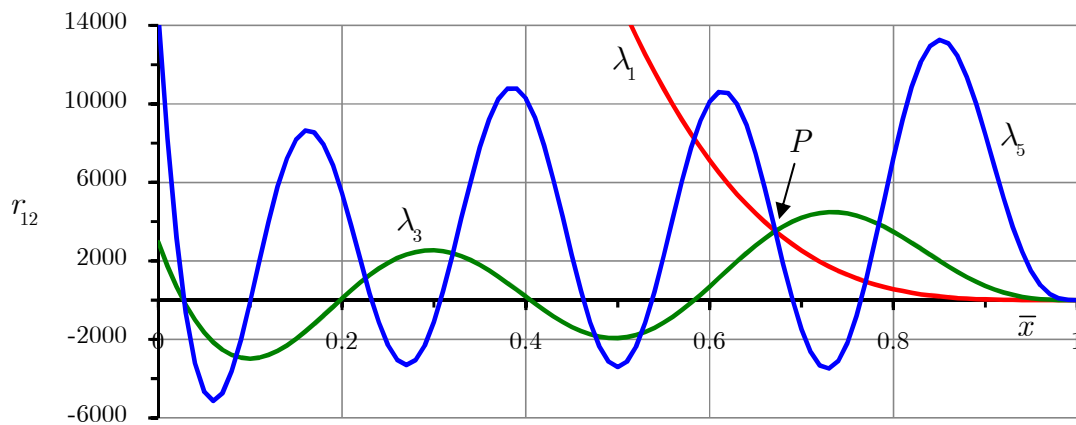


Figura 7: Valores de r_{12} obtenidos para cada valor de λ indicado en la (54) introducidos en la (16) en función de la posición \bar{x} .

Como no en todos los casos es fácilmente determinable el punto P , es conveniente utilizar herramientas estadísticas. En la Figura 8 se grafican los valores de la desviación estándar de la muestra σ para los valores de r_{12} representados en la Figura 7, siendo

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_{12}^i - \bar{r}_{12})^2}{(n-1)}. \quad (55)$$

donde r_{12}^i denota el valor de r_{12} para el modo i , \bar{r}_{12} denota el valor medio de los r_{12}^i y $n = 5$ e $i = 1,3,5$ para el caso analizado. En la Figura 8 se observa que σ tiene dos valores casi nulos en $\bar{x} = 0.67$ y en el borde libre de la viga. Para

$$\bar{x} = 0.67 \rightarrow \bar{r}_{12} = 3617, \quad (56)$$

por lo tanto, de la Ec. (50) se obtiene $\eta = 0.29$.

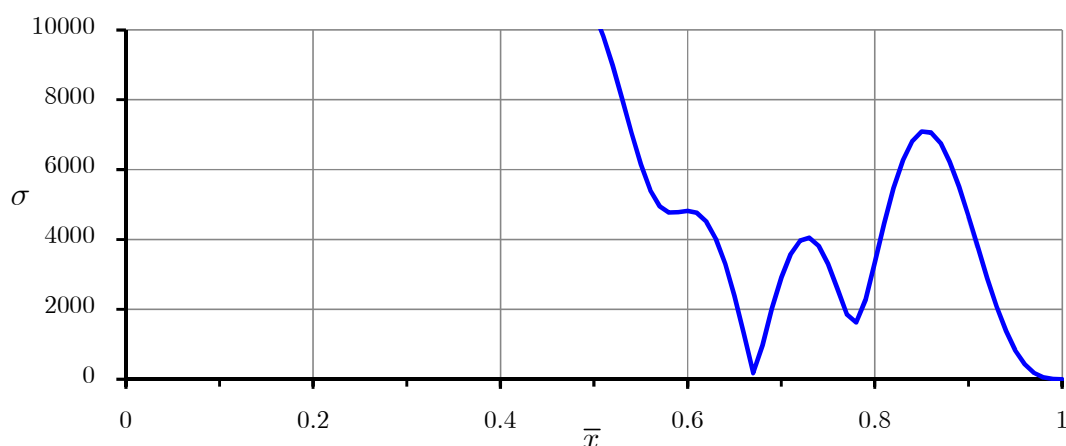


Figura 8: Valores de σ en función de la posición \bar{x} , para los resultados de r_{12} representados en la Figura 7.

6 RESULTADOS EN VIGAS

En la Tabla 1, se presentan las características de las vigas con fisura analizadas. El tipo de fisura simple se refiere a una fisura superficial a un solo lado de la viga (ver Figura 5 (a)), y el tipo de fisura doble, se refiere a dos fisuras superficiales en la misma posición c , a ambos lados de la viga (ver Figura 5 (b)).

Viga	Condiciones de contorno	Propiedades de la fisura		
		c	η	Tipo de fisura
1	E-L	0.0963	0.3045	Simple
2	E-L	0.6715	0.2956	Simple
3	E-L	0.1927	0.4543	Doble
4	E-L	0.3882	0.5185	Doble
5	E-E	0.0986	0.3045	Simple
6	E-E	0.1972	0.2661	Simple
7	E-E	0.2947	0.2956	Simple
8	E-E	0.1972	0.4543	Doble
9	E-E	0.4000	0.5185	Doble
10	A-A	0.4990	0.2964	Simple
11	A-A	0.3996	0.5458	Simple

Tabla 1: Propiedades de las vigas con fisura analizadas.

En la Tabla 2, Tabla 3 y Tabla 4 se presentan los primeros seis valores de λ para las vigas descriptas en la Tabla 1, para la condición de contorno E-L, E-E y A-A respectivamente, obtenidos con la solución exacta, con el programa Abaqus y obtenidos experimentalmente.

Para la modelización con el programa Abaqus se utilizó el elemento rectangular plano de 8 nodos, bi-cuadrático de tensiones planas CPS8, realizando un análisis previo de convergencia

para definir la densidad adecuada de la malla.

Viga		Secuencia Modal					
		1	2	3	4	5	6
1	Exacto	1.6297	4.5177	7.7938	10.9951	14.0057	16.7871
	Abaqus	1.8087	4.5595	7.6502	10.7075	13.7321	16.7168
	Experimental	1.68	4.52	7.58	10.59	13.54	16.58
2	Exacto	1.8638	4.3743	7.2654	10.9198	13.7278	16.4657
	Abaqus	1.8385	4.5776	7.6335	10.7474	13.7658	16.7318
	Experimental	1.84	4.53	7.56	10.64	13.61	16.60
3	Exacto	1.6235	4.6859	7.6208	10.2564	13.5093	17.0474
	Abaqus	1.8062	4.5822	7.6391	10.6127	13.6300	16.7194
	Experimental	1.80	4.54	7.56	10.50	13.48	16.45
4	Exacto	1.6918	4.2005	7.4530	10.7261	13.0517	17.2425
	Abaqus	1.7894	4.4640	7.4821	10.5399	13.3207	16.5045
	Experimental	1.77	4.43	7.43	10.41	13.17	16.22

Tabla 2: Primeros seis valores de λ para las vigas E-L descritas en la [Tabla 1](#).

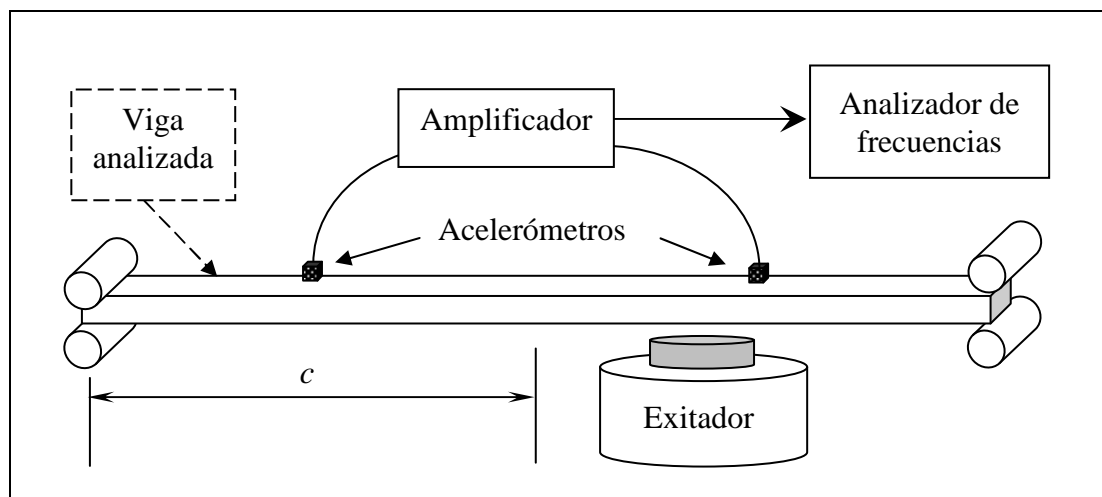


Figura 9: Esquema del sistema de medición de frecuencias naturales con dos acelerómetros.

En la [Figura 9](#) se observa el esquema de medición empleado para obtener experimentalmente las seis primeras frecuencias naturales de las vigas analizadas. Para realizar las mediciones, se emplearon acelerómetros tipo 4374 y amplificador NEXUS tipo 2692-012 de la firma B&K, y una placa adquisidora PCI-6132 de la firma National Instruments y para procesar la señal se utilizó un programa de la misma firma. Utilizando también un mecanismo de excitación de ondas mecánicas controladas para la determinación de las distintas frecuencias naturales de vibración.

Viga		Secuencia Modal					
		1	2	3	4	5	6
5	Exacto	4.5469	7.7998	10.9935	13.9788	16.7446	19.6068
	Abaqus	4.7087	7.8401	10.9733	14.0687	17.1241	20.1502
	Experimental	4.74	7.79	10.89	13.89	16.82	20.05
6	Exacto	4.7224	7.6919	10.4712	13.6647	17.1176	20.4068
	Abaqus	4.7175	7.8121	10.8901	13.9839	17.1063	20.1890
	Experimental	4.71	7.73	10.77	13.76	16.75	20.14
7	Exacto	4.6757	7.3554	10.7541	14.0763	16.4075	19.7976
	Abaqus	4.7231	7.7913	10.9340	14.0628	17.0563	20.1293
	Experimental	4.74	7.74	10.88	13.89	16.95	20.10
8	Exacto	4.7181	7.6015	10.2533	13.5287	17.0735	20.4019
	Abaqus	4.6974	7.8118	10.8531	13.9468	17.1093	20.2103
	Experimental	4.68	7.70	10.70	13.67	16.79	19.17
9	Exacto	4.3464	7.4319	10.7200	13.0560	17.2452	19.3222
	Abaqus	4.6768	7.7685	10.9127	13.8161	17.1387	19.9336
	Experimental	4.45	7.27	10.24	12.54	16.15	18.99

Tabla 3: Primeros seis valores de λ para las vigas E-E descritas en la [Tabla 1](#).

Viga		Secuencia Modal					
		1	2	3	4	5	6
10	Exacto	2.8524	6.2832	8.7698	12.5662	14.8371	18.8492
	Abaqus	3.1256	6.4064	9.3811	12.7801	15.6028	18.4333
	Experimental	3.23	6.38	9.37	12.29	15.51	18.54
11	Exacto	2.4136	5.9328	8.9459	11.5118	15.7079	17.5374
	Abaqus	3.0371	6.2040	9.2988	12.1845	15.6259	17.6935
	Experimental	3.12	6.06	9.49	13.13	15.45	17.48

Tabla 4: Primeros seis valores de λ para las vigas A-A descritas en la [Tabla 1](#).

Realizando el método inverso propuesto, en la [Tabla 5](#) se presentan las estimaciones realizadas de c y de η que caracterizan a la posición y profundidad de fisura para los valores de frecuencia de la [Tabla 2](#), [Tabla 3](#) y [Tabla 4](#). Se observa, en general, una mayor precisión en la determinación del valor de c que en la determinación del valor de η . También se observa que el método responde con mayor precisión cuando c se encuentra alejado de los bordes de

la viga y por otra parte se observa que hay casos muy sensibles a los valores de λ , debido a que el valor de c se encuentra cercano a puntos de inflexión de las formas modales.

Viga	Propiedades estimadas de la fisura					
	Exacto		Abaqus		Experimental	
	c	η	c	η	c	η
1	0.10	0.3	0.21	0.27	0.20	0.34
2	0.67	0.29	0.55	0.36	0.57	0.33
3	0.19	0.45	0.19	0.40	0.20	0.49
4	0.40	0.52	0.37	0.39	0.37	0.43
5	0.10	0.31	0.13	0.09	0.14	0.17
6	0.20	0.29	0.16	0.12	0.16	0.20
7	0.29	0.30	0.29	0.11	0.29	0.15
8	0.20	0.50	0.17	0.23	0.16	0.35
9	0.40	0.52	0.38	0.29	0.45	0.42
10	0.50	0.30	0.50	0.14	0.50	0.08
11	0.40	0.44	0.38	0.29	0.50	0.09

Tabla 5: Estimación de los valores de c y de η con el método inverso propuesto para los resultados obtenidos en la [Tabla 2](#), [Tabla 3](#) y [Tabla 4](#).

7 RESULTADOS EN PÓRTICOS

Los tres pórticos analizados se encuentran con el extremo empotrado en $x_1 = 0$, y libre en el extremo $x_2 = l_2$. La rigidez a la flexión es

$$(EI)_1 = (EI)_2 = 484785 \text{ kg cm}^2, \quad (57)$$

y la rigidez axial

$$(EA)_1 = (EA)_2 = 7182 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad (58)$$

para los tres pórticos analizados.

Los valores numéricos del coeficiente de frecuencia se presentan referenciados al primer tramo del pórtico:

$$\lambda^4 = \frac{\rho_1 A_1}{E_1 I_1} \omega^2 l_1^4. \quad (59)$$

En la [Tabla 6](#), se presentan las longitudes de los tres pórticos analizados con las características de la fisura.

En la [Tabla 7](#) se presenta una comparación de los primeros seis valores de λ obtenidos con la solución exacta, con resultados numéricos obtenidos con el programa Abaqus de elementos finitos y con mediciones experimentales. Para obtener los resultados del programa Abaqus y las mediciones experimentales se emplearon las mismas técnicas que para las vigas del

apartado anterior. Se observa una muy buena concordancia entre los valores obtenidos de λ , con las tres técnicas de análisis de frecuencias naturales desarrolladas.

Propiedades	Pórtico		
	1	2	3
$l_1 [mm]$	189.4	191	191
$l_2 [mm]$	196.5	194.2	194.4
c_1	-	0.077	-
c_2	-	-	0.0967
η_1	-	0.5556	-
η_2	-	-	0.5556

Tabla 6: Propiedades de los pórticos analizados.

Pórtico		Secuencia Modal					
		1	2	3	4	5	6
1	Exacto	1.0672	1.7506	3.8717	4.7253	6.9072	7.7422
	Abaqus	1.0633	1.7570	3.8577	4.7340	6.8443	7.7003
	Experimental	1.06	1.79	3.82	4.73	6.68	7.46
2	Exacto	0.9943	1.7016	3.8384	4.6411	6.9432	7.7217
	Abaqus	0.9646	1.6955	3.8188	4.6016	6.8316	7.7125
	Experimental	0.96	1.73	3.78	4.66	6.68	7.60
3	Exacto	1.0657	1.6779	3.9042	4.6489	6.9036	7.7494
	Abaqus	1.0613	1.6508	3.8826	4.5906	6.8075	7.6408
	Experimental	1.05	1.65	3.83	4.52	6.57	7.08

Tabla 7: Comparación de los primeros seis valores de λ para los tres pórticos descriptos en la [Tabla 6](#) obtenidos con la solución exacta, con el programa Abaqus y con mediciones experimentales.

8 CONCLUSIONES

Se utilizaron las ecuaciones del problema de contorno y transición provenientes de la aplicación de las técnicas del cálculo de variaciones, y se obtuvo en forma exacta el comportamiento de una viga tipo Euler-Bernoulli con los extremos elásticamente restringidos de rotaciones y traslaciones y con dos restricción elásticas generales en puntos intermedios. También se obtuvo en forma exacta el comportamiento de un pórtico de dos tramos con sus extremos elásticamente restringidos y con una restricción elástica general en cada tramo.

Se implementa un modelo de fisura abierta representado con un modelo de rótula elástica,

el cual en función de las propiedades de la fisura varía la rigidez a la flexión. Con este modelo, se propone un método de identificación de fisuras en vigas a partir de valores obtenidos con la solución exacta, con resultados obtenidos con el método de elementos finitos del programa Abaqus y con mediciones experimentales. También se implementa el modelo de fisura en pórticos para obtener resultados de frecuencias naturales y se compara con resultados numéricos obtenidos con el programa Abaqus y con mediciones experimentales.

Se observa una buena concordancia de los resultados obtenidos en forma directa de las vigas con fisura analizadas, entre los valores exactos, experimentales y los obtenidos con el programa Abaqus.

En cuanto a los resultados obtenidos con el método inverso propuesto, se observa una mayor precisión en la determinación del valor de la posición de la fisura que en la determinación de la profundidad de la fisura. También se observa que el método responde con mayor precisión cuando la fisura se encuentra alejada de los extremos de la viga. Además se observa que cuando la fisura se encuentra cercana a puntos de inflexión de la deflexión para las distintas formas modales, los resultados pierden precisión.

En cuanto a la implementación del modelo de fisura en pórticos, se observa una muy buena concordancia entre los valores exactos, las mediciones experimentales y los obtenidos con el programa Abaqus.

REFERENCIAS

- Arenas, B. B. y Grossi, R. O., Vibration frequencies for a beam with a rotational restraint in an adjustable position, *Applied Acoustics*, 57:197-202, 1999.
- Binici, B., Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force. *Journal of Sound and Vibration*, 287:277-295, 2005.
- Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. y Yao, J., A consistent cracked bar vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 200: 303-313, 1997.
- Cortinez, H. y Laura, P. A. A., Vibration and buckling of a non-uniform beam elastically restrained against rotation at one end and with concentrated mass at the other. *Journal of Sound and Vibration*, 99:144-148, 1985.
- De Rosa, M. A., Bellés, P. M. y Maurizi, M. J., Free vibrations of stepped beams with intermediate elastic supports. *Journal of Sound and Vibration*, 181:905-910, 1995.
- Dimarogonas A. D., Vibration of cracked structures: a state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55: 831-857, 1996.
- Dym, C. y Shames, I., *Solid Mechanics: A Variational Approach*. Mc Graw Hill Book Company, New York, 1973.
- Elsigoltz, L., *Calculus of Variations*. Addison-Wesley, 1962.
- Fernández-Sáez, J. y Navarro, C., Fundamental frequency of cracked beams in bending vibrations: an analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 256:17-31, 2002.
- Gelfand, I. y Fomin, S., *Calculus of Variations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
- Giaquinta, M. y Hildebrandt, S., *Calculus of Variations I*. Springer-Verlag, Berlín, 1996.
- Goel, P., Free vibrations of a beam-mass system with elastically restrained ends. *Journal of Sound and Vibration*, 47:9-14, 1976a.
- Goel, P., Transverse vibrations of tapered beams. *Journal of Sound and Vibration*, 47:1-7, 1976b.
- Grant, A., Vibration frequencies for a uniform beam with one end elastically supported and carrying a mass at the other end. *Journal of Applied Mechanics*, 42: 878-880, 1975.

- Grossi, R.O., *Cálculo de Variaciones. Teoría y Aplicaciones*. CIMNE, Barcelona, 2010.
- Grossi, R. O. y Albarracín, C., Eigenfrequencies of generally restrained beams. *Journal of Applied Mathematics*, 10:503-516, 2003.
- Grossi, R. O., Aranda, A. y Bhat, R. B., Vibration of tapered beams with one end spring hinged and the other end with tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 160:175-178, 1993.
- Grossi, R. O. y Bhat, R. B., A note on vibrating tapered beams. *Journal of Sound and Vibration*, 47:174-178, 1991.
- Grossi, R. O. y Laura, P. A. A., Further results on a vibrating beam with a mass and spring at the end subjected to an axial force. *Journal of Sound and Vibration*, 84:593-594, 1982.
- Hibbeler, C., Free vibrations of a beam supported with unsymmetrical spring-hinges. *Journal of Applied Mechanics*, 42:501-502, 1975.
- Hildebrand, F., *Methods of Applied Mathematics*. Prentice Hall, New Jersey, 1965.
- Hsu, M-H, Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1-17, 2005.
- Kantorovich, L. y Krylov, V., *Approximate Methods of Higher Analysis*. Interscience Publishers, New York, 1964.
- Khaji, N., Shafiei, M., y Jalalpour, M., Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51:667-681, 2009.
- Lau, J. H., Vibration frequencies and mode shapes for a constrained cantilever. *Journal of Applied Mechanics*, 57:182-187, 1984.
- Laura, P.A.A., Grossi, R. O. y Alvarez, S., Transverse vibrations of a beam elastically restrained at one end and with a mass and spring at the other subjected to an axial force. *Nuclear Engineering and Design*, 74:299-302, 1982.
- Laura, P. A. y Gutierrez, R. H., Vibration of a elastically restrained cantilever beam of varying cross section with tip mass of finite length. *Journal of Sound and Vibration*, 108:123-131, 1986.
- Maurizi, R., Rossi, R. y Reyes, J., Vibration frequencies for a uniform beam with one end spring hinged and subjected to a translational restraint at the other end. *Journal of Sound and Vibration*, 48:565-568, 1976.
- Nallim, L. y Grossi, R. O., A general algorithm for the study of the dynamical behaviour of beams. *Applied Acoustics*, 57:345-356, 1999.
- Ostachowicz, W. M. y Krawczuk, M., Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 150:191-201, 1991.
- Quintana M. V., Raffo, J. L. y Grossi, R. O., Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beams with an internal hinge. *Mecánica Computacional*, 24:2499-2516, 2010.
- Raffo, J. L. y Grossi, R. O., A study on mode shapes of beams with internal hinges and intermediate elastic restraints. *Mecánica Computacional*, 26:2593-2610, 2012.
- Rao, C. K., Frequency analysis of clamped-clamped uniform beams with intermediate elastic support. *Journal of Sound and Vibration*, 133:502-509, 1989.
- Rao, C. K. y Mirza, S., Note on vibrations of generally restrained beams. *Journal of Sound and Vibration*, 130:453-465, 1989.
- Rizos, P. F., Aspragathos, N. y Dimarogonas, A. D., Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of Sound and Vibration*, 138:381-388, 1990.
- Ruotolo, R. y Surace, C., Natural frequencies of a bar with multiple cracks. *Journal of Sound*

and Vibration, 272:301-316, 2004.

Rutemberg, A., Vibration frequencies for a uniform cantilever with a rotational constraint at a point. *Journal of Applied Mechanics*, 45:422-123, 1978.

Troutman, J. L., *Variational Calculus and Optimal Control*. Springer-Verlag, New York, 1996.

Weinstock, R., *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering*. Dover Publications, New York, 1974.